חוזק חומרים 1

ד"ר חולמר ולדיסלב

טבלת נושאי הלימוד

מס' הרצאה	נושא הלימוד	מקורות
.1	מבוא לחוזק חומרים. מאמץ ועיבור. מתיחה ולחיצה מרכזית. בוחן מתיחה. חוק הוק.	1,2,3
2,3	מקדם בטחון. מאמץ עקב משקל עצמי. מאמצים ודפורמציות במערכות יתר סטטיות. מאמצי הרכבה.	1,3
4	מאמצים תרמיים. עיבור בכיוונים מאונכים. מקדם פואסון.	1,3
5	מאמצי גזירה בחיבורים בורגיים ומסומררים. מחברי עץ.	1,3
6,7	מומנט אינרציה של שטח ביחס לציר. מומנט אינרציה קוטבי. מומנט אינרציה צנטריפוגלי. משפט שטיינר. מומנט אינרציה ראשי. סיבוב מערכת הצירים. מומנטי אינרציה של פרופילי פלדה.	1,2
8,9	כפיפה ישרה. חישוב מאמצים נורמליים. חוזק בכפיפה.	1,3
10	כיסוי מומנטים. עמיסות מסוכנות. כפיפה וכוח צירי. כפיפה דו- צירית.	1,4
11	כפיפה משופעת.	1,4
12,13	גזירה תוך כדי כפיפה. פריסת מאמצי הגזירה בחתך דק-דפניות. מרכז הגזירה.	1,4
14	פיתול. קביעת מאמצים ודפורמציות. מודול הזיחה. פיתול של מוטות בעלי דפניות דקות.	1,2,3

מקורות

1.S.Timoshenko. Strength of Materials, part 1, Van Nostrad Reinhold C.,1970.

2.W.A.Nash. Strength of Materials, Shaum C., 1978

3. י.אלפרוביץ. תורת החוזק והאלסטיות, חלק א',אורט ישראל, 1975.

4. י.אלפרוביץ. תורת החוזק והאלסטיות, חלק ב', אורט ישראל, 1979.

סילבוס

שם המקצוע: מבוא למכניקה הנדסית

מרצה: ד"ר חולמר ולדיסלב

שם הקורס: הנדסת בניין

מטרת הקורס:

קורס של מכניקה הנדסית הוא אחד ממקצועות היסוד במסלול לימודים של מהנדסי בניין. אחד מתפקידי מהנדס בתחום הבניין - לדעת לתכנן מבנים חדשים למטרות שונות או, לחילופין, לבדוק את המבנים הקיימים מבחינת יכולתם לעמוד בתנאיי עומס שונים. ביצוע תפקידים הנ"ל מחייב יכולת חישוב של מערכות סטטיות במישור ובמרחב מבחינת כוחות חיצוניים וכוחות תגובה בסמכים. הקורס מיועד להקנות למהנדסי העתיד כלים בסיסיים להתמודדות עם מסימה זו. מושגי יסוד המוקנים במסגרת קורס הנ"ל אמורים גם לשמש בסיס להמשך לימודים של מקצועות אחרים (חוזק חומרים, מכניקת זורמים).

מבנה הקורס:

הקורס יינתן במסגרת של 3 ש"ש הרצאה + 2 ש"ש תרגול במטרה ללמד את החומר ולתרגלו.

תרגילי בית:

במשך הקורס יינתנו כ-8 תרגילי בית. כל סטודנט חייב להגיש את התרגיל תוך שבועיים מיום קבלת התרגיל. תרגילים שיוגשו באיחור לא יתקבלו.

שיטת קביעת הציון:

3 בחני תרגול	5% כל אחד
בוחן חצי סמסטר	20%
מבחן סמסטר	65%

מבוא למכניקה הנדסית

ד״ר חולמר ולדיסלב

טבלת נושאי הלימוד

מס׳ הרצאה	נושא הלימוד	מקורות
.1	מושגי יסוד. כוח ומומנט . הצגה אנליטית ווקטורית.	1,2
.2	שקול כוחות. מומנט של כוח. שקול מומנטים משפט וריניון.	1,3
.3	העברת כוחות במגע. העברת כוחות ע״י כבלים וגלגלות.	2,3
.4	חוקי ניוטון. פעולה ותגובה. הסמכים האידיאליים. דיאגרמה של גוף חופשי. שיווי משקל.	1,2,3
.5	סטטיקה של גוף במישור ובמרחב.	1,2
.6	בעיות מרחביות.	1
.7	מערכת כוחות ומומנטים אקוויוולנטית.	1
.8	החיבורים האידיאליים. מסבכים מישוריים ומרחביים. פתרון מסבכים בשיטת הצומת ושיטת החתכים.	1,2
.9	פתרון מסבכים בשיטה הגרפית. מסגרות.	1
.10	כוחות רצופים. כוח ליחידת אורך ושטח. מרכז הכובד	.1
.11	מרכז כובד של קו, שטח נפח ומסה. משפט פאפוס-גולדין.	1,3
.12	חקירת בדים, קשרים דיפרנציאליים לכוחות פנימיים. הצגה אנליטית וגרפית של כוחות פנימיים.	1
.13	בניית מהלכי כוחות ומומנטים פנימיים בקורות.	1,3,4
.14	קורות גרבר. חישוב ריאקציות, בניית מהלכי כוחות ומומנטים פנימיים.	3,4

רשימת מקורות

1. Timoshenko and Young "Engineering Mechanics" McGraw Hill

2. ר.וסרמן "סטטיקה" הוצאת א.ב.ג., 1990

3. י.אלפרוביץ "מכניקה טכנית" הוצאת אורט, 1988

4. מדריך לאינג'ינר - מדעי היסוד

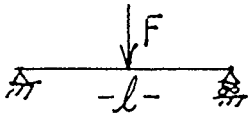
15-3 מוט בעל כוחן רתוק $50/50$ מ"מ ואורך L נתון לעומס אורכי עקיר בעוצמת כח בורי, q מ"מ 100. מה מרחק הזזה כך שנוכל לשנות את האורכים בהתאם הנדרש.

נתון: $E=200$ GPa. (תשובה – 253 mm)

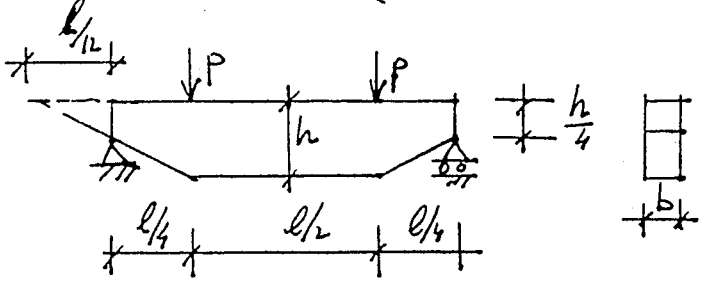
15-5: הראה/י שהאנרגיה האלסטית של קורה עם שני סמכים הנמצאים קרוב מאוד לקצוות, תוך הקורה שווה $\frac{q_{max}^2}{2E}\cdot\frac{7AL}{8}$ כאשר A הוא שטח החתך ואורך הקורה L.

15-10 מה כוחך מרכני נדרוש את F כמוצג הבא?

דרוש: לחשב שקיעה מקסימלית כדי לדעת אנרגיה עקב $EI=\text{const}$. (תשובה $\frac{El^3}{48EI}$)



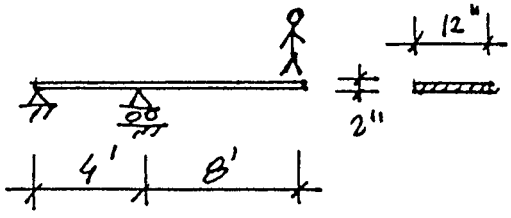
15-13



קורה הבאה בתרשים, דרוש לחשב כדי לדעת אנרגיה את השקיעה בנקודה פעלת הכח.

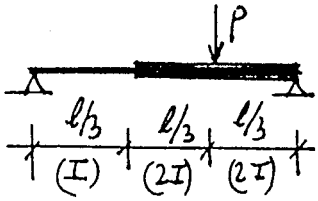
(תשובה: $\frac{Pl^3}{EI_0}$ כאשר I הוא מומנט האינרציה על החתך הנתון $h/4$)

15-18 גרם שמשקלו 80 lb, נופל מגובה h על מקבה מעץ בעל קוטר $2'$. נתון: $E=1.6\cdot10^6$ psi. דרוש: לחשב את המתח המכסימלי בקוטר המקבה. (תשובה 8560 psi)

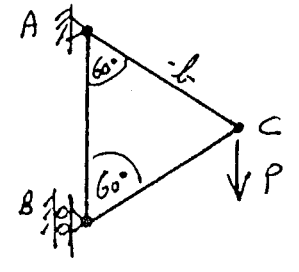


15-25

קורה הבאה בתרשים, דרוש לחשב כדי לדעת אנרגיה את השקיעה בנקודה פעלת הכח. (תשובה – $\frac{13Pl^3}{1458EI}$)



15-21



נתון $EA=\text{const}$

דרוש לחשב עבודה אוגרת ע"י P כדי לדעת אנרגיה.

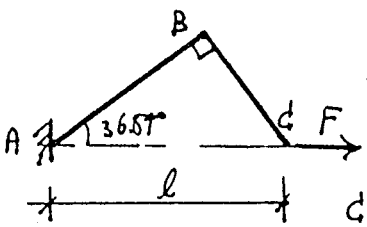
תשובה: $\frac{3Pl}{2}$

12-32

נתון $EI=\text{const}$,

דרוש לחשב עבודה אוגרת ואנרגיה עקב כוח P

(תשובה: $\frac{FL^3}{24EI}$)



15-2 מוט פלדה בקוטר 40 מ"מ באורך 1 מ' נתון לפעולת אינדוקציה B כמו בתור, כ- $\frac{Wb}{m^2}$ 4, כאשורה. $E = 2\cdot10^5 \frac{MN}{m^2}$. דרוש: א) לחשב מתוך שיווי המשקל, כמה הגדול ה"ן שהוכנס בקוטר הזה 20 מ"מ, בלא האשורה המגנטית. (תשובה: כ- $-\frac{MN}{m^2}$ 3,06)

15-4 הוכח כי מוט עשוי כמו בתור, שהוכנה האשורה ההיסטרזיס גם משתנה כ- σ_0 ומשתנה ל- $\sigma_0 + \dot{\sigma}_0 = \sigma_0$, שהשינוי באינדוקציה הוא $(3E)/(9\dot{\sigma}_0 2 + \sigma_0^2)$

15-11: קורה הבאה: $q = 100$ lb/in, $E = 3\cdot10^7$ psi.

דרוש: לחשב שיקוע קבה בנ"ט.
(תשובה: 0,112")

15-16: קורה עץ בנ"ט כמו בקוטר 8" ואורך 12'.
עץ הקורה נמדד משקל של 200 lb ומקבה 9". דרוש לחשב שיקוע אמצעי.
נתון: $E = 2,1\cdot10^6$ psi (תשובה 0,408")

15-22:

נתון: $EA = const$
דרוש: בנוסף אופקי ואנכי של נקודה C

15-23: מוט שעוז כמו בתור אינדוקציה, לחשב שקיעה אמצעית.

15-27 מוט שעוז כמו בתור אינדוקציה
דרוש לחשב שיקוע נקודה D
אורך $EI = const$. (תשובה: $\frac{5Pl^3}{48EI}$)

15-30

מוט שעוז כמו בתור אינדוקציה,
דרוש לחשב בנוסף אופקי ואנכי של נקודה D
עבור $EI = const$.
תשובה: אופקי: $\frac{2Fa^3}{EI}$

15-41

מוט שעוז כמו בתור אינדוקציה
דרוש לחשב עבור $EI = const$
בנוסף אופקי של A ושל שיא <- A ו- B.
(תשובה: $\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\frac{Pa^3}{EI}$)

15-2 מוט פלדה בקוטר 40 מ"מ ואורך 1 מ' נתון לעקה אנכית של כמה בורים, אם ידוע כי $E = 2\cdot10^5 \frac{MN}{m^2}$? בורות: א) לחלב מחוץ לאזור הכפוף, בראשונה. ב) אותו הדבר לגבי בקטע שאורכו 0.5 מ' בקוטר הזה 20 מ"מ, הנמצא בראשית הכפוף. (תשובה: ב) $-0.3\frac{MN}{m^2}$)

15-4 הוכח כי מוט עגול בקוטר d משתנה כ- d_2 ומחוץ ל- d_1 ושהגל באורכו L הוא $\frac{\pi E}{2}/(d_1 d_2 + d_2^2)$

15-11 : בקורה הבאה: $q = 100\ lb/$, $E = 3\cdot10^7\ psi$.
בורות לחלב שקיעת קצה הניצב.
(תשובה: $0.112"$)

15-16 : קורה עץ בניצב בקוטר 8" ואורך 12'.
על הקורה נורה משקולת $q = 200\ lb/$ בקוטר 9". בורות לחלב שקיעת אמצע.
נתון: $E = 2.1\cdot10^6\ psi$ (תשובה $0.408"$)

15-22 :

נתון: $EA = const$
בורות: עבודה אלמנטרי באזור a בנקודה C

15-23 : מוט שהוא בשיווי אנכי, לחלב שקיעת אמצע.

15-27 מוט שהוא בשיווי אנכיה
בורות לחלב שקיעת נקודה D
אזור $EI = const$. (תשובה: $\frac{13}{4}\frac{EI}{h^3}$)

15-30

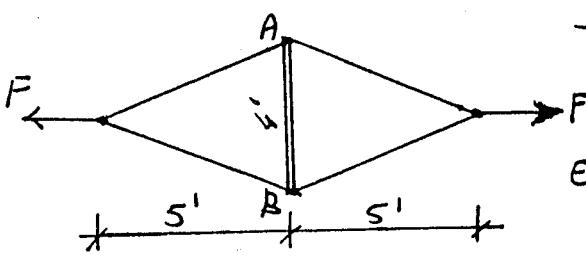
מוט שהוא בשיווי אנכיה, בורות לחלב עבודה אלמנטרי ואנכי y בנקודה D
עבור $EI = const$
תשובה: אופקי: $\frac{2Fa^3}{EI}$

15-41

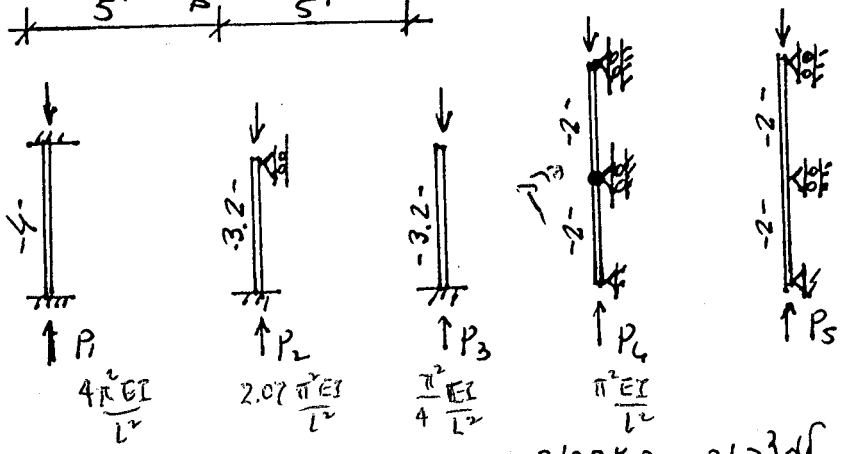
מוט שהוא בשיווי אנכיה
בורות לחלב עבור $EI = const$
עבודה אלמנטרי y של A ושל B ביחס ל- A.
(תשובה: $\frac{Pa^3}{EI}\left(\frac{5}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$)

תרגילים נוספים 2 - פרק שלישי, חלק שני

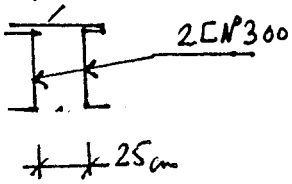
13-6 מוט AB קשיח "1 קשור בשני מוטות כמתואר בציור. המוטות עשויים מפלדה בעלת מודול אלסטיות $E=29\cdot10^6$ psi. מהו F המרבי שניתן להפעיל בקצות המוט כך שהמוט לא יתכופף?



13-14 מוט בעל חתך אחיד, משענת פרק בקצה אחד וקפיץ בקצה השני. מצאו את עומס האויילר עבור חמשת המצבים המתוארים בציור. אם P_1 שווה ל 20 kN, מה יהיו P_2, P_3, P_4, P_5 עבור חמשת המצבים האחרים?

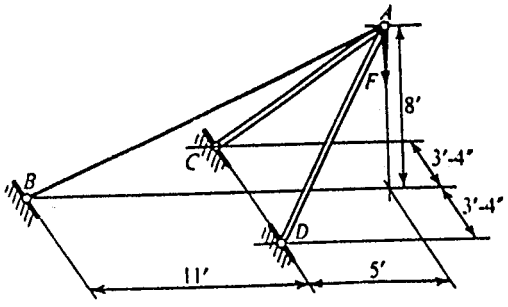


13-19 קורה בעלת חתך כמתואר בציור עשויה מפלדה בעלת מודול אלסטיות $E=200$ GPa. מהו העומס המרבי שניתן להפעיל על הקורה?



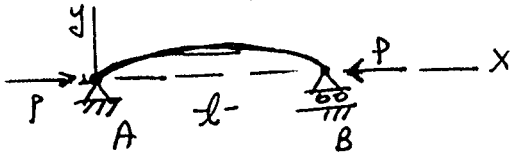
תרגילים נוספים 2 - פרק שלישי, חלק שני

13-9 במערכת המתוארת, AD, AC, AB עשויים מצינור בעל קוטר חיצוני 3.5" וקוטר פנימי 3.25". מהו העומס המרבי שניתן להפעיל בקצה A? (תשובה: $P = 98.4$ k) $E = 29\cdot10^3$ ksi



PROB. 13 - 9

13-16: מוט AB בעל אורך l, מפולח מראש לפי הקו $v_0 = a\sin\frac{\pi x}{l}$, כאשר a הוא מרחק הקצה מציר המוט. מוט זה מונח בין שני קירות קשיחים. בקצה B מופעל כוח P, הגורם לקיצור המוט עד שהוא נוגע בקיר. מצאו את P המרבי.



$$v = v_0 + v_1 = \left[\frac{1}{1-\frac{P}{P_{cr}}}\right] a\sin\frac{\pi x}{l}$$

כאשר $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

13-21: שני פרופילי UNP260 מחוברים יחד לפי התרשים. משני הפרופילים יוצרים אלמנט לחוץ באורך 2.4 מ'. $E = 2.1\cdot10^5$ MPa. $\sigma_{yield} = 252$ MPa. מהו העומס המרבי שניתן להפעיל על האלמנט?



1. בחתכים הבאים, מומנט לתשר לגרום מהמוט מהחומר כפי שמופיע בשרטוט (ללא מקדמי בטחון). $M = 80\ kN \cdot m$

$E_{AL} = 70\ GPa$, $E_{St} = 210\ GPa$

(תשובה: 40.3, 26.8)

2. בחתכים הבאים, הגדירו את המומנט האלסטי-פלסטי אידיאלי.

דרוש: לחשב M_{yld}/M_{ult}

הערה: ללא מקדמי בטחון!

(תשובה: 1.7)

3. בהתבסס המשוואות בשרטוט, המוט עשוי מחומר אלסטי-פלסטי אידיאלי והוא נתון ב:

$E = 200\ GPa$, $\sigma_{yld} = 200\ MPa$

הכח P מופעל ב-"ס" עד שיכול הקבוע!

דרוש: לחשב תזוזה נקודה B כפונקציה של P.

4. לקורה המשוואת בשרטוט מצורף (אלסטי פלסטי אידיאלי)

דרוש: לחשב את המידה X שבו כח P גורם לכך שכל הסגמנט של נקודה B.

אם כשמגדילים עוד את הכח P, משתנים את הצורה, מה יהיה המיקום של נקודה B?

5. לקורה המשוואת בשרטוט מצורף.

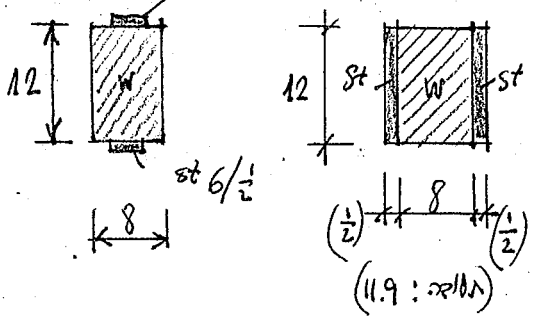
דרוש: א. לחשב כח P שיגרום למצב σ_{yld} בנקודה המסומנת באשונה

ב. לחשב כח P לגרום לפרק פלסטי ראשון.

ג. לחשב כח P שיגרום ל-2 פרקים פלסטיים.

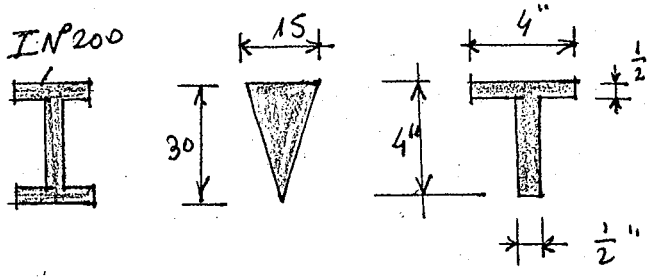
תוכן תרגילי בית מס' 9

1. בחתכים הבאים ברזל יתלש מומנט כפיפה מירבי,
(בקירוב המומנט-אלסטי). התכן מוכיח מתקיים עלף "12/"8,
מתוכנן עבור לחצים בלבד. $\sigma_{st} = 20\,ksi$, $\sigma_{w}^{מותר} = 1.2\,ksi$
$E_{st} = 30\cdot10^6\,psi$. $E_w = 1.2\cdot10^6\,psi$.



(תשובה: 9.11)

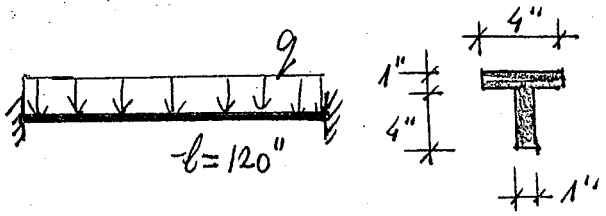
2. בחתכים הבאים, הניחו שחומר
התנהגותו היא אלסטי-פלסטי אידיאלית.
דרוש: יתלש M_{plast}.
הערה: הקירוב המומנט אפס!



(תשובה: 8.1)

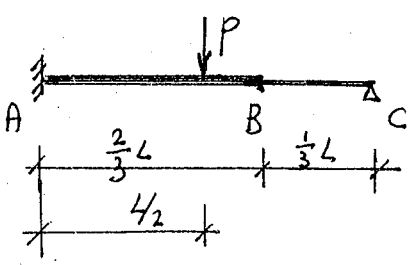
3. בעמוד בטון בחתך "14/"14, ושלש 4 מוטות "1ϕ. יש להניח שהכיסוי
והבלבה הם תורים אלסטיים/פלסטיים אידיאלית. נתון: שלבה בעמוד "120.
יבלבה: $E = 30\cdot10^6\,psi$. $\sigma_{yp} = 60\,ksi$. $\sigma_{מותר} = 24\,ksi$.
לבטון: $E = 2\cdot10^6\,psi$ $\sigma_{yp} = 4.6\,ksi$ $\sigma_{מותר} = 2\,ksi$
על בעמוד מופעל כח לחיצה N המשתנה מ- "0" ל- N יקול.
דרוש: לצאו צפיפ העמוד המכלולות בפונקציה של העמוס N.
לקבלך N אחוז ו- N יקול!

4. בקורה המתוארת בציורים נתון:
$\sigma_{yp} = 50\,ksi$, $E = 30\cdot10^3\,ksi$



דרוש: א. לתשב עומס q שיגרום ליצירת מחלת ציר בנקודה מסוימת.
ב. לתשב עומס q שיגרום ליצירת פתיח פלסטי (ללא כל מכניסם)
ג. לתשב עומס q שיגרום ליצירת מכניזם

5. לקורה המתוארת בציור, התנהגות אלסטי-פלסטי
אידיאלית. המומנט הפלסטי בקטע AB הוא $2M_p$
ובקטע BC, M_p



דרוש: לתשב כמה q הקורה!

המכללה
ע"ר
להנדסה בנגב
האקדמית
Negev
Academic
College of
Engineering (R.A)

Department of Building and
Construction Engineering

י"ח תשרי, תשס"א
תאריך : _____

לכבוד,
מר פימה
תעו"נ
<u>כאן</u>

פימה שלום!

הנדון : <u>בקשת עזרי הוראה</u>

אנו זקוקים ל : _____
בימים : _____
בתאריכים : _____
בין השעות : _____
כיתה : _____
שם ההרצאה : _____
שם המרצה : _____

<u>הערה עבור המרצה</u> : יש להודיע למזכירות המגמה על כל שינוי <u>לפחות</u> שבוע לפני.

תודה

מזכירות המגמה

העתק: מזכירות המגמה
מרצה

71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573:טל Fax. 07-6462264:בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100 פקס
web: www.nace.ac.il

המכללה האקדמית להנדסה בנגב ע"ר
Negev Academic College of Engineering (R.A)

המחלקה להנדסת בניין

Department of Building and Construction Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

לכל המרצים

הנדון: <u>ערעור סטודנטים על ציוני המבחנים</u>

1. לאחרונה רבו התופעות שסטודנטים נוהגים שלא לפי ההוראות, ופונים בערעורים אישית אל המרצים לאחר שהוציאו את המחברות מ"מרכז חשיפת בחינות".

2. לתשומת לבכם, בהקמת מרכז חשיפת הבחינות ונוהל החשיפה שפורסם לסטודנטים, נשמרת לסטודנט זכות הערעור רק דרך "מרכז חשיפת הבחינות" (וגם זאת לא יאוחר מ- 10 ימים ממועד פרסום הציונים), אשר מפנה את הערעור למזכירות המחלקה. הערעורים מועברים למרצים רק באמצעות מזכירות המחלקה ובשום אופן לא אישית ע"י הסטודנטים.

3. בהוצאת מחברת הבחינה מ"מרכז החשיפה" מאבד הסטודנט את זכות הערעור.

4. אבקשכם להקפיד על קיום הוראות הנוהל בנושא.

5. המלצות מרצים לתקון ציון על ערעורים שהועברו/יועברו אליהם ישירות ע"י הסטודנט, לא יאושרו, ללא תלות בנימוקים להמלצה לתקון ציון.

בין - יש כן שעוד ימים מצמן הבחינות לצמן לשם את הציונים
בדיק לפרסם פיתיונות למבחנים?

ב ב ר כ ה,

ד"ר אורי צדקה
רמ"ח בניין

71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573: טל Fax. 07-6462264: בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100 מקס
web: www.nace.ac.il

המכללה
האקדמית
להנדסה בנגב

Negev
Academic
College of
Engineering

המחלקה להנדסת בניין

Department of Building and
Construction Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

י"ב תשרי תשס"א
11 אוקטובר 2000

לכבוד,

מר/~~גב'~~ [illegible]

הנדון : ישיבת פתיחת סמסטר

1. בתאריך ה- 29.10.00, תחל שנה"ל תשס"א- סמסטר א'.

2. ישיבת פתיחת סמסטר תתקיים ב- 23.10.00 בשעה 15:00 בחדר 31.

3. במידה וטרם נמסרו למחלקה הסילבוסים של המקצועות אותם הנך מלמד הסמסטר, יש להגישם עד לתאריך הישיבה.

4. אבקשך להזמין מראש את עזרי ההוראה להם הנך נדרש לסמסטר הקרוב.

5. בברכת שנה טובה

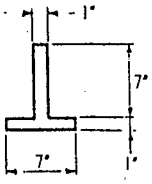
מזכירות המגמה

העתקים: דר' א. לוי - נשיא
דר' יהודה חדד - ס' נשיא

71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573 טל: Fax. 07-6462264; בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100 פקס
web: www.nace.ac.il

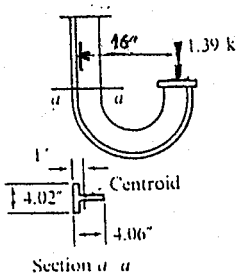
תוכן תוארים 2 - שלוש תשובות כתב אס. 1

7-4. An offset link is similar to the one shown in the preceding problem but is larger and has a cross section in the form of a T, see figure. At the ends of the link the tensile forces P are applied in. above the bottom of the flanges, and the offset $e = 2\frac{1}{2}$ in. from the line of action of these forces. Find the maximum stress if $P = 40$ kips and the material behaves elastically.



PROB. 7-4

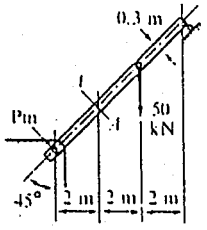
7-7. A large hook fabricated from a structural steel T (AISC designation: WT 4B) is loaded as shown in the figure. Determine the largest normal stress at the built-in end. For this section $A = 2.22$ in.^{2} and $I_0 = 3.29$ in.^{4} *Ans:* 20 ksi.



Section a–a

PROB. 7 – 7

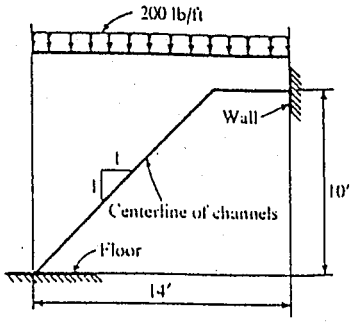
7-10. An inclined beam having a cross-section of 0.20 m by 0.30 m supports a downward load as shown in the figure. Determine the maximum stress acting normal to the section A-A. Assume no eccentricity of the load or reactions and neglect the weight of the member.



PROB. 7 – 10

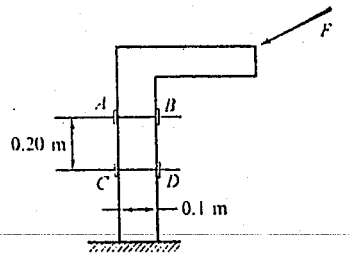
7-13. A factory stairway having the centerline dimensions shown in the figure is made from two 9-in., 13.4-lb steel channels on edge separated by treads framing into them. The loading on each channel, including its own weight, is estimated to be 200 lb per foot of horizontal projection. Assuming that the lower end of the stairway is pinned and that the wall provides only horizontal support at the top, find the largest normal stress in the channels 5 ft above the floor level. *Ans:* −2,600 psi.

$A = 5.88$ in.^{2}
$I = 47.9$ in.^{4}
$W = 10.6$ in.^{3}
$h = 9$"
$G = 13.4$ lb/ft



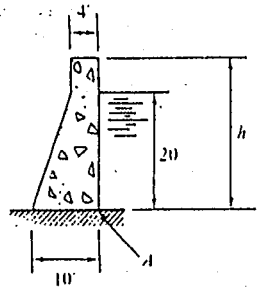
PROB. 7 – 13

7-22. A bar having a 0.10 m by 0.10 m cross-section is subjected to a single force F as shown in the figure. The longitudinal stresses on the extreme fibers at two sections 0.20 m apart are determined experimentally to be: $\sigma_A = 0$; $\sigma_B = -30$ MPa; $\sigma_C = -24$ MPa; $\sigma_D = -6$ MPa. Determine the magnitude of the vertical and horizontal components of the force F.

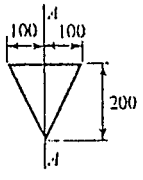


PROB. 7 – 22

7 – 27. What should the total height h of the dam shown in the cross-sectional view be so that the foundation pressure at A is just zero? Assume that water weighs 62.5 lb/ft^3 and concrete 150 lb/ft^3 *Ans:* 27.6 ft.



7-29. A short block has cross-sectional dimensions in plan view as shown in the figure. Determine the range along the line A-A over which a downward vertical force could be applied to the top of the block without causing any tension at the base. Neglect the weight of the block. Dimensions given in the figure are in mm.



PROB. 7 – 29

תוכנית תרגיל 2- עיון ראשון, כיתה יום ד'

7-4: בחתך באיור הקרוי בזה כח גזירה $P=40\,kips$, כגודה $2.5"$ מהתחתית הקצה. דרוש למצוא את מרכז הגזירה.

7-7: באיור הבא קרוי נתוני החתן הם: $A=2.22\,in^2$, $I_o=3.29\,in^4$. דרוש למצוא את מרכז הגזירה בחתן הנתון (תשובה: $20\,ksi$)

7-10: לקוח מישענת חתך של $30/20$ מ"מ. דרוש: למצוא את מרכז הגזירה בחתן A-A.

7-13: מהלך אזור שלוב מורכב מ-2 פרופילי עגה $9/13.4$ שהבולטים הם: $A=5.88\,in^2$, $I=47.9\,in^4$, $W=10.6\,in^3$, $h=9"$, $13.4\frac{lb}{ft}=$ נתון שם כי פרופיל הוא $200\,\frac{lb}{ft}$. נניח כי הסרק הגדתן פרק קרוב ושהסרק הפנימי מגיע רק בכח אופקי.

דרוש: למצוא את הגזירה הפנימי בחתן בגודה $5\,ft$ מעל נק' הקרקע.

(תשובה: $2600\,psi$)

7-22: למוט הבא בתנאי תמך של $50/40$ מ"מ. בפועלת כח F הגורם לשדות המאונכים הקיימים בנקודות A, B, C, D:

$\sigma_A=0$, $\sigma_B=-30\,mpa$, $\sigma_C=-24\,Mpa$, $\sigma_D=-6\,mpa$.

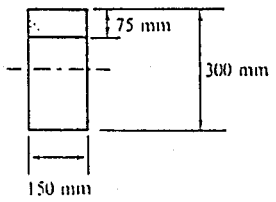
דרוש: למצוא את גודל כח F וכיוון הפועלים ובאנכי.

7-27 מה צריך להיות הגודה h של המשולש, לפחות באיור בתנאי, כך שהמשולש בנקודה A יהיה "0". הנח שהמשקל הסגולי של העץ $62.5\,\frac{lb}{ft^3}$ והמשקל הארצי של הבטון כפחות $150\,\frac{lb}{ft^3}$. (תשובה $27.6\,ft$)

7-29 בשטח החתך הבא בתנאי, דרוש לקבוע את התווך לאורך ציר A-A, שבו יכול לפעול כח חיצוני, מבלי שיווצרו בחתך מאמצי גזירה.

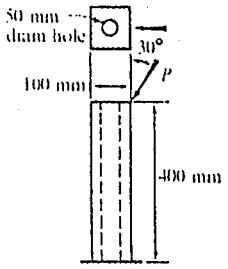
תוכן תוכן 2 - שלון עמוד מס' 1

7-5. A beam having the cross-sectional dimensions shown in the figure is subjected at a given section to the following forces: a bending moment of + 20 kN·m a total vertical shear of +20 kN, and an axial thrust of 30 kN. Determine the resultant normal force on the shaded part of the cross-section. *Ans:* −82.5 kN.



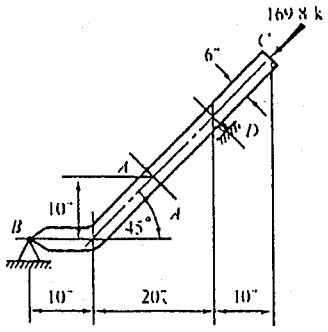
PROB. 7 - 5

7-9 A short 100 mm square steel bar with a 50 mm diameter axial hole is built in at the base and is loaded at the top as shown in the figure. Neglecting the weight of the bar, determine the value of the force P so that the maximum normal stress at the built-in end would not exceed 140 MPa. *Ans:* 129 kN.



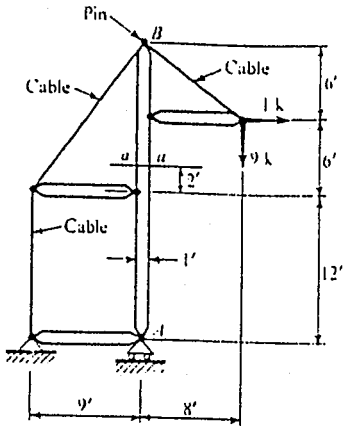
PROB. 7 - 9

7-12. A force of 169.8 kips is applied to a bar BC at C as shown in the figure. Find the maximum stress acting normal to the section A-A. The member BC is made from a piece of 6 in. by 6 in. steel bar. Neglect the weight of the bar. *Ans:* −18 ksi.



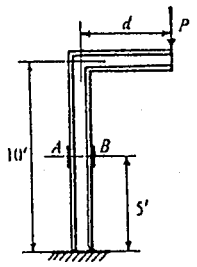
PROB. 7 - 12

7-17. Compute the maximum compressive stress acting normal to the section a-a for the structure shown in the figure. The post AB has a 12-in.-by-12-in. cross section. Neglect the weight of the structure. *Ans:* −174 psi.



PROB. 7 - 17

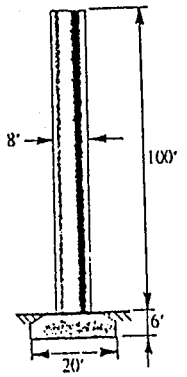
7-21. A steel frame fabricated from W 8 × 17 steel sections supports a load P at a distance d from the center of the vertical column as shown in the figure. On the outside of the column at a distance 5 ft from the ground the following strains were measured: at A, $\varepsilon = 200 \times 10^{-6}$ in. per inch; and at B, $\varepsilon = -600 \times 10^{-6}$ in. per inch. What are the magnitudes of the load P and the distance d? let $E = 30 \times 10^6$ psi. *Ans:* 30 k, 5.63 in.



A=5.01 in²
I=56.6 in⁴
W=14.1 in³
h=8"
G=17 lb/ft

PROB. 7 - 21

7-33. An 8-ft-diameter steel stack, partially lined with brick on the inside, together with a 20-ft-by-20-ft concrete foundation pad weighs 160,000 lb. This stack projects 100 ft above the ground level, as shown in the figure, and is anchored to the foundation. If the horizontal wind pressure is assumed to be 20 lb per square foot of the projected area of the stack and the wind blows in the direction parallel to one of the sides of the square foundation, what is the maximum foundation pressure? *Ans:* 1.21 k per square foot.



PROB. 7-33

5-7 קורה, בתמך המתואר בתרשים. על התמך פועל מומנט כפוף $20+$ kN·m. כח אנכי $20+$ kN פועל במרחק 30 cm. דרוש: לחשב את שקול הכוח של הפיזור הליניארי המקורב. (תשובה: -82.5 kN)

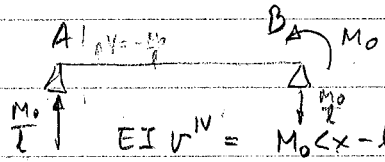
6-7 עמודה בתרשים, שכוח תגן רציף, בעלת 100 mm רוחב קבוע בקטע 55 mm, דרוש: לחשב את שקול הכוח של הפיזור הליניארי, אם נתון כי q שווה ל-160 kN/m? (תשובה: 190 kN)

12-7 כח של 169.8 kN מוצמד על המוט BC בנקודה C. דרוש לחשב את המומנט הכפוף בחתך A-A, המוט שלו בלוי מעגלי בקוטר 3" (תשובה: 181 kN·in)

17-7: לחשב את המומנט הכפוף בחתך a-a לפאת AB מוגן על 12"/12". (תשובה: 174 kN·in)

21-7: מסגרת בנויה מקורות IPE 80 כאשר כוחות P ו-M פועלים כמו בציור. $M = 8P$. בקורות נ.מ.מ. בכל הקורות $E = 200 \cdot 10^{-6}$ kN/mm², $I = 80.1 \cdot 10^{-6}$ m⁴. דרוש: לחשב את שיעור הכוח P והמרחק x אם נתון כי $\varepsilon_A = 200 \cdot 10^{-6}$ mm/mm, $\varepsilon_B = -600 \cdot 10^{-6}$ mm/mm. (תשובה: 30 kN, 3.63 m)

33-7: קורה בקטע BC, יסוד רציף בשני קצוות 20"/20". עומק הריסוס 9" מתחת לפני הקרקע. שכבה האורכית 100. משקל האורכה 160000 lb. על המורכה נוסף עומס רוח אופקי של 20 $\frac{lb}{ft^2}$ (משטח נטוי). דרוש: לחשב מומנט על הריסוס. (תשובה: 121 $\frac{ft^2}{x}$)



$EI v^{IV} = M_0 \langle x-l \rangle^{-2}$

$-V = EI v''' = M_0 \langle x-l \rangle^{-1} + C_1$ $\quad \frac{M_0}{l}$

$EI v'' = M_0 \langle x-l \rangle^{0} + C_1 x + C_2$ $\quad M=0 \text{ @ } x=0$

$EI v' = M_0 \langle x-l \rangle^{1} + C_1 x^2 + C_3$ $\quad M=0 \text{ @ } x=l$

$M_0 + C_1 l = 0 \quad C_1 = -\frac{M_0}{l}$

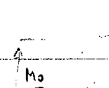
$EI v = M_0 \frac{\langle x-l \rangle^2}{2} + C_1 \frac{x^3}{3} + C_3 x + C_4$ $\quad v=0 \text{ @ } x=0$

$x=l$

$C_1 \frac{l^3}{3} + C_3 l = 0 \quad C_3 = -C_1 \frac{l^2}{3}$

$M_0 \frac{\langle x-l \rangle^2}{2} + C_1 \frac{x^3}{3} - C_1 \frac{x l^2}{3}$

$\frac{M_0 x}{3l}\left[x^2 - l^2\right]$



$M = \frac{M_0}{l} x$

$EI v'' = \frac{M_0}{l} x$

$EI v' = \frac{M_0 x^2}{2l} + C_1$

$EI v = \frac{M_0 x^3}{6l} + C_1 x + C_2$ $\quad \frac{M_0 l^2}{6} + C_1 l = 0$

$C_1 = -\frac{M_0 l}{6}$

$\frac{M_0 x^3}{6l} - \frac{M_0 l x}{6} \quad \frac{M_0 x}{6}\left[x^2 - l^2\right]$

$\frac{M_0 x^3}{6l} - \frac{M_0 l x}{6}$

$-\frac{M_0 x l}{6}\left[-\frac{x^2}{l^2} + 1\right]$

$-\frac{M_0 l}{6EI}$

$EI v' = \frac{M_0 x^2}{2l} - \frac{M_0 l}{6}$

@ $x=0$ $\varphi_A = -\frac{M_0 l}{6EI}$ $\quad$ @ $x=L$ $+\frac{M_0 l}{3EI} = \varphi_B$

then $\frac{dy}{dx} = -\frac{|M_0| l}{6EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) - \frac{|M_0| l x}{6EI}\left(-\frac{2x}{l^2}\right)$

@ $x=0$ $-\frac{|M_0| l}{6EI}$ $\quad x=l$ $+\frac{|M_0| l^2}{3\,6EI}\left(1+\frac{2}{1}\right) = \frac{|M_0| l}{3EI}$

$\frac{}{48EI}$ $\frac{}{24EI}$

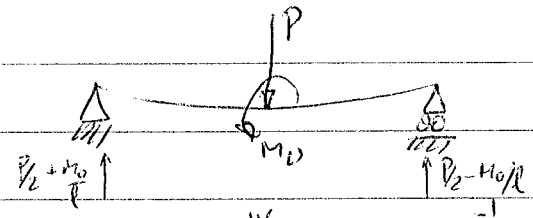
$$f_c = \frac{Pl^3}{48EI} + \cancel{\frac{M_o l^2}{16EI}}$$

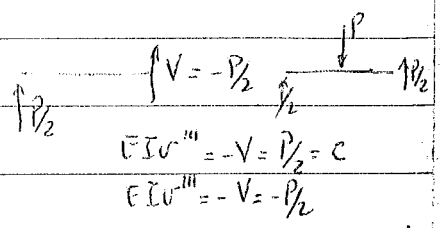
$$\frac{M_o}{4lEI}\left[\frac{4}{3}a^3 - \frac{2}{3}b^3\right] - \frac{M_o l^2}{48EI}$$

$$\left[\frac{2}{3}\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{6}\right] \quad (48)$$

$$\frac{\partial y_{ac}}{\partial x} = \varphi = \frac{M_o}{2l^2EI}[\quad] - \frac{M_o x^2}{2lEI}$$

$$\varphi_A = \frac{M_o}{2l^2EI}\left[a^2\left(b+\frac{a}{3}\right) + \frac{2}{3}b^3\right]$$





$$EIv^{IV} = -P\langle x - l/2\rangle^{-1} + M_o\langle x - l/2\rangle^{-2}$$

$$EIv''' = -P\langle x - l/2\rangle^{0} + M_o\langle x - l/2\rangle^{-1} + C_1$$

$$EIv'' = -P\langle x - l/2\rangle^{1} + M_o\langle x - l/2\rangle^{0} + C_1 x + C_2$$

@ $x = 0$ $M = 0$ $C_2 = 0$

$x = l$ $M = 0$ $-Pl/2 + M_o + C_1 l = 0$ $C_1 = \frac{P}{2} - \frac{M_o}{l}$

$$EIv' = -\frac{P}{2}\langle\ \rangle^{2} + M_o\langle\ \rangle^{1} + C_1\frac{x^2}{2} + C_3$$

$$EIv = -\frac{P}{6}\langle\ \rangle^{3} + \frac{M_o}{2}\langle\ \rangle^{2} + C_1\frac{x^3}{6} + C_3 x + C_4$$

@ $x = 0$ $M = 0$ $C_4 = 0$

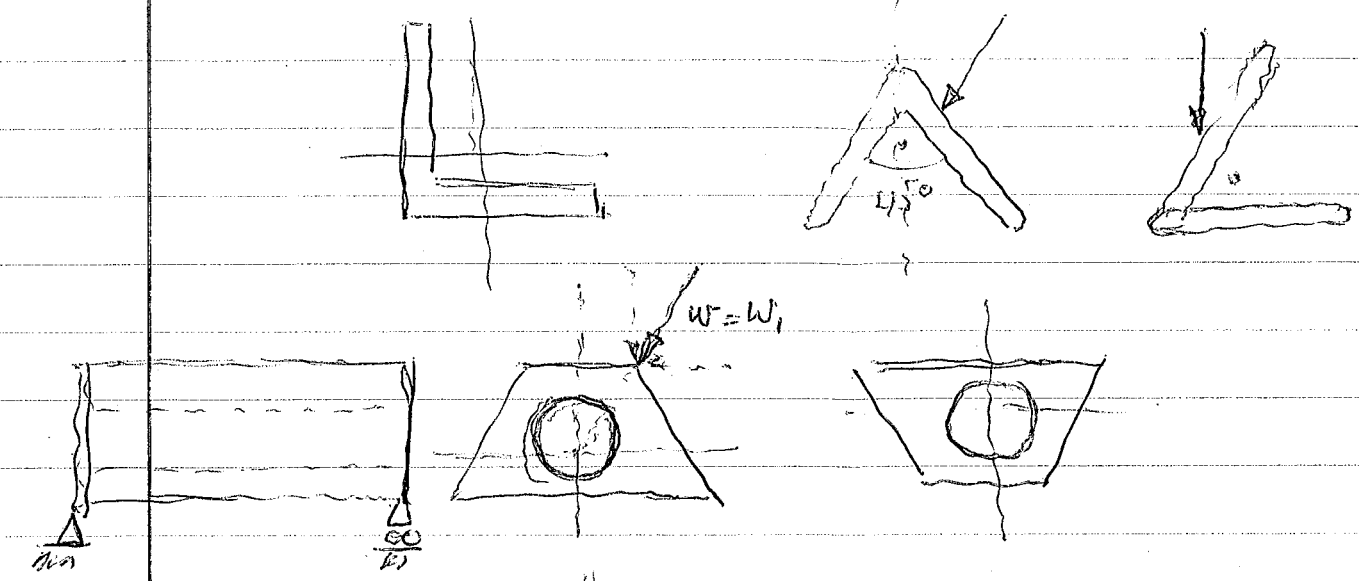
$x = l$ $v = 0$ $-\frac{P}{6}\frac{l^3}{8} + \frac{M_o}{2}\frac{l^2}{4} + \left(\frac{P}{2} - \frac{M_o}{l}\right)\frac{l^3}{48} + C_3 l = 0$

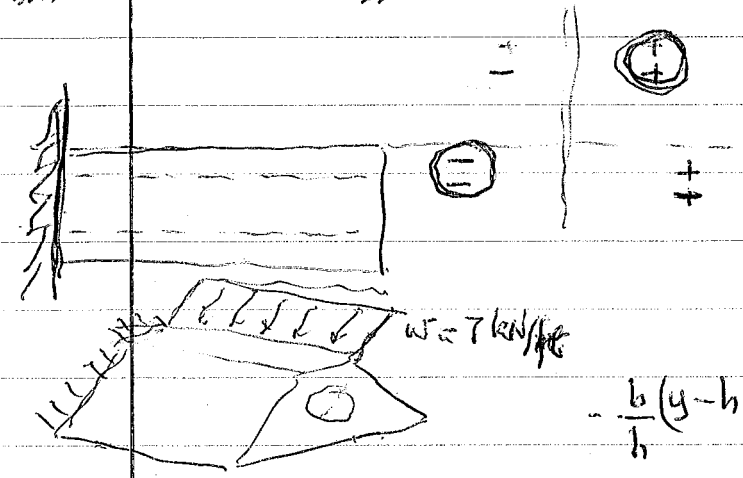
$$C_3 = \frac{Pl^2}{48} - \frac{6M_o l}{48} - \frac{Pl^2}{96} + \frac{M_o l}{48}$$

$$C_3 = \frac{Pl^2}{96} - \frac{5M_o l}{48}$$

$$-\frac{P}{6}\langle\ \rangle^{3} + \frac{M_o}{2}\langle\ \rangle^{2} + \left(\frac{P}{2} - \frac{M_o}{l}\right)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{Pl^2}{96} - \frac{5M_o l}{48}\right)x$$

$$y = \left(\frac{2P}{4} - \frac{M_o}{l}\right)\frac{l^3}{48} + \left(\frac{Pl^2}{96} - \frac{5M_o l}{48}\right)l/2 \qquad \frac{3Pl^3}{}$$





$-\frac{b}{h}(y-h)$

$M = w_1 \frac{L^2}{2}$

$F = w_1 L$

in plane of force ⊥ plane L

$V = wL$

$w_1 \frac{L^2}{2}$

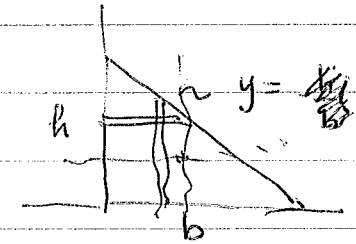
$I_{zz} = I_{zz_0} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{h^2}{9}$

$\frac{bh^3}{4} = I_{zz_0} + \frac{bh^3}{18}$

$I_{zz_0} = \frac{7}{36} bh^3$

$I_{yy} = \frac{hb^3}{4} = I_{yy_0} + \frac{bh}{2}\left(\frac{b}{9}\right)^2$

$I_{yy_0} = \frac{7}{36} hb^3$



$I_z = \int y^2 dA = \left(-\frac{h}{b}z + h\right)^2 \cdot y dz$

$= \int y^3 dA = \left(-\frac{h}{b}z + h\right)^3 dz$

$= -\frac{b}{h}\left(-\frac{h}{b}z + h\right)^4 / 4 \Big|_0^h$

$= -\frac{b}{h}\left[0 - \frac{h^4}{4}\right] = \frac{bh^3}{4}$

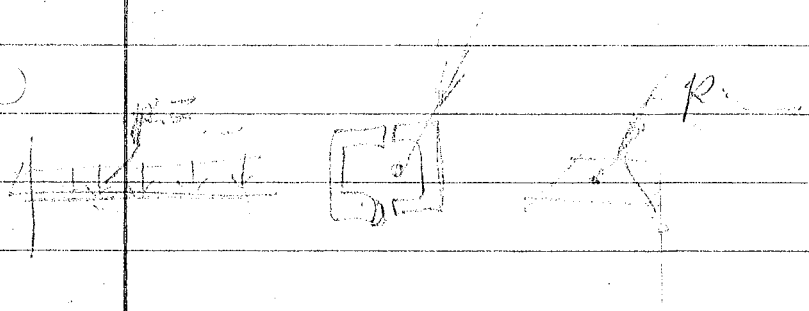
$I_{yy} = \int z^2 \cdot dA = \int_0^h z^3 dy$

$\int \left(-\frac{h}{h}[y-h]\right)^3 dy$

$-\frac{h}{b}\left(-\frac{b}{h}(y-h)\right)^4 / 4 \Big|_0^h$

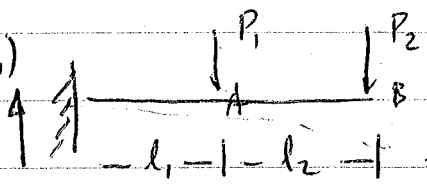
$-\frac{h}{b} \cdot \frac{b^4}{4h^4}\left[0 - h^4\right]$

$+\frac{hb^3}{4}$

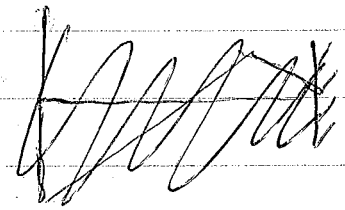


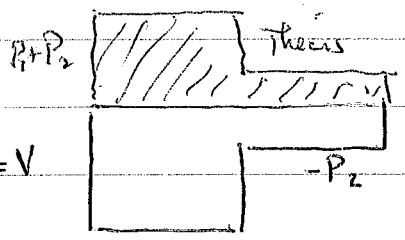
$M = P_1 l_1 + P_2(l_2 + l_1)$

$V = P_1 + P_2$



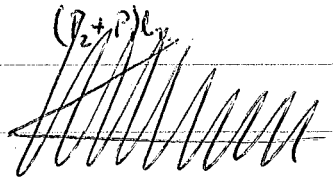
EI

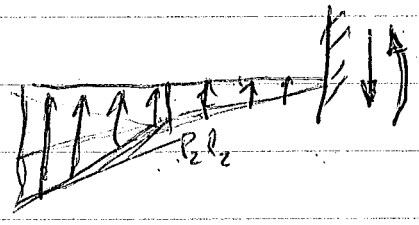




$(-P_1 - P_2) = V$

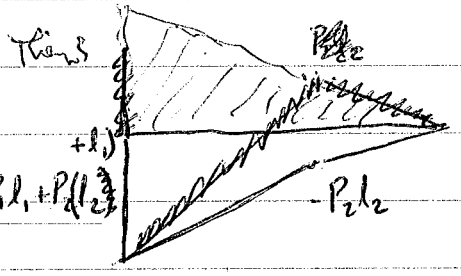
$-(P_1 l_1 + P_2 l_2 + P_2 l_1) + P_1 l_1 + P_2 l_1$





$P_1 l_1 + P_2(l_1 + l_2)$

+



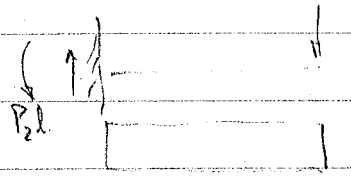
$-(P_1 l_1 + P_2 l_2)$

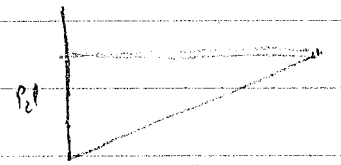
$l_1 \; l_2$

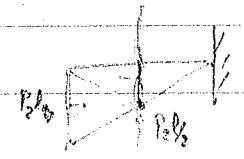
$$\theta_A = \int \frac{-M}{EI} dx = \frac{\left[P_1 l_1 + P_2(l_1 + l_2)\right] l_1}{2EI} + \frac{P_2 l_2 \cdot l_1}{2EI}$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_{l_1}^{l_1 + l_2} \frac{M}{EI} dx = \theta_A + \frac{P_2 l_2^2}{2EI}$$

$$\theta_B = \frac{P_1 l_1^2 + P_2 (l_1 + l_2)^2}{2EI}$$







$$\delta_A = \underbrace{\left[P_1 l_1 + P_2(l_1 + l_2)\right]}_{\text{area}} \frac{l_1}{2} \cdot \frac{2}{3} l_1 + \frac{P_2 l_2}{2} \cdot l_1 \cdot \frac{l_1}{3}$$

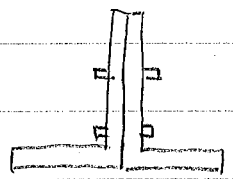
$$P_2(l_1 + l_2) \cdot \frac{l_1^2}{3} + P_2 l_2 \frac{l_1^2}{6}$$

$$\frac{2}{3} l_1 \cdot P_2 l \left(\frac{l_1}{2}\right) + \frac{P_2 l_2}{2} l_1 \cdot \frac{1}{3} l_1$$

$$P_2 l \frac{1}{3} l_1^2 + P_2 l \frac{l_1^2}{3}$$

$$\frac{P_2 l}{3}\left[l_1^2\right]$$

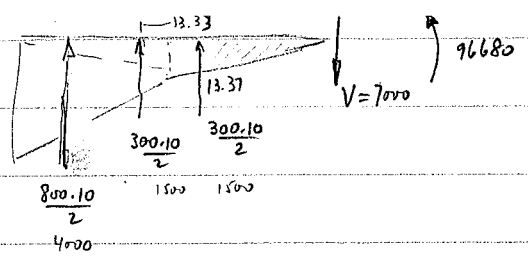
$$\delta_B = \delta_A + \frac{P_2 l_2}{2} \cdot l_2 \cdot \frac{2}{3} l_2 \qquad P_2$$



$$M = \frac{P_2(l_2 + l_1)\left[l_1 + l_2\right]^2}{6}\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{5 P_2 l^3}{12}$$

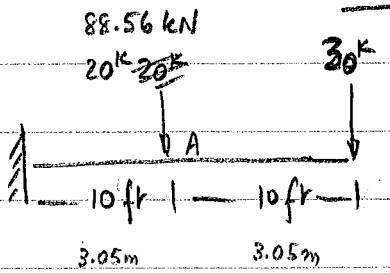
$$\frac{-q l^2}{12} = -P_1 l_1 (l_1 + l_2)^2$$



$\int \frac{M}{EI}$

$4000 \cdot 16.67 + 1500\,(13.33) + 1500\,(6.67)$

• מיצאו את היפוך והשקיעה בנקודה A לקורה מקומרת שנמצאת בקרבת לפי שיטת קורה צמודה



$E = 29\times10^6 \frac{lb}{in^2}$ 200 GPa

$I = 2000\ in^4$ $8.325\times10^{-4}\ m^4$

2.

$1lb = m \cdot 32.2\ ft/s^2$

$1N = m\cdot(kg)\cdot 9.81\ m/s^2$

$\frac{2.2\ lb}{1\ kg}$.

$4.428\ N = 1lb$

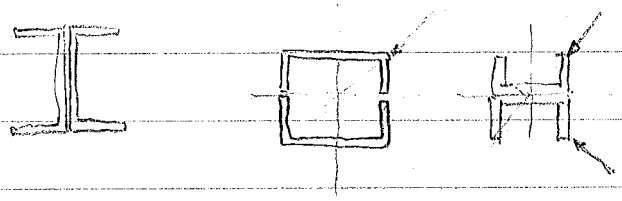
$\frac{29\times10^6\ lb}{1\ in^2} = \frac{128.412\times10^6\ N}{1\ m^2/(39.37)^2\ in^2}$

$= 200\ GPa$

$2000\ in^4 \cdot \left(\frac{2.54cm}{1in}\right)^4 = 83246.3\ cm^4$

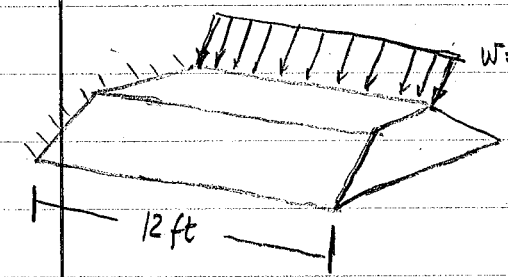
$\cdot \frac{1m}{100\ cm}$

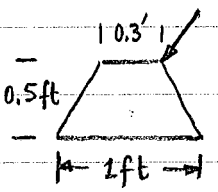
$= 8.325\times10^{-4}\ m^4$



• כוח מפורס, שקו פעולתו עובר מאמצע

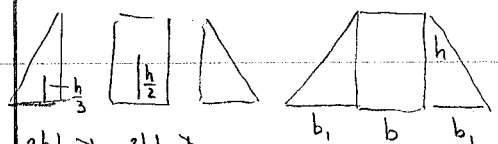
פועל על הקורה המקומרת, שווה ל $w = 5\ kip/ft$





דרך מרכז הכובד של שטח תמך

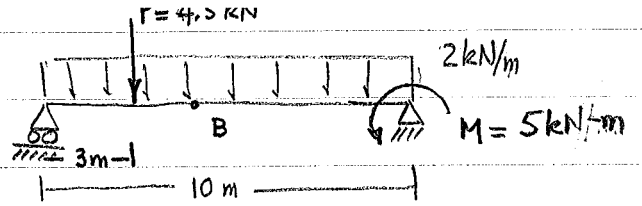
מיצאו את המאמץ המקסימלי שם תוכל הקורה הנ"ל פלדה ומודול אלסטיות $E = 29\times10^6\ psi$



$A = h\left(\frac{2b+2b_1}{2}\right) = h(b+b_1)$

$\bar{y} = \frac{\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}b_1h + \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{3}bh}{\quad}$

1. מיצאו מרכז הכובד,
2. מיצאו את המומנט אינרציה
3. מיצאו את הדפורמציה
4. מיצאו את מומנט מקסימלי.



לקורת המאזנות כמשוקע בקצה A מיצבו את הסקיצה ב- B 4-m מסמך נייד.

קבעו את התשובה בפונקציה של EI

13)



$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right) \qquad x/l = 0.4$$

18



$$y = \frac{M_o l x}{6EI}\left(1 - x^2/l^2\right) \qquad x/l = 0.4$$

12 $x/l = 0,4$



$$y = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(2\frac{x}{a} + x/b - \frac{x^3}{a^2b}\right) \qquad x = a$$

6-106 F_{AD} 2.47 kip T $F_{AB} = F_{AC} = F = 1.22$ kip C

המכללה האקדמית להנדסה בנגב ע"ר
Negev Academic College of Engineering (R.A)

המחלקה להנדסת בניין

Department of Building and Construction Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

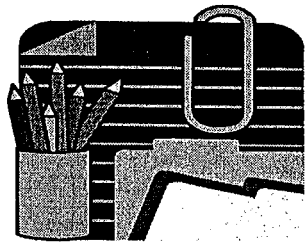
71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573 Fax. 07-6462264
בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100 פקס: טל:
web: www.nace.ac.il

מבחן סמס' א' - תשס"א

מועד ב'

קורס:	הנדסת בנין 10/99 + מודול 10/98
מקצוע:	חוזק חומרים 2
תאריך:	20.2 .ום
המרצה:	ד"ר אורי צדקה, פרופ' לוי עזרא
משך הבחינה:	3 שעות
הוראות לנבחן:	
חומרי עזר:	מותר כל חומר עזר.
שים לב:	כתיבה בעפרון ושימוש בטיפקס ימנעו הגשת ערעור על הבחינה

נא לכתוב בכתב יד ברור ומסודר



בהצלחה!

שאלה 1 (20%)

א. לתלה ולמצא את תחת העומס

בחתך פרופיל RHS 200/100/5

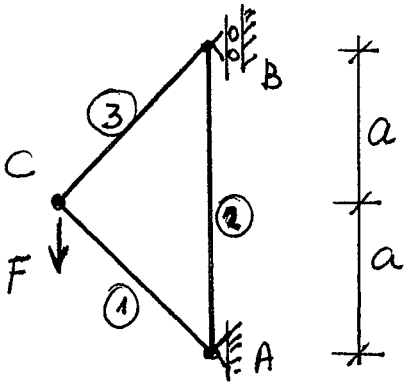
ב. נתונה הקורה שלהלן. כוחות הפנים המותרים בקורה:
מומנט הכפיפה המותר בקורה לסוגיו - 2 MPa.
על הקורה פועלים המאמצים הראשיים σ_1, σ_2 ו

פרוש: לתלה את הכח שיפעל על התבור בין שני הקורות, במרוחק מהברגים של הקורות אך כדאי, ומשתמש את הכח. לזרוק בצד התבור בנקודה D, מפעיל על הקורות כוח נמצא- בנקודה CD.

קבע את בצוע, נמצא כוחות על σ_1 פי בין שני הקורות בנקודה C. קורה ABC וקורה CD מחוברים לבצוע, כך שיפעלו ויתוכרו

שאלה 2 (25%)

שאלה 3 (30%)

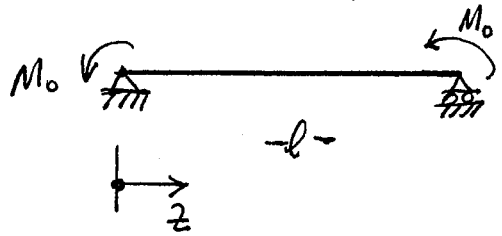


א. במסגרת המתוארת בתרשים,

$EA = const.$

דרוש: למצא את התזוזה האנכית של צומת C.

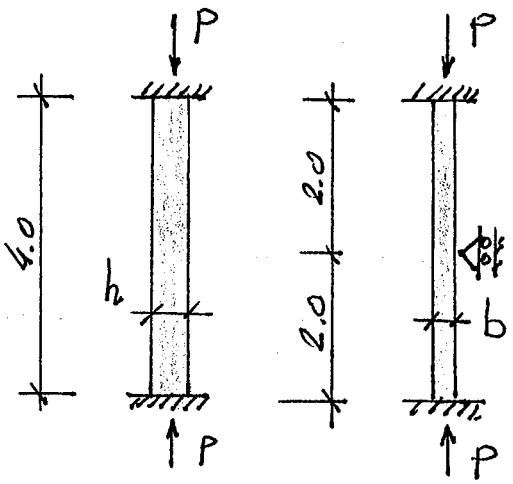
ב. קורה המתוארת בתרשים:



$EI = const.$

דרוש: למצא את השיפוע הקו האלסטי, ולמצא את השקיעה המכסימלית.

שאלה 4 (25%)



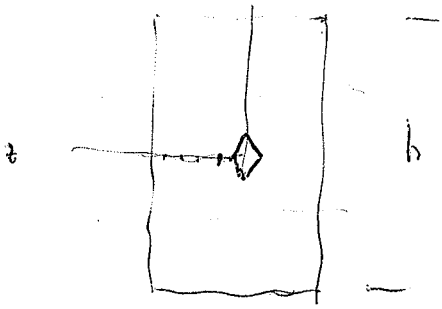
מוט מלבני בחתך b/h, שנוי בלפיה מיוצג לשאר כח לחיצה P. תנאי ההשענה בשני הכיוונים מתוארים בתרשים.

דרוש:

א. לקבוע את יחס הצלעות b/h, כך שבעמודה לקריסה בשני הכיוונים תהיה בהה

ב. למצא את מידות b,h הדרושות, עבור $P=100\ kN$, במקדם בטחון 2.

ג. למצא את מידות b,h הדרושות עבור $P=500\ kN$ במקדם בטחון 2.



$$-\frac{P}{bh} + \frac{P\cdot\frac{b}{2}z}{\frac{h\cdot b^3}{12}} + \frac{P\frac{h}{2}y}{\frac{bh^3}{12}} = 0$$

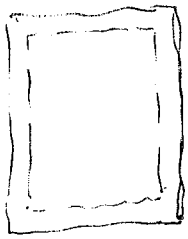
$$-1 + \frac{\frac{b}{2}z}{\frac{b}{6}\frac{b^2}{12}} + \frac{\frac{h}{2}y}{\frac{h^2}{12}\frac{h}{6}} = 0$$

$$-1 + \frac{z}{h/6} + \frac{y}{h/6} = 0$$

$A = 2bt + 2ht = 2t(b+h) = .29\times10^{-4}$

$I_{yy} = 2ht\cdot\frac{b^2}{4} + 2\frac{th^3}{12}$

$= \frac{tb^2}{2}\left[h + \frac{b}{3}\right] = .05114\times10^{-8}$



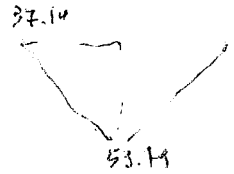
$I_{zz} = \frac{th^2}{2}\left[b + h/3\right] = 2bt\cdot\frac{h^2}{4} + 2\frac{th^3}{12} = .1521\times10^{-8}$

$\rho_z = \sqrt{\frac{I_{zz}}{A}} = 72.42$

$\rho_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} = 42 \quad \frac{\frac{1}{12}b^3}{12\cdot bt} = \frac{b}{12}$

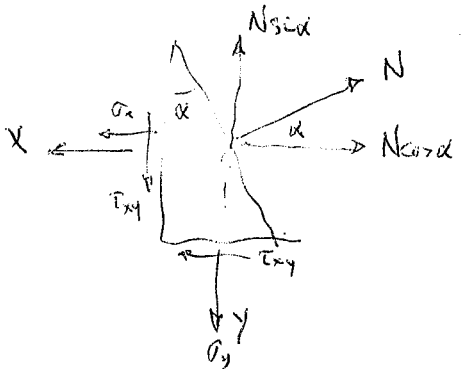
$$-1 + \frac{\frac{95}{2}\cdot z}{(42)^2} - \frac{\frac{195}{2}y}{(72.42)^2}$$

$$-1 + \frac{z}{37.14} + \frac{y}{53.79}$$



$$\frac{b}{6} = \frac{95}{6} \cong 16$$

$$\frac{h}{6} = \frac{195}{6} \cong 33$$



$\sigma_x \cdot A_x + \tau_{xy}\cdot A_y = N\cos\alpha$

$A_x = A\cos\alpha \quad A_y = A\sin\alpha$

$\sigma_x \cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha = \sigma_x'\cos\alpha$

$\sigma_y A_y + \tau_{xy}\cdot A_x = N\sin\alpha$

$\sigma_y \sin\alpha + \tau_{xy}\cos\alpha = \sigma_x'\sin\alpha$

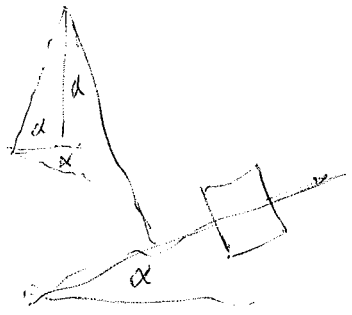
$\sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha = \sigma_x'$

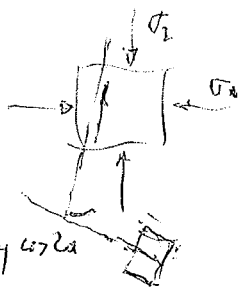
$\sigma_x\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + \sigma_y\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right) + \tau_{xy}\sin 2\alpha$

$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha = \sigma_x'$

$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \left[\quad\right] = \sigma_y'$

$-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha = \tau_{xy}'$





$\tau_{xy}' = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$

$|2| = -\left[-\sigma_1 - \frac{(-\sigma_2)}{2}\sin(-30)\right]$

$|2| = -\frac{\sigma_2+\sigma_1}{4} \qquad \delta = -\sigma_2 + \sigma_1$

$-\delta+\sigma_2 < \sigma_1 < \delta+\sigma_2$

המכללה האקדמית להנדסה בנגב ע"ר
Negev Academic College of Engineering (R.A)

המחלקה להנדסת בניין

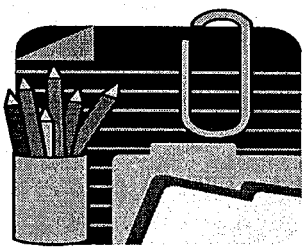
Department of Building and Construction Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

מבחן סמס' א' - תשס"א
מועד א'

קורס:	הנדסת בנין 10/99 + מודול 10/98
מקצוע:	חוזק חומרים 2
תאריך:	5.2.01
המרצה:	ד"ר אורי צדקה, פרופ' לוי עזרא
משך הבחינה:	3 שעות
הוראות לנבחן:	
חומרי עזר:	מותר כל חומר עזר.
שים לב:	כתיבה בעפרון ושימוש בטיפקס ימנעו הגשת ערעור על הבחינה

נא לכתוב בכתב יד ברור ומסודר



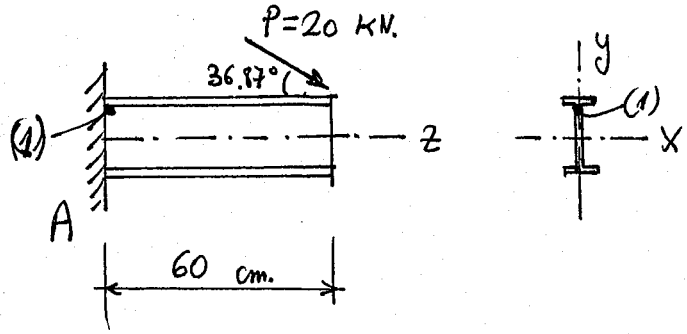
בהצלחה!

71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573:טל Fax. 07-6462264: בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100 פקס

חוזק חומרים 2

שאלה 1 (25%)

פרופיל INP200 רתום לסמך A ונושא עומס P=20KN, כמתואר בתרשים.



דרוש :

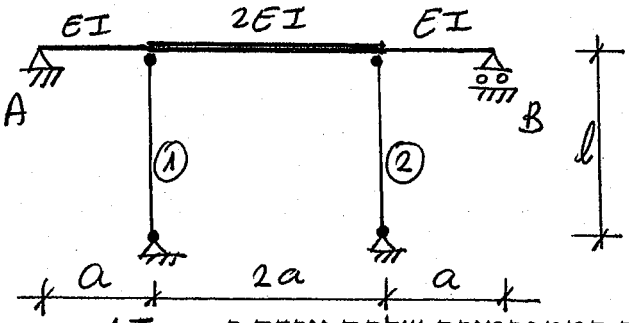
א. **לחשב ולתאר את המאמצים על קוביות חומר בנקודה (1).**

ב. **לחשב ולתאר את המאמצים הראשיים והמשורים עליהם הם פועלים, בנקודה (1).**

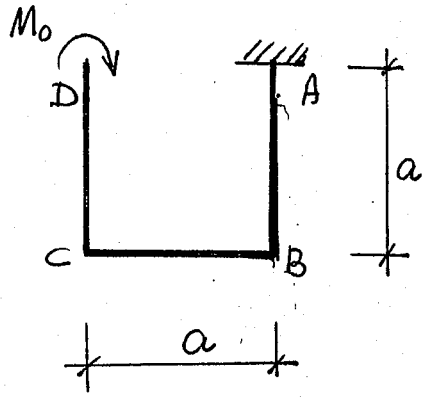
ג. **לחשב ולתאר את מאמץ הגזירה המכסימלי והמאמצים הנורמליים הנלווים אליו, והמישורים עליהם הם פועלים.**

שאלה 2 (25%)

קורה AB קשורה עם שני מוטות זהים 2,1 בעלי שטח חתך A מקדם התפשטות טרמי α ומודול אלסטיות E.



דרוש : לחשב את הכוחות ב מוטות 2,1 אם הטמפרטורה שלהם יורדת ב-



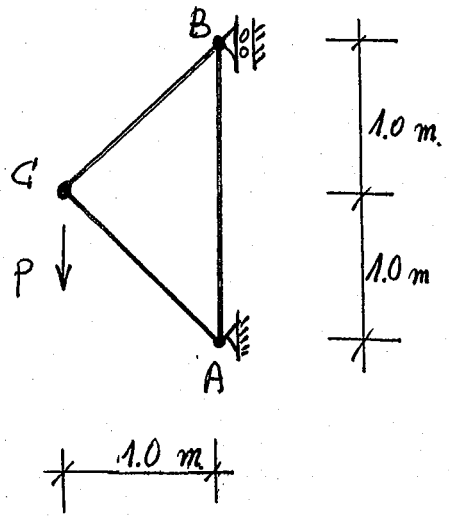
שאלה 3 (30%)

במערכת ABCD, EI=CONST

דרוש :

א. לחשב את התזוזה האופקית של נקודה D בשיטת קסטילאנו.

ב. לחשב את התזוזה האופקית של נקודה D לפי הטבלאות (סופרפוזיציה).



שאלה 4 (20%)

במסבך פלדה ABC, כל המוטות עגולים בקוטר 7.0 ס"מ

על המסבך פועל כח P בנקודה C

דרוש:

א. לחשב כח P קריטי

ב. לחשב כח P מותר כמקדם ביטחון 3.0

המכללה האקדמית להנדסה בנגב ע"ר
Negev Academic College of Engineering (R.A)

המחלקה להנדסת בניין

Department of Building and Construction Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

מבחן סמס' א' - תשס"א
מועד א'

קורס: הנדסת בנין 10/99 + מודול 10/98

מקצוע: חוזק חומרים 2

תאריך: 5.2.01

המרצה: ד"ר אורי צדקה, פרופ' לוי עזרא

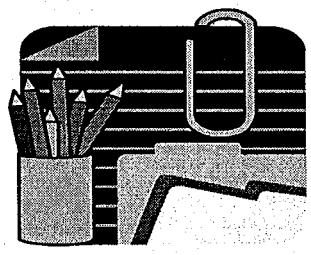
משך הבחינה: 3 שעות

הוראות לנבחן:

חומרי עזר: מותר כל חומר עזר.

שים לב: כתיבה בעפרון ושימוש בטיפקס ימנעו הגשת ערעור על הבחינה

נא לכתוב בכתב יד ברור ומסודר



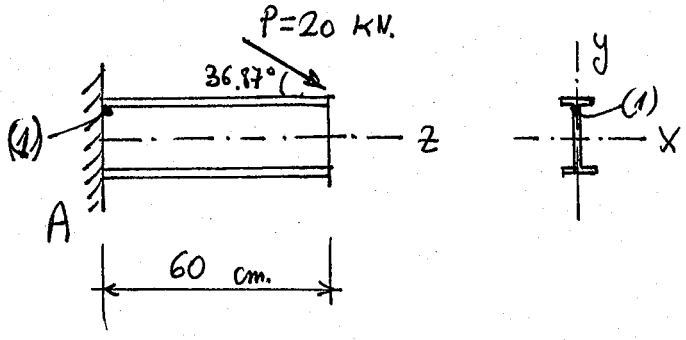
בהצלחה!

71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573:טל Fax. 07-6462264:פקס
בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100
web: www.nace.ac.il

חוזק חומרים 2

שאלה 1 (25%)

פרופיל INP200 רתום לסמך A ונושא עומס P=20KN, כמתואר בתרשים.



דרוש :

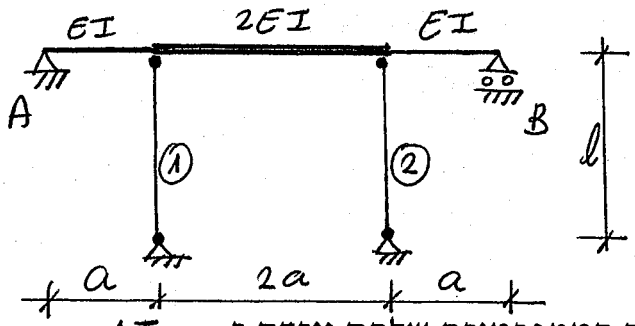
א. לחשב ולתאר את המאמצים על קוביות חומר בנקודה (1).

ב. לחשב ולתאר את המאמצים הראשיים והמשורים עליהם הם פועלים, בנקודה (1).

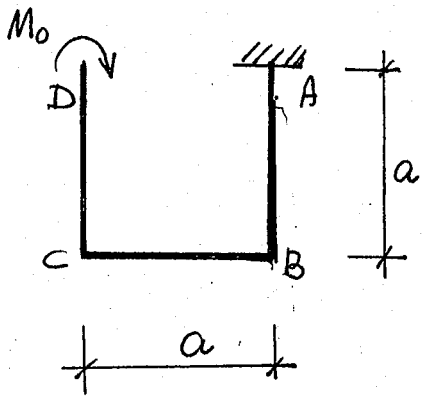
ג. לחשב ולתאר את מאמץ הגזירה המכסימלי והמאמצים הנורמליים הנלווים אליו, והמישורים עליהם הם פועלים.

שאלה 2 (25%)

קורה AB קשורה עם שני מוטות זהים 2,1 בעלי שטח חתך A מקדם התפשטות טרמי α ומודול אלסטיות E.



דרוש : לחשב את הכוחות במוטות 2,1 אם הטמפרטורה שלהם יורדת ב-



שאלה 3 (30%)

במערכת ABCD, EI=CONST

דרוש :

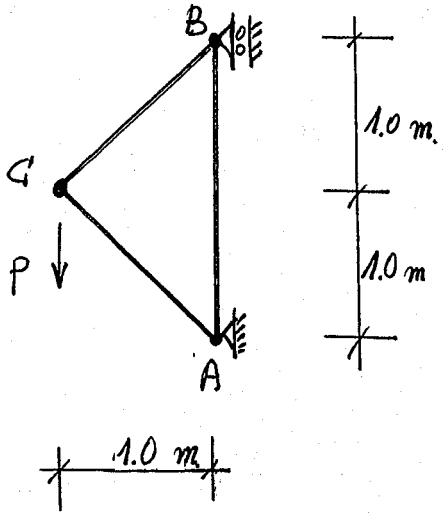
א. לחשב את התזוזה האופקית של נקודה D בשיטת קסטילאנו.

ב. לחשב את התזוזה האופקית של נקודה D לפי הטבלאות (סופרפוזיציה).

שאלה 4 (20%)

במסבך פלדה ABC, כל המוטות עגולים בקוטר 7.0 ס"מ

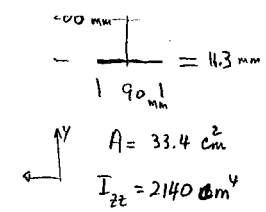
על המסבך פועל כח P בנקודה C



דרוש:

א. לחשב כח P קריטי

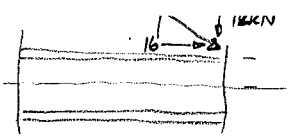
ב. לחשב כח P מותר כמקדם ביטחון 3.0

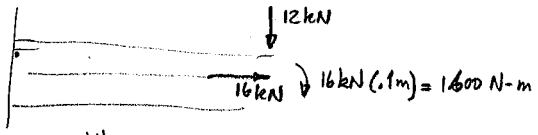


$A = 33.4\ cm^2$

$I_{zz} = 2140\ cm^4$

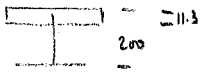
$I_{yy} = 117\ cm^4$





$M_z = 12\,kN(.6m) + 16\,kN(.1) = 8.8\,kN\text{-}m$ 2

$\bar{y}A = Q$



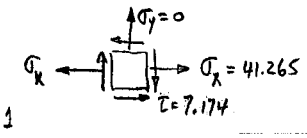
$\left(.1 - \frac{.0113}{2}\right)(0.09)(.0113)$

$9.595 \times 10^{-5}\ m^3$

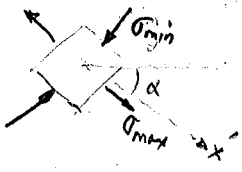
$\sigma_{(1)} = \frac{P}{A} + \frac{My}{I} = \frac{16000N}{33.4\times10^{-4}m^2} + \frac{(8800N\text{-}m)(.0887m)}{2140\times10^{-8}m^4}$ 1 2

$= 4.7904\,MPa + 36.4748\,MPa = 41.265\,MPa$ +

$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{(12000N)(9.595\times10^{-3}m^3)}{2.140\times10^{-8}m^4(0.0075m)} = 7.174\,MPa$ 2



1



$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2(7.174)}{41.265} = -.3477$

$2\alpha = -19.17°$ 2

$\alpha = -9.59°,\ 80.41°$

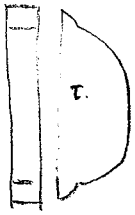
$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$

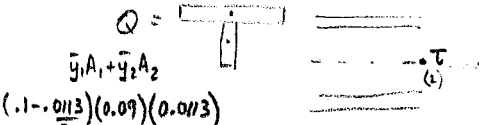
$= \frac{41.265}{2} \pm \left[\left(\frac{41.265}{2}\right)^2 + (7.174)^2\right]^{1/2}$

$\sigma_{max} = 42.48\,MPa$ 2

$\sigma_{min} = -1.21\,MPa$ 2

2





$\bar{y}_1A_1 + \bar{y}_2A_2$

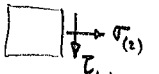
$\left(.1 - \frac{.0113}{2}\right)(0.09)(0.0113)$

$+ \left(.1 - \frac{.0113}{2}\right)(0.0075)(.1 - .0113)$

$= 1.2546\times10^{-4}\,m^3$

$\tau_{(2)} = \max \tau = \frac{VQ}{It} = \frac{12000N(1.2546\times10^{-4}m^3)}{2140\times10^{-8}m^4(0.0075m)}$

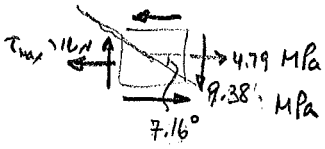
$= 9.38\,MPa$



$\sigma_{(2)} = \frac{P}{A} = \frac{16000N}{33.4\times10^{-4}m^2} = 4.79\,MPa$ 1

$\tan 2\alpha' = \frac{-(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} = \frac{-4.79}{23.172} = -0.2554 \Rightarrow 2\alpha = -14.33°$ 2

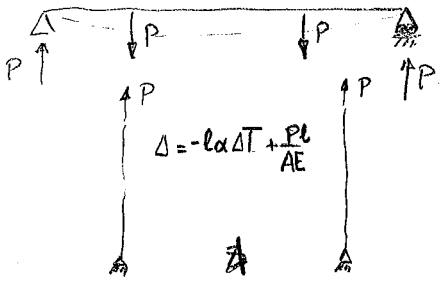
$\alpha = -7.16°$

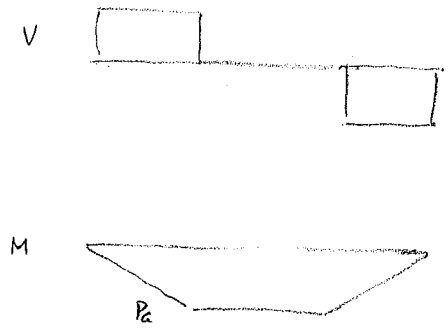


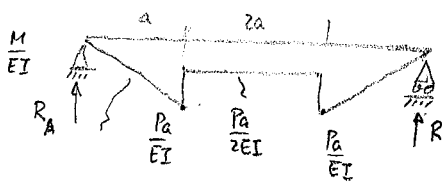
$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{4.79}{2}\right)^2 + (9.38)^2} = 9.68\,MPa$ 2

$\text{מרכז } \sigma = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{4.79}{2} = 2.39\,MPa$ 2







$$\frac{Pa}{EI}\cdot\frac{a}{2} + \frac{Pa}{2EI}\cdot 2a + \frac{Pa}{EI}\cdot\frac{a}{2} = R_A + R_B$$

$$R_A + R_B = \frac{2Pa^2}{EI}$$

$$R_A = R_B = \frac{Pa^2}{EI}$$



$$\Delta = +\frac{Pa^2}{EI}\cdot a + \frac{Pa}{EI}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3} = -\frac{5}{6}Pa^3 = -l\alpha|\Delta T| + \frac{Pl}{AE}$$

$$\left(\frac{5}{6}a^3 + \frac{l}{AE}\right)P = l\alpha|\Delta T|$$

$$P = \frac{l\alpha|\Delta T|}{\frac{5}{6}a^3 + \frac{l}{AE}}$$

$$(EI^*) = EI + EI\langle x-a\rangle^0 - EI\langle x-3a\rangle^0$$

$$EI^*v^{IV} = -P\langle x-a\rangle^{-1} - P\langle x-3a\rangle^{-1}$$

$$EI^*v''' = -P\langle x-a\rangle^0 - P\langle x-3a\rangle^0 + C_1$$

$$EI^*v'' = -P\langle x-a\rangle^1 - P\langle x-3a\rangle^1 + C_1x + C_2$$

$$EI^*v' = -\frac{P\langle x-a\rangle^2}{2} - \frac{P\langle x-3a\rangle^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$EI^*v = -\frac{P\langle x-a\rangle^3}{6} - \frac{P\langle x-3a\rangle^3}{6} + \frac{Px^3}{6} + C_3x + C_4$$

$$EI^*v = -\frac{P\langle x-a\rangle^3}{6} - \frac{P\langle x-3a\rangle^3}{6} + \frac{Px^3}{6} - \frac{9}{6}Pa^2x$$

$$v = \frac{1}{EI^*}\left[\frac{Pa^3}{6} - \frac{9}{6}Pa^3\right] = \frac{Pa^3}{EI}\left[-\frac{8}{6}\right]$$

$M=0 \text{ @ } x=0 \Rightarrow C_2 = 0$

$M=0 \text{ @ } x=4a \Rightarrow -P\cdot 3a - P\cdot a + C_1\cdot 4a = 0 \quad C_1 = P$

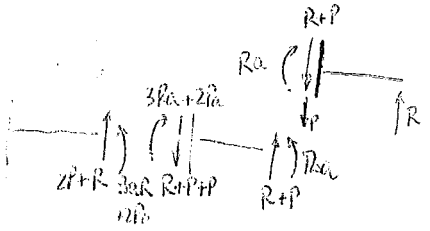
$v=0 \text{ @ } x=0 \Rightarrow C_4 = 0$

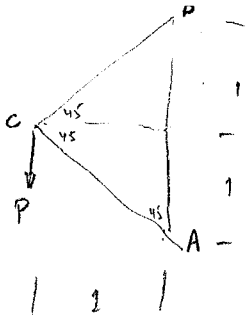
$v=0 \text{ @ } x=4a \Rightarrow -P\cdot\frac{9}{6}a^3 - \frac{Pa^3}{6} + \frac{44}{6}Pa^3 + C_3\cdot 4a = 0$

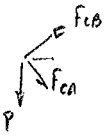
$\frac{36}{6}Pa^3$

$6Pa^2 + C_3\cdot 4a = 0$

$C_3 = -\frac{3}{2}Pa^2$







$F_{CB}\cos 45 + F_{CA}\cos 45 = 0$

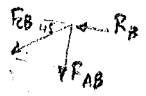
$F_{CB}\sin 45 - F_{CA}\sin 45 - P = 0$

$F_{CA} = -F_{CB}$

$2F_{CB}\sin 45 = P$

$F_{CB} = \frac{P}{\sqrt{2}} = .707P$

$F_{CA} = -.707P$



$F_{CB}\cos 45° + R_B = 0$

$F_{CB}\sin 45 + F_{AB} = 0$

$F_{AB} = -\frac{P}{2}$

T

$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

206 GPa

$F_{AB} = +\frac{P}{2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = P_{cr}$ $\quad P = \frac{2\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow P = \frac{\pi^2 EI}{2^2} = 0.5\pi^2 EI$ AB - N

$F_{BC} = +.707P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = P_{cr} \rightarrow P = \frac{\pi^2 EI}{.707L^2} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 EI}{L^2} \rightarrow P = \frac{\pi^2 EI}{\sqrt{2}} = .707\pi^2 EI$ BC - N

$= 1.694$ MN

$P_{cri} = 0.5\pi^2 EI$

$F_{CB} = .707P$

$\sigma_{yp} = \frac{.707P}{A}$

$\sigma_{cr} = \frac{0.5\pi^2 E(\pi D^4/4)}{\pi D^2}$

$\sigma_{cr} = \frac{0.5\pi^2 E D^2}{4}$

$\sigma_{cr} = \frac{\sqrt{2}\pi^2 E}{(L/D)^2}$

$I = \frac{\pi D^4}{4} = 117.8\ cm^4$

$I = i^2 A \Rightarrow \frac{\pi D^4}{4} = i^2 \cdot \pi D^2$ $\quad i = \frac{D}{2} = \frac{d}{4}$

$L/D = \frac{\sqrt{2}}{(0.035)/2} = 80.8$ AC - ✓

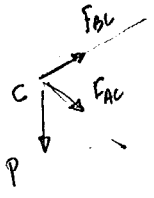
$\frac{L}{D} = \frac{2}{(.035)/2} = 114.3$ AB - ✓

$A = \pi D^2 = 3.8485 \times 10^{-3}\ m^2 = 38.485\ cm^2$

$\sim 400\ kN = \frac{1198\ kN}{3} = \frac{P}{3} = 2AIN\ P$

$\sim 40{,}000\ kg$

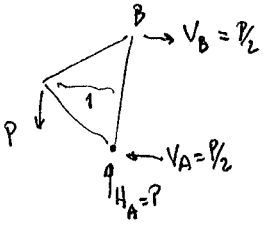
310 -

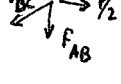


$F_{BC} = -F_{AC}$

$P + F_{AC}\sin 45 - F_{BC}\sin 45 = 0$

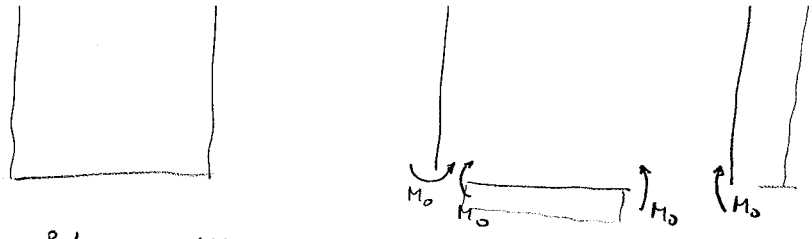
$P - 2F_{BC}\sin 45 = 0$ $\quad F_{BC} = \frac{P}{2\sin 45} = \frac{P\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{\sqrt{2}}$ $\quad F_{AC} = -\frac{P}{\sqrt{2}}$

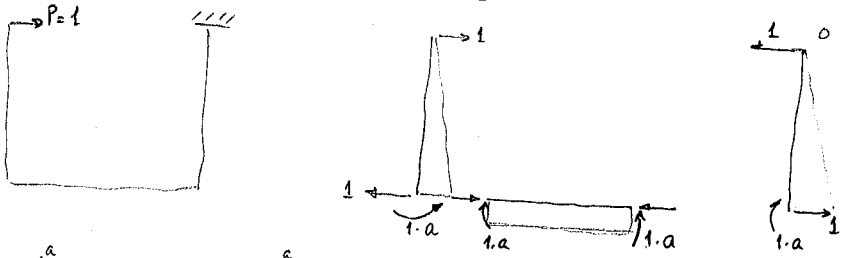




$F_{BC}\cos 45 + F_{AB} = 0$

$-\frac{P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = F_{AB} = -\frac{P}{2}$

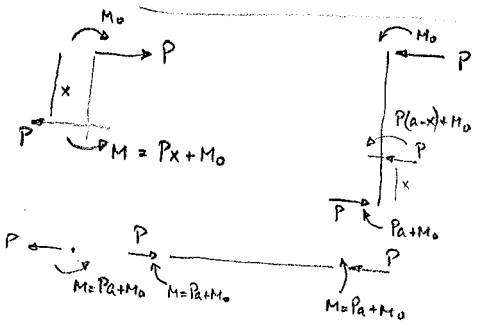




$$\int_0^a \frac{M_0 \cdot x\,dx}{EI} + \int_0^a \frac{M_0 \cdot a\,dx}{EI} + \int_0^a \frac{M_0(-x+a)\,dx}{EI}$$

$$\frac{M_0 x^2}{2EI}\Big|_0^a + \frac{M_0 a}{EI}x\Big|_0^a + \frac{-M_0(a-x)^2}{2EI}\Big|_0^a$$

$$\frac{M_0 a^2}{2EI} + \frac{M_0 a^2}{EI} + \frac{M_0 a^2}{2EI} = \frac{2M_0 a^2}{EI}$$



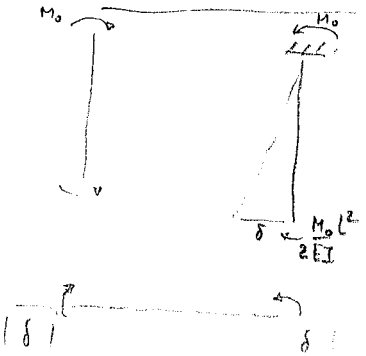
$$U_c = \int \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^a \frac{(Px+M_0)^2}{2EI}dx + \int_0^a \frac{(Pa+M_0)^2}{2EI}dx + \int_0^a \frac{[P(a-x)+M_0]^2}{2EI}dx$$

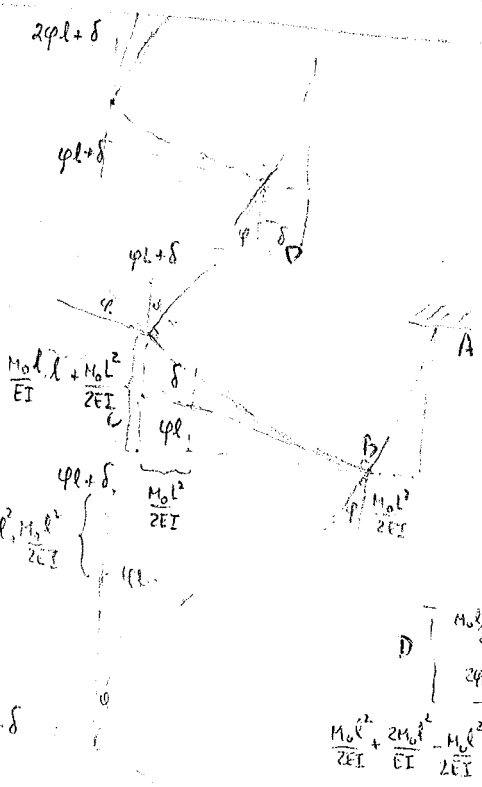
$$\frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^a \frac{(Px+M_0)x}{EI}dx + \int_0^a \frac{(Pa+M_0)a}{EI}dx + \int_0^a \frac{[P(a-x)+M_0](a-x)}{EI}dx$$

$$\lim_{P\to 0}\frac{\partial U_c}{\partial P} = \int_0^a \frac{M_0 x\,dx}{EI} + \int_0^a \frac{M_0 a\,dx}{EI} + \int_0^a \frac{M_0(a-x)}{EI}dx$$

$$= \frac{M_0}{EI}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a + \frac{M_0 a x}{EI}\Big|_0^a + \frac{-M_0(a-x)^2}{2EI}\Big|_0^a$$

$$= \frac{M_0 a^2}{2EI} + \frac{M_0 a^2}{EI} + \frac{M_0 a^2}{2EI} = \frac{2M_0 a^2}{EI}$$







$$EIv^{IV} = -M_0\langle x-l\rangle^{-2}$$

$$EIv''' = -M_0\langle x-l\rangle^{-1} + C_1 V = 0$$

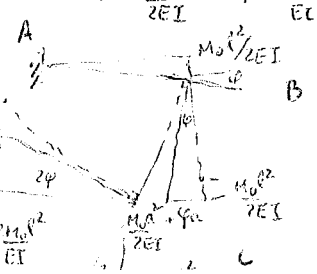
$$EIv'' = -M_0\langle x-l\rangle^{0} + C_2 - M_0$$

$$EIv' = -M_0\langle x-l\rangle^{1} + M_0 x + C_3$$

$$EIv = -\frac{M_0\langle x-l\rangle^2}{2} + M_0\frac{x^2}{2} + C_3$$

$$v = \frac{M_0 x^2}{2EI}$$

$$v = \frac{M_0 l^2}{2EI} \qquad \varphi = \frac{M_0 l}{EI}$$



$$\frac{M_0 l^2}{2EI} + \frac{2M_0 l^2}{EI} - \frac{M_0 l^2}{2EI} = \frac{2M_0 l^2}{EI}$$

המכללה האקדמית להנדסה בנגב ע"ר
Negev Academic College of Engineering (R.A)

המחלקה להנדסת בניין

Department of Building and Construction Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

מבחן סמס' א' - תשס"א
מועד ב'

קורס: הנדסת בנין 10/99 + מודול 10/98

מקצוע: חוזק חומרים 2

תאריך: 20.2.01

המרצה: ד"ר אורי צדקה, פרופ' לוי עזרא

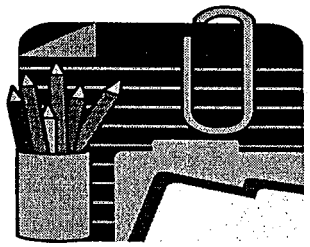
משך הבחינה: 3 שעות

הוראות לנבחן:

חומרי עזר: מותר כל חומר עזר.

שים לב: כתיבה בעפרון ושימוש בטיפקס ימנעו הגשת ערעור על הבחינה

נא לכתוב בכתב יד ברור ומסודר



בהצלחה!

71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel: 07-6462573 Fax. 07-6462264
בזל 71, ת.ד. 45 באר שבע 84100 טל: 07-6462573 פקס: 07-6462264

שאלה 1 (20%)

א. יש לחשב ולשרטט את תחום הגרעין בחתך בריבוע RHS 200/100/5

ב. נתונה קביעה של כוחות פנימיים בחלוקה.
מאחת הצורות המוצגות בשקף לסוגיה - עמוד 2.
על הקביעה בוצעו המחקים לסוגיה σ_1, σ_2!

פרוש: יש לחשב את הכוח שיפעל על התבור בין שני הקורות, המשתמש את הכוח המרוכז מתבטא את הקורה אך כאן, ומשתמש את הכוח בנקודה C.

יש לרשום בצורה התבור בנקודה C, מפעיל על הקורה כוח נסתר- בנקודה CD.

קורה ABC וקורה CD יוצגו יבצוע, כך שיפעלו ויתוכרו

$EI = 1 \text{ MN-m}^2$

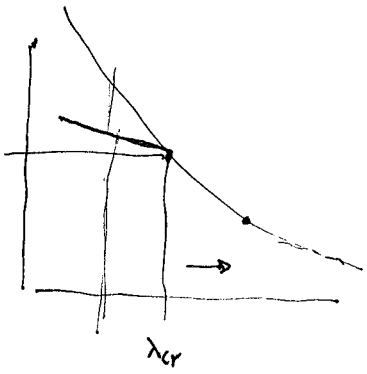
$EI = 1 \times 10^6 \text{ N-m}^2$

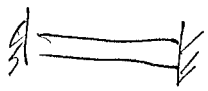
$\frac{.03}{4} \times 10^6 \frac{\text{N-m}^3}{\text{m}^3}$

$.75 \times 10^4$ 7500 N

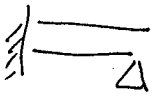
שאלה 2 (25%)

$\frac{P}{A} = \sigma_{cr}$





$$\frac{4\pi^2 E I_1}{L_1^2} = \frac{2.07\pi^2 E I_2}{L_2^2}$$



$h, b \rightarrow \lambda_i = \frac{L_i}{\sqrt{I_i/A}}$

$\lambda_{cr} \leftarrow \frac{4\pi^2 E I_1}{L_1^2 . A} = \sigma_{cr} =$

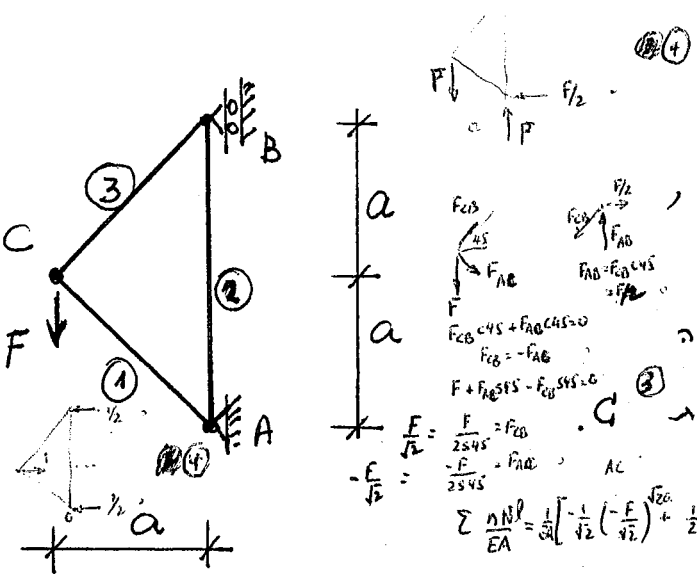
$$\frac{4\pi^2 E}{(L_1/\rho)^2}$$

שאלה 3 (30%)

א. בהסתכל המערכת הבאה, כאשר

$EA = const.$

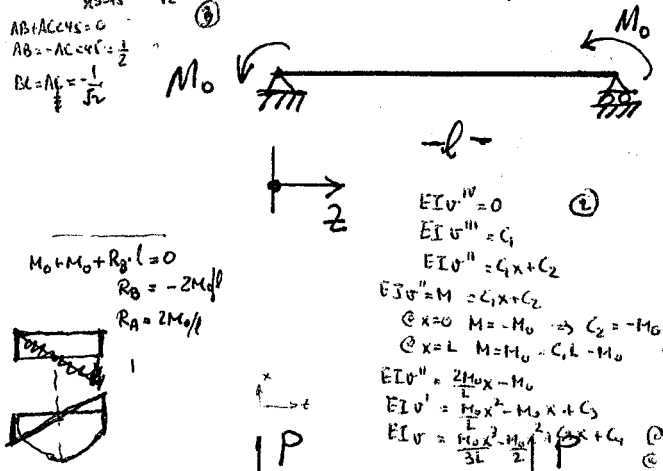
נדרש: לחשב את התזוזה האנכית של צומת C.



ב. בקורה המתוארת בתרשים,

$EI = const.$

נדרש: למצוא את שלוש הקבועים הבלתי תלויים הנ"ל.



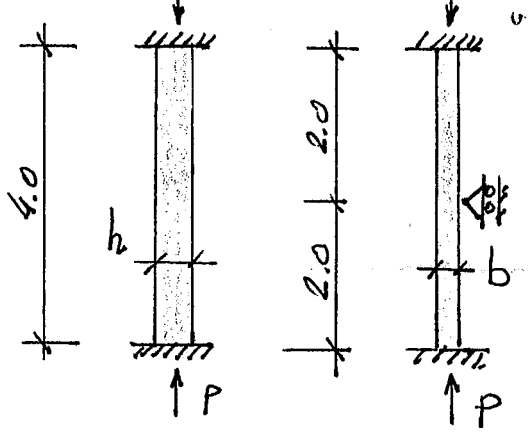
שאלה 4 (25%)

מוט מלבני בחתך q/h, שווי

בדה, מיוצב לשאת כח לחיצה P.

מתוארים בתרשים

שתי ההשענות בשני הכיוונים



נדרש:

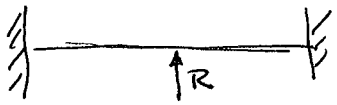
א. לקבוע את ימס הבלעה q/h, כך שבעמודה לקיים

ב. לחשב את מינימום q/h הנדרש, עבור $P = 100\ kN$,

בהקפה כיתון 2.

ג. לחשב את המידות q/h הנדרש עבור $P = 500\ kN$

בהקפה כיתון 2.



$$EIv^{IV} + Pv'' = R\langle x-a\rangle^{-1}$$

$$(EIv'' + Pv)' = R\langle x-a\rangle^{0} + C_1$$

$$EIv'' + Pv = R\langle x-a\rangle^{1} + C_1 x + C_2$$

$$v'' + \lambda^2 v = \frac{R}{EI}\langle x-a\rangle^{1} + \frac{C_1}{EI}x + \frac{C_2}{EI}$$

$$v = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + \frac{R}{EI\lambda^2}\langle x-a\rangle^{1} + \frac{C_1}{EI\lambda^2}x + \frac{C_2}{\lambda^2 EI}$$

$$v' = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x + \frac{R}{EI\lambda^2}\langle x-a\rangle^{0} + \frac{C_1}{EI\lambda^2}$$

$$v|_{x=0} = 0 \quad A + \frac{C_2}{\lambda^2 EI} = 0 \qquad C_2 = -A\lambda^2 EI$$

$$v'|_{x=0} = 0 \quad B\lambda + \frac{C_1}{EI\lambda^2} = 0 \qquad C_1 = -B\lambda^3 EI$$

$$v = A[\cos\lambda x - 1] + B[\sin\lambda x - \lambda x] + \frac{R}{EI\lambda^2}\langle x-a\rangle^{1}$$

$$v' = A[-\lambda\sin\lambda x] + B[\lambda\cos\lambda x - \lambda] + \frac{R}{EI\lambda^2}\langle x-a\rangle^{0}$$

$$v|_{x=L} = 0 = A[\cos\lambda L - 1] + B[\sin\lambda L - \lambda L] + \frac{R}{EI\lambda^2}\cdot\frac{L}{2}$$

$$v'|_{x=L} = 0 = A[-\lambda\sin\lambda L] + B\lambda[\cos\lambda L - 1] + \frac{R}{EI\lambda^2}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\lambda L - 1 & \sin\lambda L - \lambda L \\ -\lambda\sin\lambda L & \lambda\cos\lambda L - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} L/2 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{R}{EI\lambda^2}$$

$$v=0|_{x=L/2} = A\left(\cos\frac{\lambda L}{2} - 1\right) + B\left(\sin\frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2}\right)$$

$v'|_L = 0$, $v'|_{L=0}$, $v|_{L/2=0}$

$$\begin{bmatrix} \cos\lambda L - 1 & \sin\lambda L - \lambda L & \frac{L}{2\lambda^2} \\ -\lambda\sin\lambda L & \lambda\cos\lambda L - \lambda & \frac{1}{2\lambda^2} \\ \cos\frac{\lambda L}{2} - 1 & \sin\frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \\ \frac{R}{EI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\cos\lambda L - 1)\cos\lambda L - 1 \cdot 0 + (\sin\lambda L - \lambda L)\cdot\frac{1}{2\lambda^2}\left(\cos\frac{\lambda L}{2} - 1\right) + \frac{1}{2\lambda^2}\frac{L}{2}(-\lambda\sin\lambda L)\left(\sin\frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2}\right) - \frac{L}{2\lambda^2}(\lambda\cos\lambda L - \lambda)\left(\cos\frac{\lambda L}{2} - 1\right) - 0$$

$$-2(\cos\lambda L - 1)\left(\sin\frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\lambda^2} = 0$$

$$2\sin\frac{\lambda L}{2}\cos\frac{\lambda L}{2} - \sin\lambda L - 2\lambda L\cos\frac{\lambda L}{2} + 2\lambda L - \lambda L\sin\lambda L\sin\frac{\lambda L}{2} + \frac{\lambda^2 L^2}{2}\sin\lambda L$$

$$-2\cos\lambda L\sin\frac{\lambda L}{2} + 2\lambda L\cos\lambda L - \lambda L\cos\lambda L\cos\frac{\lambda L}{2} + \lambda L\cos\lambda L + \lambda L\cos\frac{\lambda L}{2}$$

$$2\left[\sin\frac{\lambda L}{2}\right] + 2\sin\frac{\lambda L}{2} - \lambda L\left[\cos\frac{\lambda L}{2}\right]$$

$$4\left[\sin\frac{\lambda L}{2}\right] - 2\sin\lambda L - 2\lambda L\cos\frac{\lambda L}{2} + 2\lambda L\cos\lambda L + \frac{\lambda^2 L^2}{2}\sin\lambda L$$

INDEX

composition of forces — הרכבת (חיבור) כוחות 29, 36
couple of forces — זוג כוחות 77, 221
arm of a f. — זרוע של כ' 67
coplaner forces — כוחות מישוריים 109
parallel forces — כוחות מקבילים 67, 257
spatial force — כוחות מרחביים 199
concurrent forces — כוחות משותפי־נקודה 29
component of a f. — כ' רכיב 34
resultant f., resultant — כ' שקול, שקול 14, 43
moment of a f. — מומנט של כ' 67, 225
polygon of force — מצולע הכוחות 36, 199
parallelogram of forces — מקבילית הכוחות 17
triangle of forces — משולש הכוחות 17
moment — מומנט
resultant m. vector — מ' ראשי 110, 230
m. of a couple — מ' של זוג כוחות 77
m. of a force — מ' של כוח 67, 225
resultant m. — מ' שקול 82
classical mechanics — מכניקה; מ' קלאסית 12
cross (vector) product — מכפלה וקטורית 381
scalar (dot) product — מכפלה סקלארית 381
lever — מנוף 67
truss — מסבך 169
distributed load — מפורס; עומס מ' 89
polygon — מצולע
funicular p. — מ' החבל 163
p. of forces — מ' הכוחות 36, 199
centre of gravity, centroid — מרכז הכובד
c. of a volume — מה"כ של נפח 262, 266
c. of the volume of a hemisphere — מה"כ של נפח חצי־כדור 279
c. of the volume of a pyramid — מה"כ של נפח פירמידה 276, 277
c. of the volume of a cone — מה"כ של נפח קונוס 276, 277
c. of a line — מה"כ של קו 264, 267
c. of a circular arc — מה"כ של קשת המעגל 272, 273
c. of an area — מה"כ של שטח 263, 267
c. of the area of a trapezoid — מה"כ של שטח טרפז 270

homogeneous body — יד; גוף א' 262, 266
point of application — ויה; נקודת א' 29
rigid body — ; ג' קשיח 11, 14
rolling friction — לגולי; חיכוך ג' 324
pulley block — גלת 88, 89
gravitation — ביטציה 262
Maxwell diagram — אגרמה; דיאגרמת מקסוול 177
dynamics — נמיקה 11
degree of freedom — גת חופש 24
projection — טל 42
translation — צתקה 15
resolution of forces — פרדה; הפרדת כוחות 34
composition of forces — רכבה; הרכבת (חיבור) כוחות 29, 36
vector — קטור
free v. — ר' חופשי 372
unit v. — ר"יחידה 378
moment v. — ר"מומנט 221
fixed v. — ר' צמוד 372
resultant force v. — ר' ראשי 110, 230
radius v. — רדיוס־ר' 387
vectors — קטורים
addition of v. — חיבור ר' 374
subtraction of v. — חיסור ר' 374
couple of forces — וג כוחות 77, 221
c. in space — ז"כ במרחב 221
arm of a force — רוע של כוח 67
funicular polygon — חבל; מצולע הח' 163
friction — יכוך
angle of f. — זוית הח' 319
rolling f. — ח' גילגולי 324
sliding f. — ח' החלקה 317
static f. — ח' סטטי 318
kinetic f. — ח' קינטי 318
coefficient of f. — מקדם הח' 319
cone of f. — קונוס הח' 319
Newton's laws — חוק: חוקי ניוטון 15
centre of gravity, centroid — כובד; מרכז הכ' 257

c. of the area of a triangle	מה״כ של שטח משולש 268, 269
c. of the area of a circular sector	מה״כ של שטח גזרה כצגלית 275,274
centre of parallel forces	מרכז כוחות מקבילים 257
inclined plane	משופע: מישור מ׳ 322
theorem	משפט
theorems of Goldin-Pappus	משפטי גולדין־פאפוס 280
principle of moments	מ׳ המומנטים 69, 76
Varignon's t.	מ׳ וריניון 69
t. of three forces	מ׳ על שלושה כוחות 38
specific gravity (weight)	משקל; מ׳ סגולי 262
Newton	ניוטון 13, 15
point	נקודה
p. of application	נקודת אחיזה 29
particle	נ׳ חומרית, חלקיק 14
statics	סטטיקה
graphical s.	ס׳ גראפית 163
virtual work	עבודה וירטואלית 349
support	סמך
movable s.	ס׳ נייד 18
immovable s.	ס׳ נייח 21
built-in s.	ס׳ מקובע 22
scalar	סקלאר 371
axis	ציר
system of axes	מערכת צירים 42
a. of rotation	צ׳ סיבוב 239
line of action	קו; ק׳ פעולה 13
system of coordinates	קואורדינטה; מערכת קואורדינטות 42
kinetics	קינטיקה 11
kinematics	קינמטיקה 11
rigid body	קשיח; גוף ק׳ 14,11
origin	ראשית 42
radius vector	רדיוס־וקטור 387
component	רכיב 34
equilibrium	שיווי־משקל
neutral e.	ש״מ אדיש 283
stable e.	ש״מ יציב 283
unstable e.	ש״מ רופף 283
e. for couples	ש״מ של זוגות כוחות 85
e. for coplaner concurrent forces	ש״מ של כוחות מישוריים משותפי־נקודה 44
e. for parallel forces in space	ש״מ של כוחות מרחביים מקבילים 237
e. for concurrent forces in space	ש״מ של כוחות מרחביים משותפי־נקודה 236
e. for a space system of forces	ש״מ של מערכת כוחות מרחביים 235
hod	שיטה
n. of joints	שיטת הצומת (לפתרון מסבכים) 172
n. of sections	שיטת חיתוך המסבך 180
ltant	שקול
. force	כוח ש׳ 14, 43
. moment	מומנט ש׳ 82
tion	תגובה, ריאקציה 18
ivity theory	תורה; תורת היחסות 12
ıal displacement	תזחה וירטואלית 349
hanical motion	תנועה; ת׳ מכנית 11

of a triangle
c. of the area
circular sector
centre of parallel forces
inclined plane
theorem
theorems of Goldin-Pappus
principle of moments
Varignon's t.
t. of three forces
specific gravity (weight)
Newton
point
p. of application
particle
statics
graphical s.
virtual work
support
movable s.
immovable s.
built-in s.
scalar
axis
system of axes
a. of rotation
line of action
system of coordinates
kinetics
kinematics
rigid body
origin
radius vector
component
equilibrium
neutral e.
stable e.
unstable e.
e. for couples
e. for coplaner forces
e. for coplaner
parallel forces

מה"כ של שטח גיזרה מעגלית 275,274
מרכז כוחות מקבילים 257
משופע: מישור מ' 322
משפט
משפטי גולדין־פאפוס 280
מ' המומנטים 69, 76
מ' ואריניון 69
מ' על שלושה כוחות 38
משקל; מ' סגולי 262
ניוטון 13, 15
נקודה
נקודת אחיזה 29
נ' חומרית, חלקיק 14
סטטיקה
ס' גראפית 163
עבודה וירטואלית 349
סמך
ס' נייד 18
ס' נייח 21
ס' מקובע 22
סקלאר 371
ציר
מערכת צירים 42
צ' סיבוב 239
קו; ק' פעולה 13
קואורדינטה; מערכת קואורדינטות 42
קינטיקה 11
קינמטיקה 11
קשיח; גוף ק' 14,11
ראשית 42
רדיוס־וקטור 387
רכיב 34
שיווי־משקל
ש"מ אדיש 283
ש"מ יציב 283
ש"מ רופף 283
ש"מ של זוגות כוחות 85
ש"מ של כוחות מישוריים 114
ש"מ של כוחות מישוריים מקבילים 85
ש"מ של כוחות מרחביים
מקבילים 7
ש"מ של כוחות מרחביים משותפי־נקודה 236
ש"מ של מערכת כוחות מרחביים 235
שיטה
שיטת הצומת (לפתרון מסבכים) 172
שיטת חיתוך המסבך 180
שקול
כוח ש' 14, 43
מומנט ש' 82
תגובה, ריאקציה 18
תורה; תורת היחסות 12
תזוזה וירטואלית 349
תנועה; ת' מכנית 11

e. for parallel forces
in space
e. for concurrent forces
in space
e. for a space system
of forces
method
m. of joints
m. of sections
resultant
r. force
r. moment
reaction
relativity theory
virtual displacement
mechanical motion

זכאן שמומנט הסיבוב לגבי הציר C יהיה:

$$M_1 = m_1 r \omega^2 L \sin(\omega t)$$

אנו רואים שמומנט זה משתנה בהתאם לחוק התנודות ההרמוניות. מכאן שכל המערכת המתוארת בציור מהווה לעצמה מערכת מכנית הנתונה לתנודות הרמוניות. אמפליטודת התנודות תהיה פרופורציונית למסה m_1. אם נצליח בשיטה כלשהי למדוד את אמפליטודת התנודות ונקבע את מקדם הפרופורציוניות שבין האמפליטודה לבין המסה m_1 נוכל למצוא גם את m_1.

המתקן המתואר בציור 5-20 הינו מתקן אלמנטרי ביותר. מדידת האמפליטודה במתקן זה נעשית ע"י המחוג מ'. כאשר הנדנדה נמצאת במצב העליון ביותר עושים שימון על הגוף המאפשר למצוא את מצבה של המסה הבלתי מאוזנת.

לאחר הגדרת הגודל והכצב של המסה m_1 יש לקבוע את הגוף שנית, כך שהמישור העובר דרך הציר C. תחרים על כל התהליך ומוצאים את גודלה ואת מיקומה של המסה m_2.

לצורך בביצוע איזון בשני שלבים, כשכל שלב נעשה בתנוחה אחרת של הגוף, שהווה חסרון נוסף של המתקן האמור.

היום קיימים מתקנים משוכללים ביותר המאפשרים איזון מלא של גופים בתנוחה אחת. מתקנים אלה מצוידים במכשירים אלקטרוניים המבצעים את כל החישובים הקובצים, לפי התוצאות, את שיעורן ומיקומן של המסות הדרושות להשגת האיזון המבוקש.

הבעיה מסובכת יותר מהווה האיזון של חלקים הנעים בקו ישר. בספר זה לא נדון בשיטות איזון של חלקים כאלה, אולם, ראוי לציין, שגם במקרים אלה נעשה האיזון על-ידי הוספת משקלות איזון.

מפתח מונחים (מילון עברי-אנגלי)

INDEX

	איזון
balancing	א' בתנועה סיבובית 394
b. in rotation	א' דינמי 398
dynamic b.	א' מנגנונים ומכונות 394
b. of mechanisms and machines	א' סטטי 397
static b.	אימפולס, מתקף, תקיפה 226, 170, 166
impulse	אינרציה (ראה התמד)
inertia	אי־קציבות המהירות 389
fluctuation of speed	אלכסונית; נגיפה א' (מלוכסנת) 254
oblique impact	אלסטי
elastic	אנרגיה אלסטית 201
e. energy	כוח א' 196
e. force	נגיפה אלסטית 254
e. impact	אמפליטודה, תנופה 269
amplitude	אנרגיה
energy	א' אלסטית 201
elastic e.	א' פוטנציאלית 200
potential e.	א' קינטית 232, 207
kinetic e.	אקסצנטרי, נגיפה אקסצנטרית 254
eccentric impact	ארכובה 304
crank	בורג; מעלת הב' 152
thread pitch	בורגי
helical, screw	זוג קינמטי ב' 379, 302
s. pair	קו ב' 131
s. line	תנועה בורגית 131
s. motion	גבוה; זוג קינמטי ג' 300
higher pair	גוף
body	ג' גמיש 253
elastic b.	ג' חופשי 299
free b.	ג' פלסטי 253
plastic b.	ג' קשיח 58
rigid b.	גלגל השמש 344
sun gear	גלגל תנופה 390
flywheel	גלילי; זוג קינמטי ב' 301
cylindrical pair	גמיש; גוף ג' 253
elastic body	ד'אלמבר; עיקרון ד' 164, 220
D'Alembert's principle	דיאגרמה, גרף
diagrame	ד' דרך-זמן 30
displacement-time d.	ד' מהירות-זמן 32
velocity-time d.	ד' תאוצה-זמן 37
acceleration-time d.	דינמי
dynamic	איזון ד' 398
d. balancing	מומנט התמד ד' 221
d. moment of inertia	שיווי משקל ד' 164
d. equilibrium	דיפרנציאלי; מנגנון ד' 347
differential gear	

t. force — כוח מ' 162
t. inertia force — כוח התמד מ' 220
t. acceleration — תאוצה טנגנטית 22,103,162
SI system — יחידות; מערכת יחידות בינלאומית (מב"ל) 17
system of units — יחידות מידה; מערכת י"מ 17,149
relative — יחסית
r. velocity — מהירות י' 76,119,125
r. acceleration — תאוצה י' 76,80
r. motion — תנועה י' 76,119,125,131
direct impact — ישירה; נגיפה י' 254
spherical pair — כדורי; זוג קינמטי כ' 302
gravity — כובד
center of g. — מרכז הכ' 215
acceleration of g. — תאוצת הכ' 147,394
force — כוח
elastic f. — כ' אלסטי 196
gravitional f. — כ' הכובד 195
inertia f. — כ' התמד (אינרציה) 161,394
tangential inertia f. — כ' התמד טנגנטי 220
normal inertia f. — כ' התמד נורמלי 220
friction f. — כ' חיכוך 362
external f. — כ' חיצוני 213,226
tangential f. — כ' טנגנטי, משיקי 162
variable f. — כ' משתנה 188
normal f. — כ' נורמלי, ניצבי 162
internal f. — כ' פנימי 213,226
centrifugal f. — כ' צנטריפוגלי 162
instantaneous f. — כ' ריגעי 252
right-hand rule — כלל היד הימנית 120
satellite — לוויין 344
forced oscillation — מאולצת; תנודה מ' 280
velocity — מהירות
angular v. — מ' זוויתית 59,95,120,125
relative v. — מ' יחסית 76,119,125
absolute v. — מ' מוחלטת 76,119,125
transport v. — מ' מועתקת 76,119,125
average v. — מ' ממוצעת 13,78
translatory v. — מ' מתקדמת 58,119
constant v. — מ' קבועה 33
critical v. — מ' קריטית 292
instantaneous v. — מ' ריגעית 13
absolute — מוחלט
a. velocity — מהירות מוחלטת 76,119,125
a. acceleration — תאוצה מוחלטת 76,80
a. motion — תנועה מוחלטת 76,132
moment — מומנט
dynamic m. of inertia — מ' התמד דינמי 221
product of inertia — מ' התמד צנטריפוגלי 396
m. of momentum — מ' התנע 228
statical m. — מ' סטטי 396

path, length of trajectory — רך המסלול 11
impact — אה נגיפה)
power — 19
displacement — תזחה 12
harmonic oscillation — ת; תנודה ה' 268,400
inertia — אינרציה
i. force — ה' 161,394
tangential i. force — ה' טנגנטי 220
normal i. force — ה' נורמלי 220
dynamic moment of i. — ם ה' דינמי 221
product of i. — ם ה' צנטריפוגלי 396
radius of gyration — ה ה' 222
collision — ת 252
vector — ירות 13
velocity v. — ירות זוויתית 120
angular velocity v. — ליק 121
sliding v. — יצה 18
acceleration v. — צנטריפוגלי 393
centrifugal governor — זטי 299
kinematic pair — ורבי 302,379
screw p. — בוה 300
higher p. — לילי 301
cylindrical p. — דורי 302
spherical p. — סוך 300
lower p. — דבובי 300
turning p.
angular — ת זוויתית 59,95,120,125
a. velocity — ה זוויתית 60,221
a. acceleration — ה 328
cam — 299
link — רגת ח' 299
degree of freedom — 1' 299
free — ת חופשית 28
f. body — ה חופשית 267
f. fall — דולה והתגובה 147
f. oscillation — ניוטון 146,147
law — ה"ח 362
l. of action and reaction — לגולי 370
Newton's laws — חלקה 362
friction — ח' 362
angle of f. — ם ה"ח 363
rolling f. — ה"ח (מעגל) 369
sliding f. — ת תסורת ה' 381
f. force — כוח ח' 213,226
coefficient of f. — 2
f. circle — משיקי
worm gearing
external force
missile
tangential

direct central i.	נ' ישירה ומרכזית 257
oblique i.	נ' מלוכסנת, אלכסונית 254
central i.	נ' מרכזית 254
normal of i.	ניצב הנ' 254
line of i.	קו הנ' 254
rotating arm	נושא הלוויין 344
normal	נורמלי, ניצבי
n. force	כוח נ' 162
n. acceleration	תאוצה נורמלית 162, 103, 22
Newton's laws	ניוטון; חוקי נ' 147, 146
lower pair	נמוך; זוג קינמטי נ' 300
free fall	נפילה; נ' חופשית 28
efficiency	נצילות
mechanical e.	נ' מכנית 375, 195
e. of mechanisms	נ' מנגנונים 383, 375
participle	נקודה חומרית
kinetics of p.	קינטיקה של נ"ח 145
kinematics of p.	קינמטיקה של נ"ח 11
statical	סטטי
static balancing	איזון ס' 397
s. moment	מומנט ס' 396
rotational	סיבובי
turning p.	זוג קינמטי ס' 300
r. motion	תנועה סיבובית 121, 95, 59
work	עבודה
w. done by an elastic force	עבודת כוח האלסטיות 196
w. done by gravity force	עבודת כוח הכובד 195
graphical representation of w.	תיאור גרפי של ע' 189
follower	עוקב 238
radius of curvature	עיקום; רדיוס הע' 19
principle	עיקרון
D'Alembert's p.	ע' ד'אלמבר 220, 164
p. of superposition	ע' הסופרפוזיציה 148
p. of conservation of momentum	ע' שימור התנע 227
p. of conservation of moment of momentum	ע' שימור מומנט התנע 229
potential energy	פוטנציאלי; אנרגיה פוטנציאלית 200
phase	פזה, מופע 269
cam	פיקה, זיז 328
c. mechanism	מנגנון פיקות (ויזים) 328
epicyclic (planetary) gear	פלניטרי; מנגנון פ' 344
plastic	פלסטי
p. body	גוף פ' 253
p. impact	נגיפה פלסטית 254
internal force	פנימי; כוח פנימי 213, 226
action and reaction	פעולה ותגובה 147
instantaneous axis of rotation	ציר; צ' סיבוב רגעי 127, 121, 99
Geneva mechanism	צלבי; מנגנון צ' (ג'ניבה) 356
centrode	צנטרואידה, צנטרוד 101
centrifugal	צנטריפוגלי
c. governor	וסת צ' 393

phase	פזה 269
combined motion	ת; תנועה מ' 124, 119
periodic motion	ית; תנועה מ' 388
mathematical pendulum	לת; מ' מתמטית 275
inclined plane	־ משופע 376
plan motion	ית; תנועה מ' 93
machine	ה 297
mechanical	נ
m. system	רכת מ' 213
m. efficiency	לות מ' 375, 195
average	עת
a. velocity	ירות מ' 78, 13
a. acceleration	רצה מ' 18
mechamism, linkage	ן, מכניזם
slider-crank train	ארכובה 308
gear train	נלגלי שיניים 344
epicyclic (planetary) gear	פלניטרי 344
differential gear	דיפרנציאלי 347
cam m.	זיזים (פיקות) 238
Geneva m.	צלבי, מ' ג'ניבה 356
mass	
variable m.	משתנה 234
center of m.	כו המסות 214
path, trajectory	ל 61, 11
thread pitch	ז הבורג 132
system	ת
s. of units	יחידות מידה 149, 17
SI s.	יחידות בינלאומית (מב"ל) 17
mechanical s.	מכנית 213
coefficient	ז
c. of fluctuation	אי־קציבות 389
c. of friction	החיכוך 363
c. of restitution	התקומה 254
center	
c. of gravity	הכובד 215
c. of mass	המסות 214
instantaneous c. of rotation	סיבוב רגעי 97
central impact	י; נגיפה מרכזית 254
tangential	קי (ראה טנגנטי)
variable	נה
v. force	ח מ' 188
v. mass	זה מ' 234
mathematical pendulum	טי; מטוטלת מתמטית 275
translatory motion	דמת; תנועה מ' 232, 80, 76
impulse	ף, אימפולס, תקיפה 226, 170, 166
impact	ה, הולם
inelastic, plastic i.	אי־אלסטית, פלסטית 254
elastic i.	אלסטית, נמישה 254
eccentric i.	אקסצנטרית, אי־מרכזית 254
direct i.	משורה 254

c. force
product of inertia
constant
c. velocity
c. acceleration
line
screw l.
l. of impact
rectilinear motion
curvilinear motion
Coriolis acceleration
kinetic energy
kinetics
spring
uniform motion
critical velocity
rigid body
radius
r. of gyration
r. of curvature
instantaneous
i. force
i. velocity
i. center of rotation
i. axis of rotation
i. acceleration
vibration
uniformly retarded
uniformly accelerated
dynamic equilibrium
sun gear
clock
counterclockwise
clockwise
kinematic chain
retardation, deceleration
uniformly retarded
acceleration
uniformly accelerated
a. of gravity
angular a.
tangential a.
relative a.
absolute a.
average a.
normal a.
constant a.
Coriolis a.
instantaneous a.

reaction
frequency
resonans
displacement
worm gearing
oscillation
harmonic o.
free o.
forced o.
period of o.
motion
screw m.
rectilinear m.
curvilinear m.
relative m.
accelerated m.
constrained m.
absolute m.
transport m.
combined m.
periodic m.
plane m.
translatory m.
rotational m.
unifromly m.
uniformly retarded m.
uniformly accelerated m.
amplitude
flywheel
momentum
moment of m.
conservation of m.
coefficient of restitution
period of oscillation
impulse

המכללה
האקדמית
להנדסה בנגב
Negev
Academic
College of
Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

המחלקה להנדסת בניין
Department of Electrical Engineering

שם הקורס:	חוזק חומרים 2 (תש"ס)
מרצה:	ד"ר צדקה אורי
מתרגל:	חולמר ולדיסלב
שעות קבלה:	
יום ב':	17:00-18:00 (ו)
יום ד':	09:00-11:00

א) <u>מטרת הקורס</u>

הכרה, הבנה ויכולת ניתוח מאמצים ודפורמציות במבנה. מוטות אלסטיים לינאריים, כבסיס לחשוב ותכנון של מבנים.

ב) <u>מבנה הקורס</u>

3 שעות הרצאה + 2 ש' תרגיל + 1 ש' מעבדה.

ג) <u>תרגילי בית</u>

במשך הסמסטר ינתנו 8-9 גליונות תרגילים. הביצוע של תרגילי הבית יבדק בבחנים קצרים על תרגילי הבית.

ד) <u>שיטת חישוב הציון</u>:

מעבדה	10%
3 בחני תרגיל X 5%	15%
בוחן	20%
מבחן	<u>55%</u>
סה"כ	100%
	====

ציון סופי מקצוע ינתן רק בתנאי של ציון עובר במעבדה.

בזל 71 ת.ד. 45באר שבע 84100 פקס : Fax: 07-6462263 טל: 07-6462573 :71 Basel St. P.O.B. 45 Beer Sheva 84100 Israel Tel:

המכללה
האקדמית
להנדסה בנגב
Negev
Academic
College of
Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

המחלקה להנדסת בניין
Department of Electrical Engineering

טבלת נושאי הלימוד

מס' הרצאה	נושא הלימוד	מקורות
1	מאמצים מורכבים - כפיפה אקסצנטרית	1
2	גרעין	1
3	מאמצים משולבים, טרנספורמציה של מאמצים	1
4	מאמצים ראשיים, מעגל מוהר, תאוריות חוזק	1
5	הקו האלסטי - המשוואה הדיפרנציאלית	1
6	הקו האלסטי - חישוב שטחים, שיטת הקורה הצמודה	1
7	הקו האלסטי - שיטת הקורה הצמודה, שימוש בטבלאות	1
8	בוחן	1
9	בעיות לא מסויימות בכפיפה	1
10,11	שיטות אינרגיה, משפט קסטיליאנו	1
12	תאוריות הקריסה	1
13	חתך מורכב מ- 2 חומרים	1
14	התנהגות פלסטית	1

המכללה
האקדמית
להנדסה בנגב
Negev
Academic
College of
Engineering

מיסודה של המכללה הטכנולוגית ב"ש

המחלקה להנדסת בניין
Department of Electrical Engineering

רשימת מקורות

ספר לימוד

1) Popov, "Mechanics of Materials" או "Strength of Materials"

ספרי עזר

2) Timoshenko, "Strength of Materials"

3) Schaums Series, "Strength of Materials"

4) אלפרוביץ - חוזק חומרים
5) מדריך לאינג'נר - מדעי היסוד
6) זסלבסקי - תורת החוזק אוסף בעיות עם תשובות: חלק א', ב', ג', ד'

בזל 71 ת.ד. 45באר שבע 84100 פקס : Fax: 07-6462263 טל: 07-6462573 Tel: 07-6462573 Israel Beer Sheva 84100 P.O.B. 45 Basel St.

המכללה האקדמית להנדסה בנגב
הפקולטה להנדסת בניין

חוזק חומרים 2 (21012100110)

מרצה - פרופ' עזרא לוי
מתרגל - ולדיסלב חולמר

נושאי הלמוד

31/10 **1.** מאמצים מורכבים-כפיפה משופעת.
7/11 **2.** גרעין החתך
14/11 **3.** מאמצים משולבים-טרנצפורמציה של מאמצים
21/11 **4.** מאמצים ראשיים-מעגל מור. תיאוריות חוזק.
28/11 **5.** הקו האלסטי- מושוואות דיפרנציאליות למצוא תזוזה אנכית לקורה
5/12 **6.** הקו האלסטי-חישוב שטחים. שיטת הקורה הצמודה
12/12 **7.** הקו האלסטי-שיטת הקורה הצמודה. שימוש הטבלאות
19/12 **8.** בוחן
26/12 **9.** בעיות לא מסוימות בכפיפה
2/1 **10.** אנרגיה במבנים. עבודה של עומסים חיצוניים. אנרגיה אלסטית. משפט מקצוול-בטי. עקרון מינימום האנרגיה
9/1 **11.** עקרון קסטגליאנו (מינימום האנרגיה האלסטית). משפט קסטגליאנו ושימושו לחישובים שקיעות.
16/1 **12.** קריסה צירת. שיטת אוילר לקביעת עומס הקריטי (משוואת הקריסה) לעמוד ולמסגרת. השפעת תפיסה על משוואות הקריסה וכוח קריטי
23/1 **13.** חתכים בלתי הומוגניים
14. התנהגות פלסטית של חתכים. תסבולת פלסטית

ספרות

1. Popov, E.P., *Introduction to Mechanics of Solids*, Prentice-Hall, 1968
2. Timoshenko, S., *Strength of Materials I and II*, van Nostrand Publishers, 1955
3. Shaums Series, *Strength of Materials*

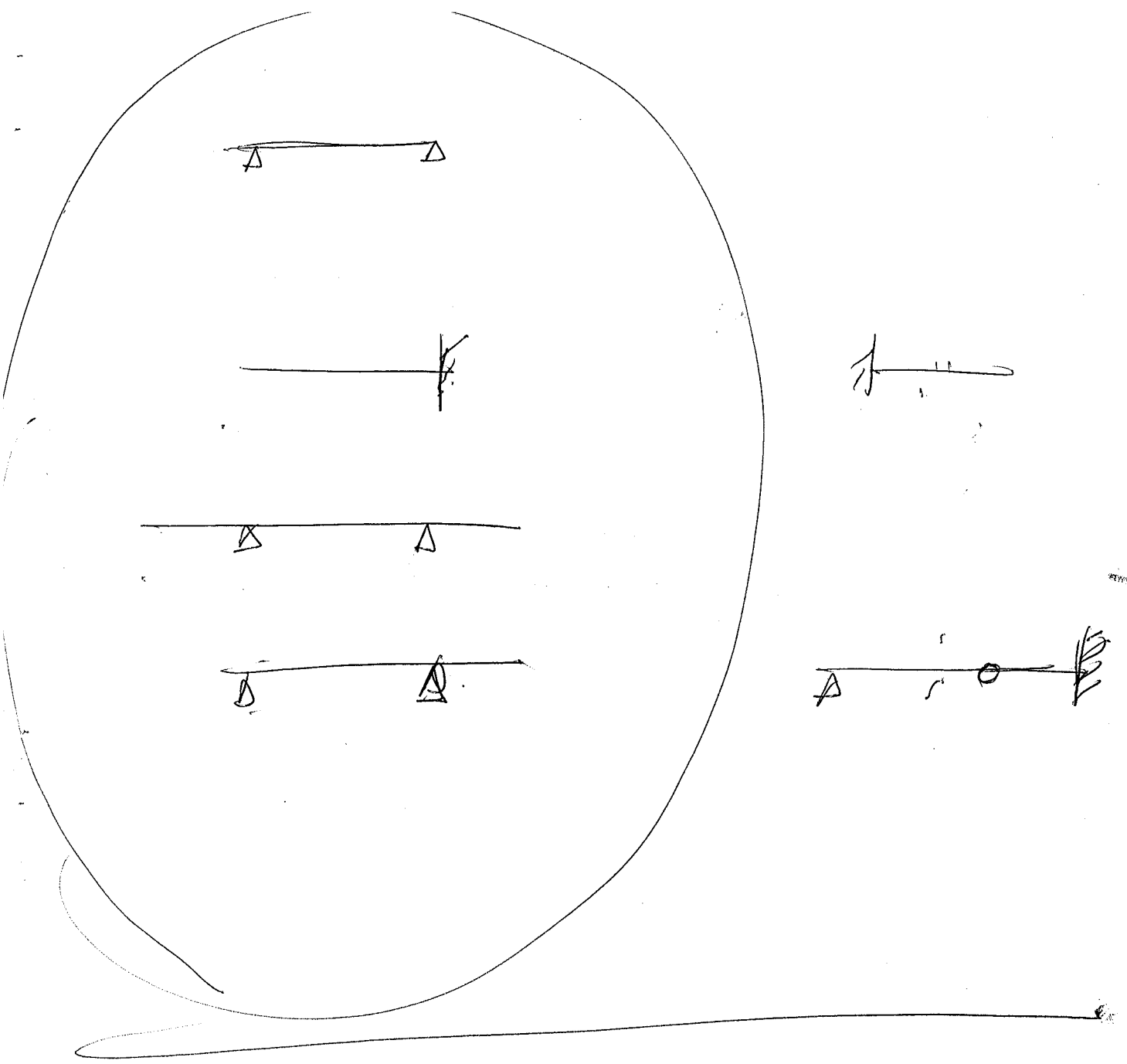
4. אלפרוביץ-חוזק חומרים
5. מדריך לאנג'ניר-מדעי היסוד
6. זסלבסקי-תורת החוזק אוסף בעיות ותשובות חלקים א-ד

הערות

מטרת הקורס - הכרה, הבנה ויכולת ניתוח מאמצים ודפורמציות במבנה, מוטות אלסטיים ליניאריים כבסיס לחישוב ותיכנון מבנים

מבנה הקורס - **3** שעות הרצאה, **+2** שעות תרגיל, ועוד שעה מעבדה

הסטודנט חייב להיות בכל השיעורים, לפי תקנון המכללה. אם לא תוכל/י להיות בשיעור, חיובך לקבל את החומר וללמוד אותו.



מבחנים

המכללה האקדמית להנדסה בנגב
הפקולטה להנדסת בניין

חוזק חומרים 2 (21012100110)

מרצה - פרופ' עזרא לוי
מתרגל - ולדיסלב חולמר

נושאי הלמוד

1. מאמצים מורכבים-כפיפה משופעת.
2. גרעין החתך
3. מאמצים משולבים-טרנצפורמציה של מאמצים
4. מאמצים ראשיים-מעגל מור. תיאוריות חוזק.
5. הקו האלסטי- מושוואות דיפרנציאליות למצוא תזוזה אנכית לקורה
6. הקו האלסטי-חישוב שטחים. שיטת הקורה הצמודה
7. הקו האלסטי-שיטת הקורה הצמודה. שימוש הטבלאות
8. בוחן
9. בעיות לא מסוימות בכפיפה
10. אנרגיה במבנים. עבודה של עומסים חיצוניים. אנרגיה אלסטית. משפט מקצוול-בטי. עקרון מינימום האנרגיה
11. עקרון קסטגליאנו (מינימום האנרגיה האלסטית). משפט קסטגליאנו ושימושו לחישובים שקיעות.
12. קריסה צירת. שיטת אוילר לקביעת עומס הקריטי (משוואת הקריסה) לעמוד ולמסגרת. השפעת תפיסה על משוואות הקריסה וכוח קריטי
13. חתכים בלתי הומוגניים
14. התנהגות פלסטית של חתכים. תסבולת פלסטית

ספרות

1. Popov, E.P., *Introduction to Mechanics of Solids*, Prentice-Hall, 1968
2. Timoshenko, S., *Strength of Materials I and II*, van Nostrand Publishers, 1955
3. Shaums Series, *Strength of Materials*

4. אלפרוביץ-חוזק חומרים
5. מדריך לאנג'ניר-מדעי היסוד
6. זסלבסקי-תורת החוזק אוסף בעיות ותשובות חלקים א-ד

הערות

מטרת הקורס - הכרה. הבנה ויכולת ניתוח מאמצים ודפורמציות במבנה. מוטיב אלסטיים לינאריים כבסיס לחישוב ותיכנון מבנים

מבנה הקורס - 3 שעות הרצאה. +2 שעות תרגיל. ועוד שעה מעבדה

הסטודנט חייב להיות בכל השיעורים. לפי תקנון המכללה. אם לא תוכל/י להיות בשיעור. חיובך לקבל את החומר וללמוד אותו.

תרגילי בית -

במשך הסמסטר ינתנו 8-9 גיליונות תרגילים. הביצוע של תרגילי הבית יבדק בבחנים קצרים על תרגילי הבית

הציונים תלויים בארבעה דברים:

1. מעבדה כ-10%
2. 3 בחני תירגול מחושב כ-15%
3. בוחן אמצע הסמסטר מחושב כ-20%
4. מבחן סופי מחושב כ-55%

* בין סופי בקורס ינתן רק בתנאי שבין ציוני בוחני האמצע

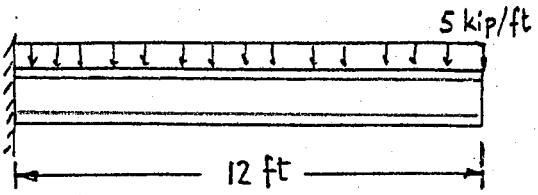
נודיע לקהל הסטודנטים מקום משרדו של פרופ' לוי בשבוע הראשון.
שעות קבלה: יום ד בין השעות 11:00-13:00

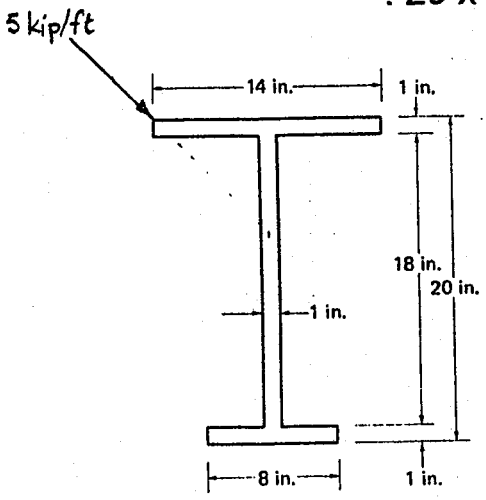
מס' הטל: 07-6462573 במשרד, או בזמן חרום 053-771247

אם יהיו שינויים לסילבוס זה, קהל הסטודנטים ייוודע בו זמנית

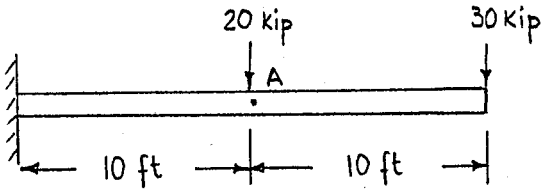
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

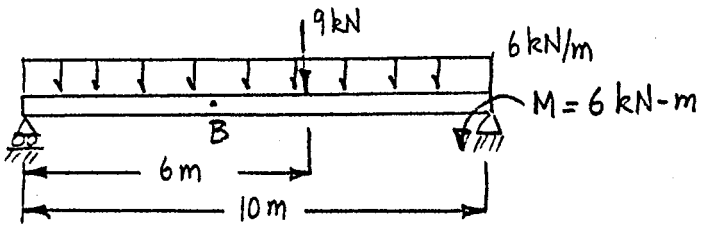




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

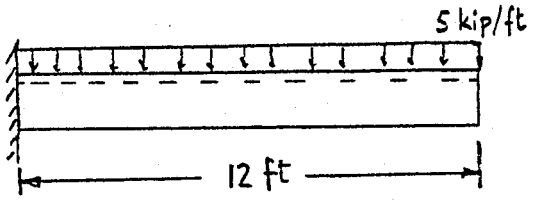


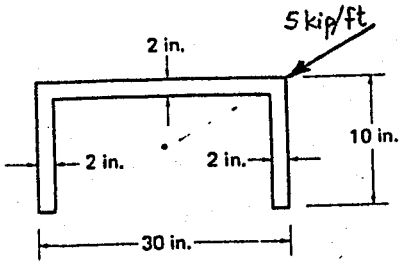
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

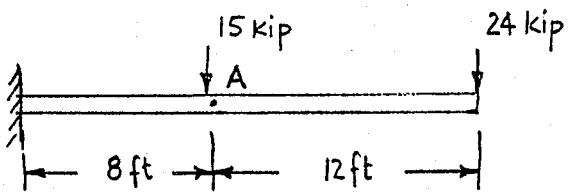
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



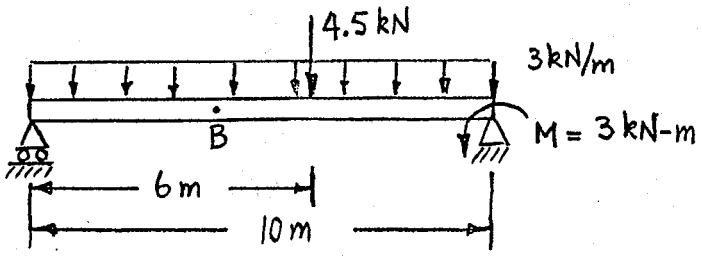


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A,לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ-29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000in^4$. (EI const)

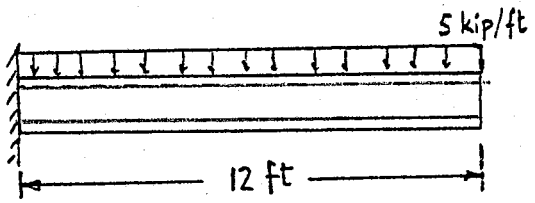


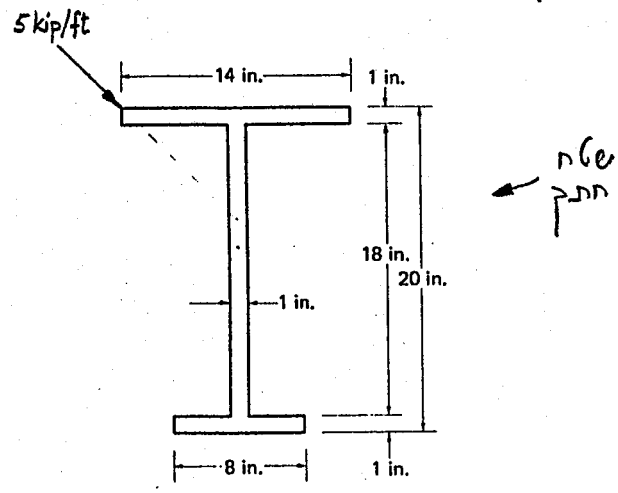
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



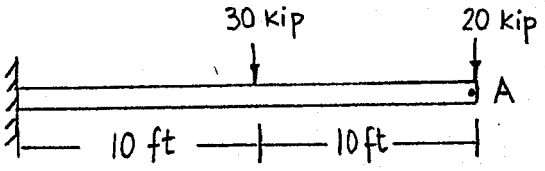
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

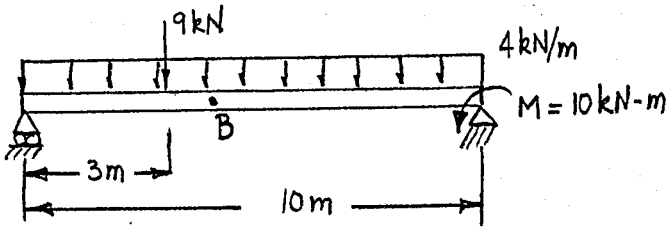




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

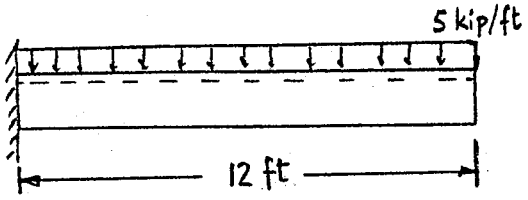


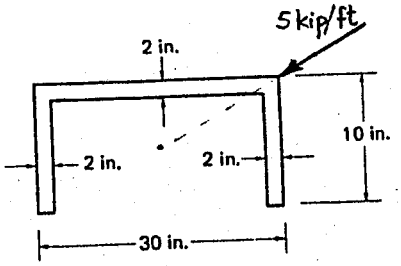
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

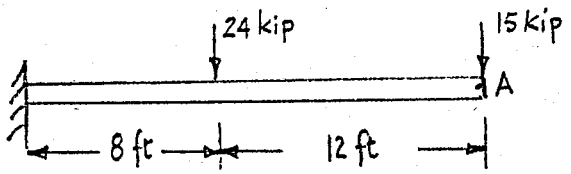
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



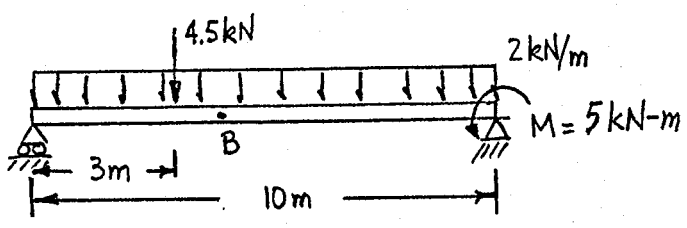


שלח תתק

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

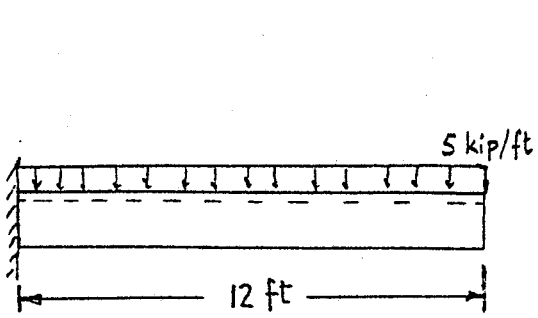


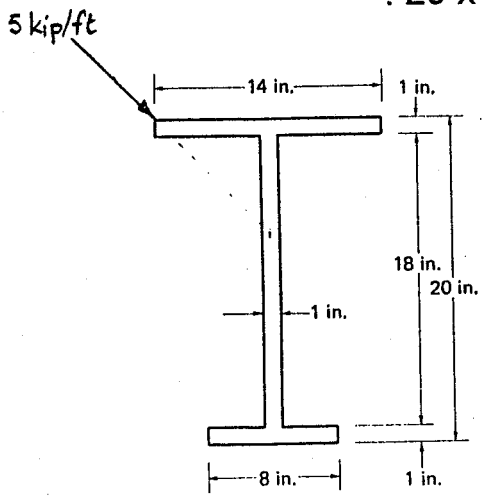
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



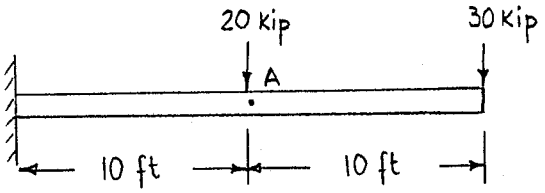
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

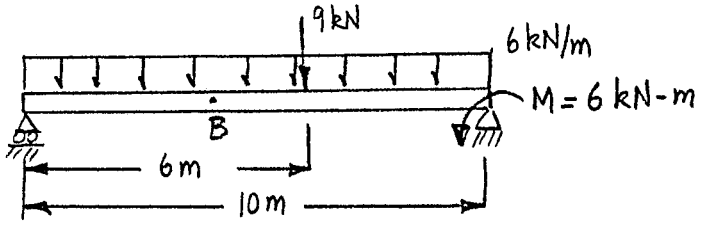




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

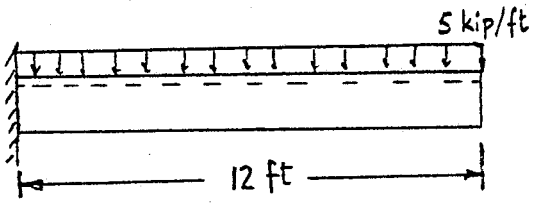


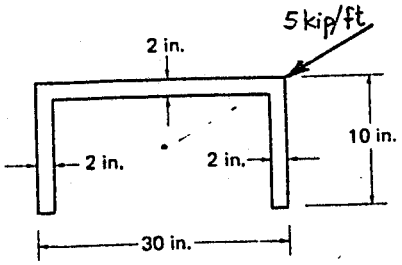
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

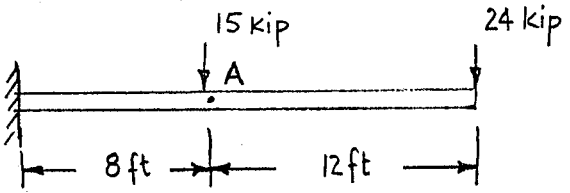
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



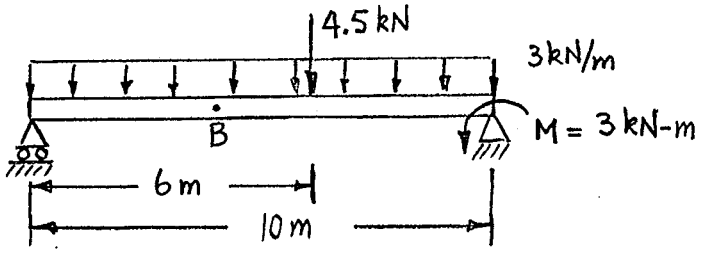


שלח תתק

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A,לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ-29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000in^4$. (EI const)

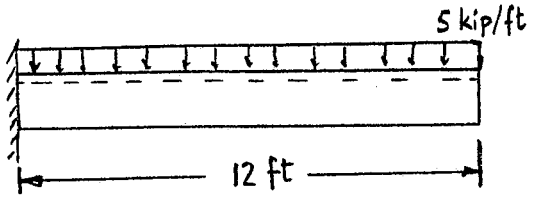


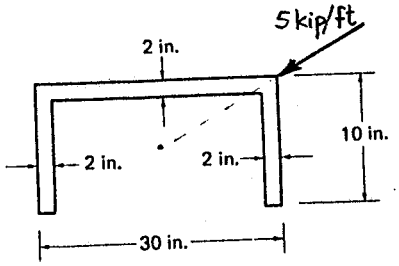
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

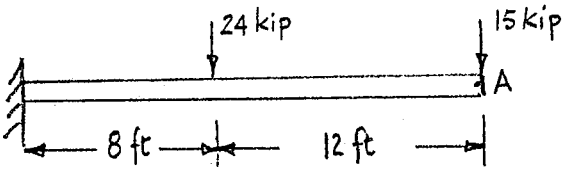
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



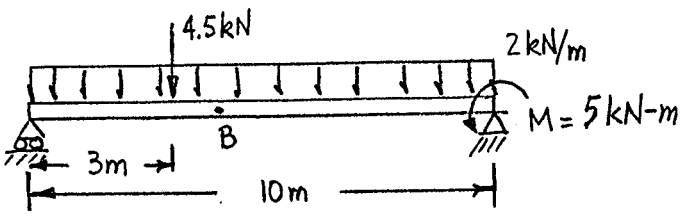


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

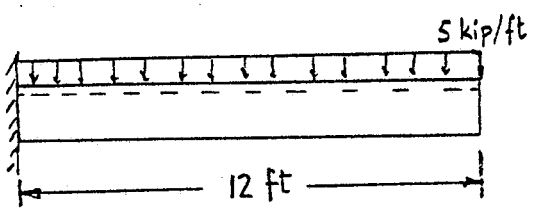


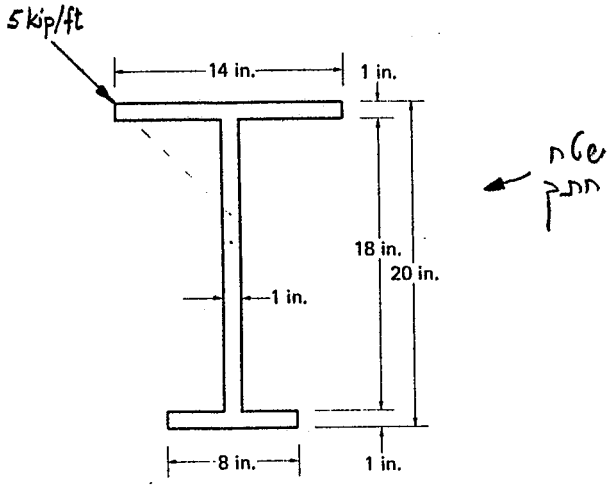
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



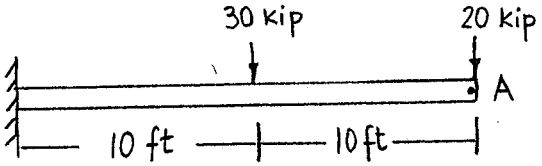
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

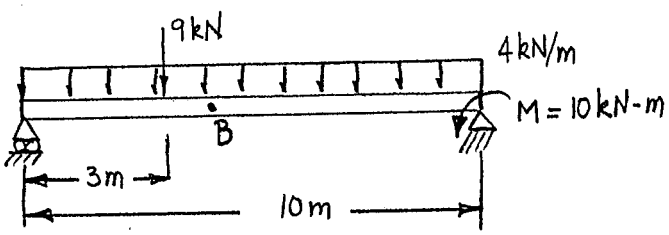




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

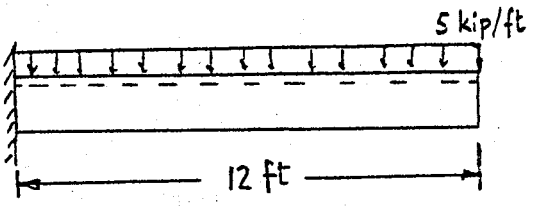


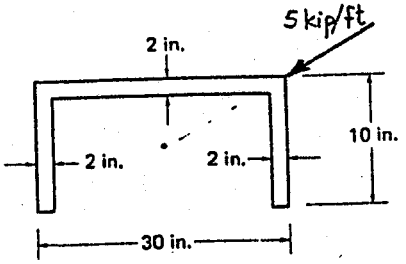
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

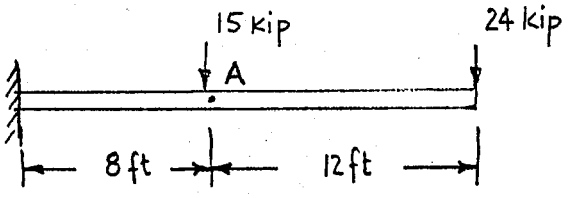
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



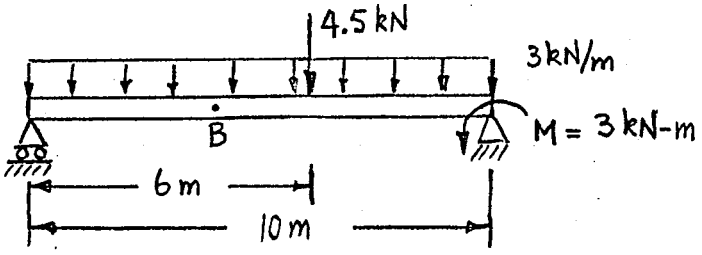


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A,לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ-29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000 in^4$. (EI const)

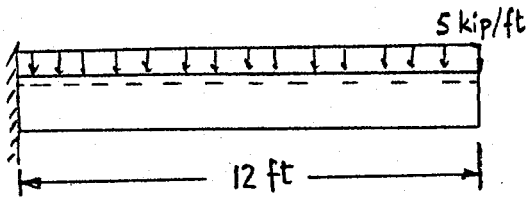


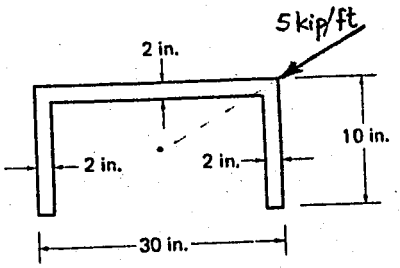
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

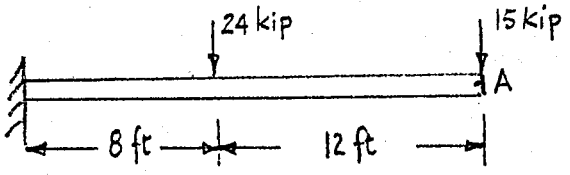
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי; אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



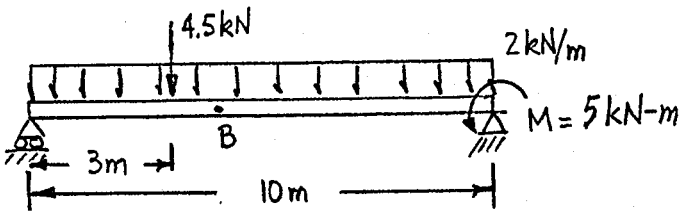


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A,לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ-29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

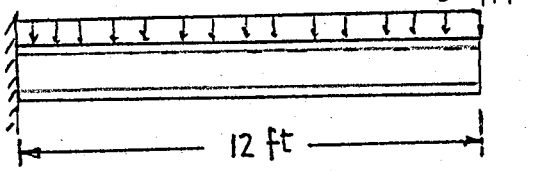


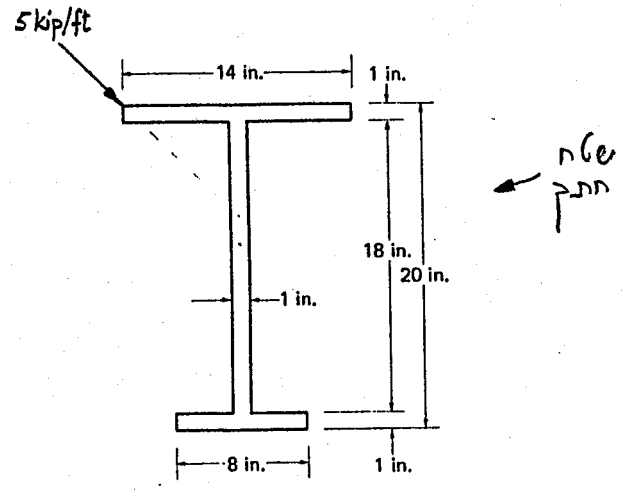
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה; מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



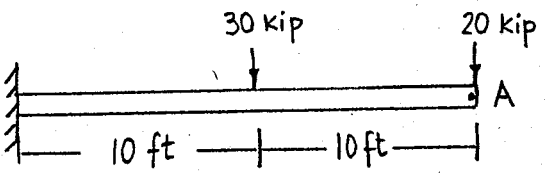
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
ד בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

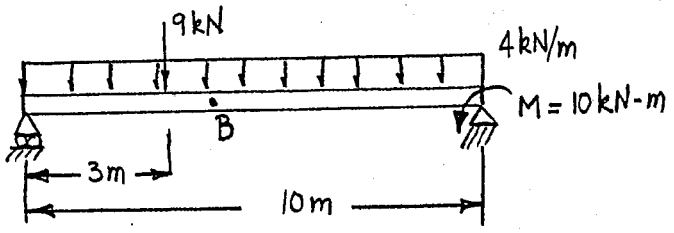




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

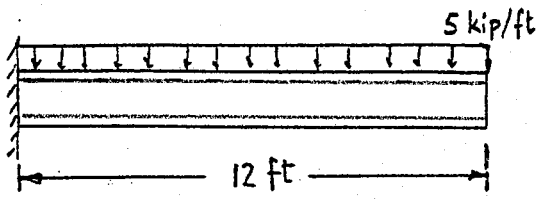


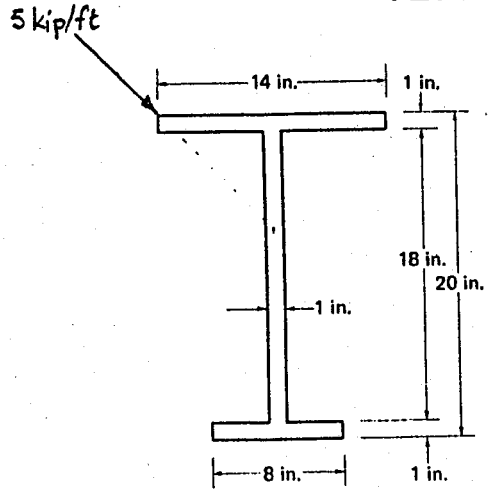
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



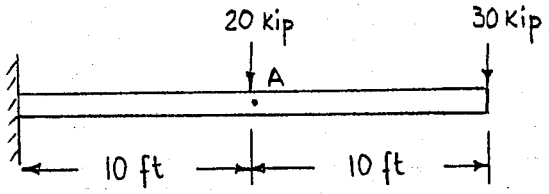
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

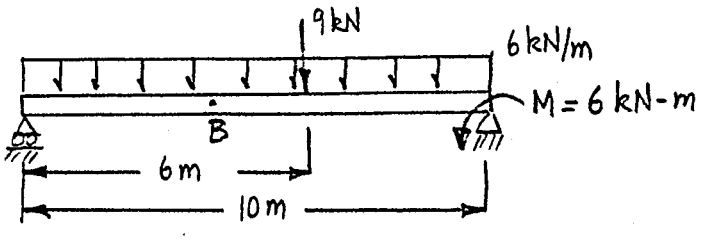




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

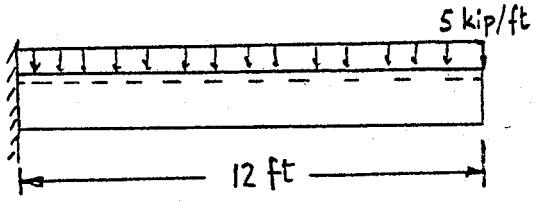


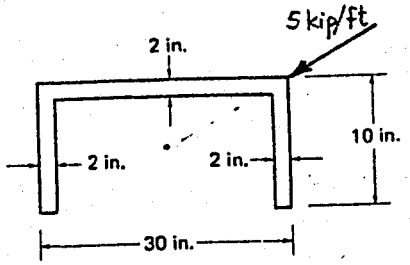
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

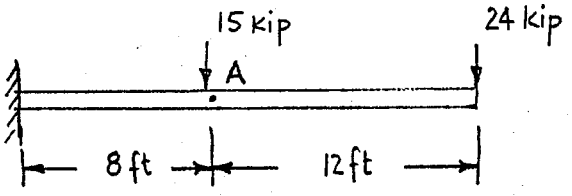
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



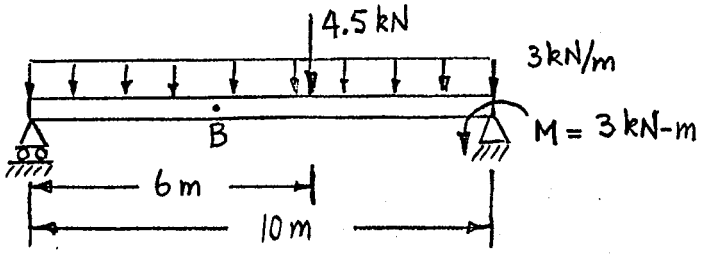


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000 in^4$. (EI const)

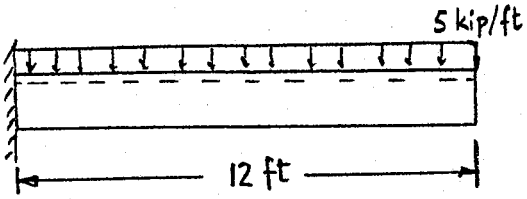


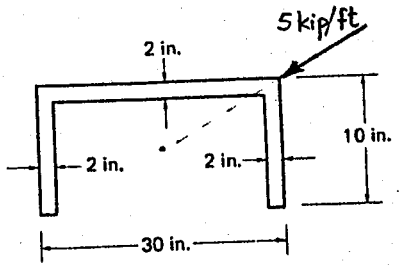
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

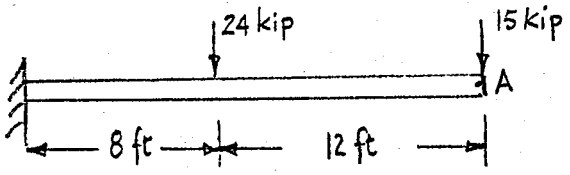
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



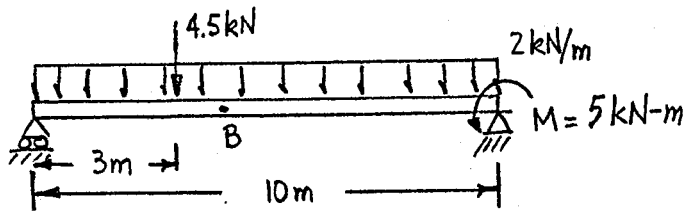


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

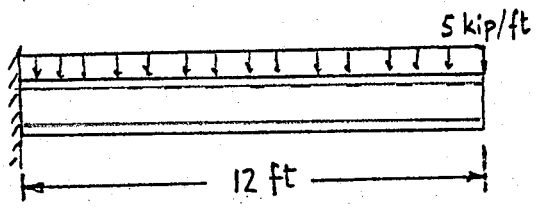


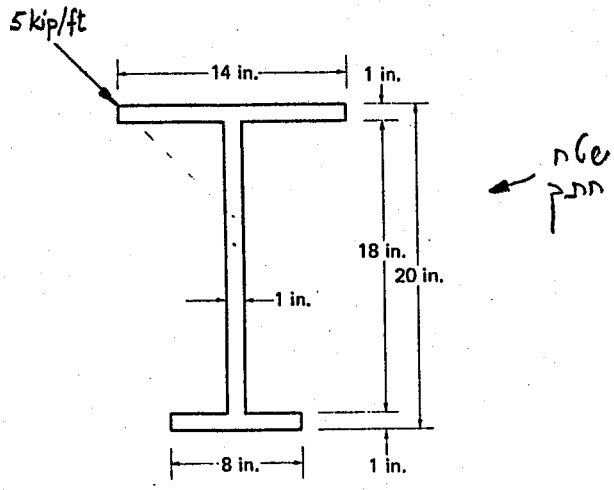
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



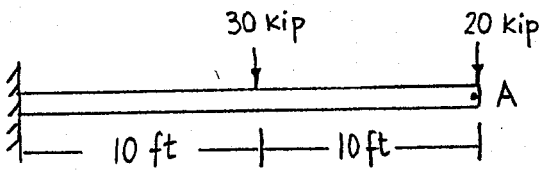
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

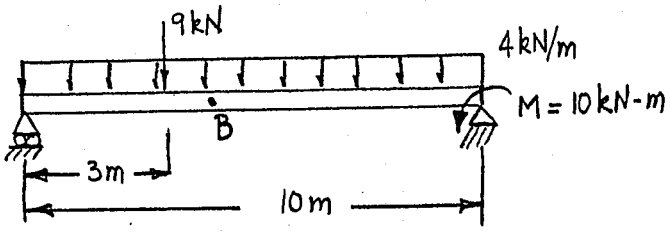




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)



3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



כשמגיעים: בקשות מבין

כשמקבלים: תודה תמיד על

כשמרבים: ברוב עליכם על

כשמשיבים: בכבוד מכים + שומרים עוונכם

57 בחנים

(1) 12 + 12 = 24 pts for CG

50pk I_{zz} 13 I_{yy} 13 α 2 w_y 2 w_x 2

$M_z = 2$ $M_y = 2$ $\sigma_x = 7$

67 pts

$\frac{67}{50} = \frac{2/3 \cdot 100}{1/2 \cdot 100} = \frac{1}{3}$

$\frac{50}{67} = \frac{3\frac{1}{2} \cdot 100}{2\frac{3}{4} \cdot 100} = \frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ pts.

$\frac{3}{4} \cdot 67 = \frac{201}{4} \approx 50$

11.425, 0	CG =	9+9	18
2392.11, 272.84	I_{zz}	10+10	20
50.77°	α	1	1
322.78	w_y	1	1
263.49	w_z	1	1
	M_z	2	1
	M_y	2	1
	σ_x		7

---

(2) 30pts

V	2	2
M	2	2
	2	2
	2	3
$\theta = 3$		6
$\delta = 7$		14
		30

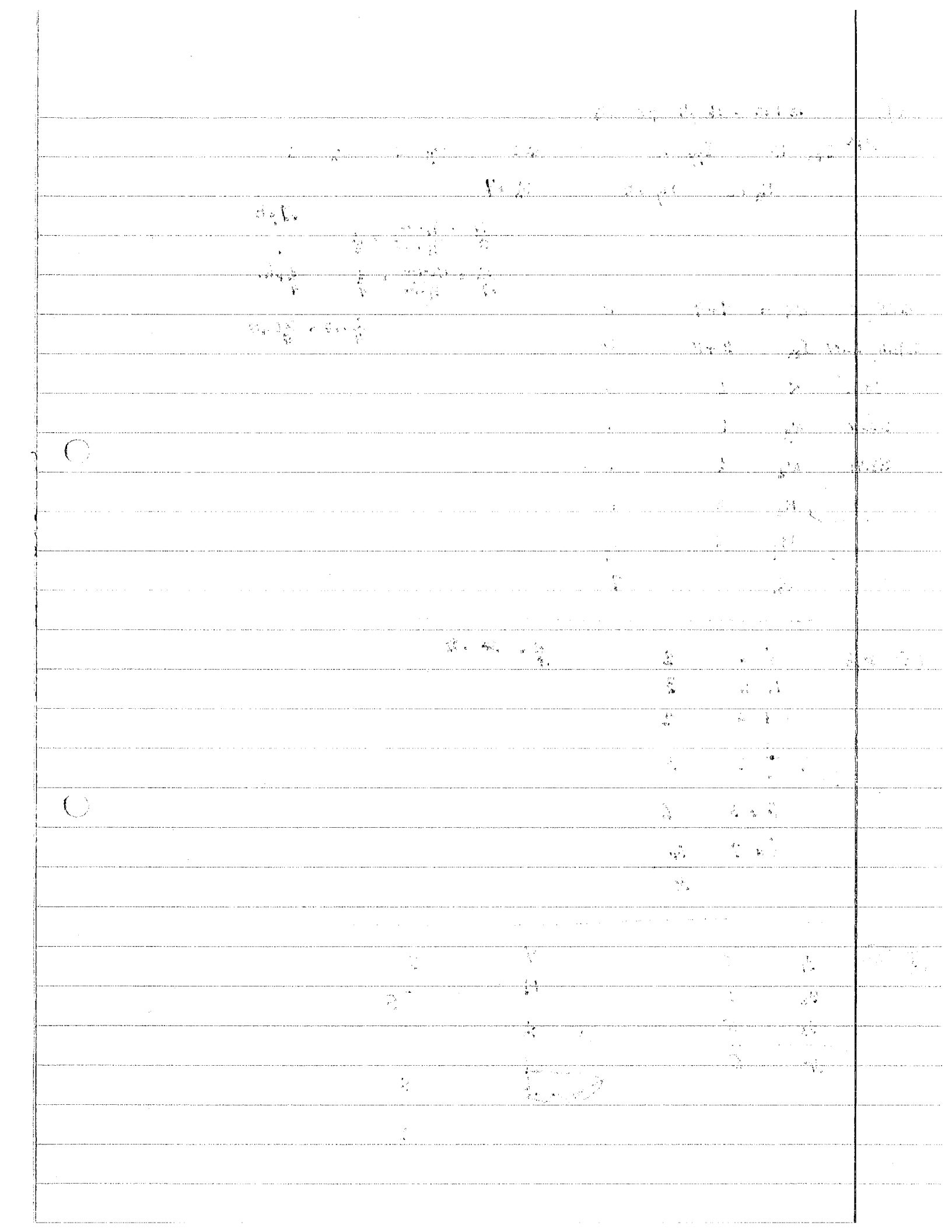
$\frac{30}{18} = 1\frac{2}{3}$

---

(3) (20)

y_1	5	
y_2	5	
y_3	5	
y_T	5	

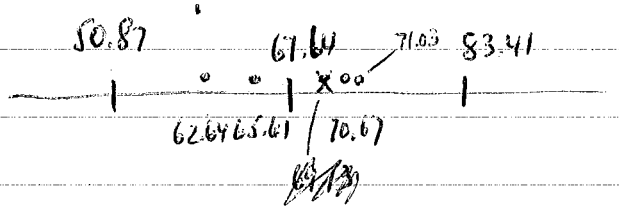
V	5
M	5
	5
	5



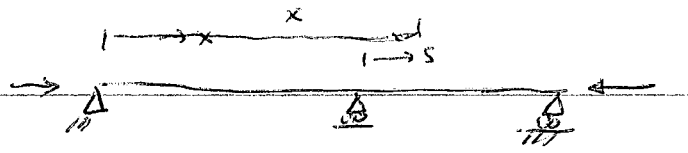
3	2	2	4
68	82	33	74
57	58	43	51
75	53	75	~~57~~ 65
52	75	65	70
50	73	55	94
75	80	41	~~60~~ 81
83	33	70	69
82	81	~~93~~	67
95	91	~~68~~ 73	42
57	59	68	60
58	48	63	84
58	35	90	84
80	85	71	71
90	13	37	80
80		14	74
15			15
70.67	~~69~~ 65.61	62.64	~~70.33~~ 71.06 ~~69.15~~ = $\bar{x}$
13.99	~~18.35~~ 18.49	18.00	~~13.20~~ 12.87 = $\bar{\sigma}$

$\bar{X} = 67.\cancel{15}64$

$\bar{\sigma} = 16.27$



~~13~~



$EIv'' + Pv = 0$ $\quad EI\bar{v}'' + P\bar{v} = 0$ $\quad s + L = x$

$\frac{d}{ds} = \frac{d}{dx}$

$M = EIv'' = -Ak^2 \cos kx - Bk^2 \sin kx$

$k^2 = \frac{P}{EI}$ $\quad v = A\cos kx + B\sin kx + Cx + D$ $\quad \bar{v} = \bar{A}\cos ks + \bar{B}\sin ks + \bar{C}s + \bar{D}$

$v=0\big|_{x=0} = A + D = 0 \Rightarrow D = 0$ $\quad v=0\big|_{s=L} = \bar{A}\cos kL + \bar{B}\sin kL + \bar{C}L + \bar{D} = 0$

$M=0\big|_{x=0} = -k^2 A = 0 \Rightarrow A = 0$ $\quad EI\bar{v}''=0\big|_{s=L} = -\bar{A}k^2\cos kL - \bar{B}k^2\sin kL = 0$

$\bar{C}L + \bar{D} = 0 \quad \bar{D} = -\bar{C}L$

$v=0\big|_{x=L} = \bar{v}=0\big|_{s=0}$ $\quad \bar{A} = \bar{B}\tan kL$

$\theta\big|_{x=L} = \theta\big|_{s=0}$

$M\big|_{x=L} = M\big|_{s=0}$

$\left(EIv''' + Pv'\right)\Big|_{x=L} = \left(EI\bar{v}''' + P\bar{v}'\right)\Big|_{s=0}$

$v = B\sin kx + Cx$ $\quad v = Cx + D$ $\quad \bar{v} = \bar{B}\frac{\sin k(s-L)}{\cos kL} + \bar{C}(s-L)$

$v'=0\big|_{x=L} = CL + D = +\bar{B}\frac{\sin kL}{\cos kL} - \bar{C}L =$

$\theta\big|_{x=L}$ $\quad D =$

$v\big|_{x=L} = 0$ $\quad D = -CL \Rightarrow v = C(x-L)$ $\quad B\sin kL + CL = 0$

$C = -\frac{B\sin kL}{L}$

$v = B\sin kx - B\sin kL\left(\frac{x}{L}\right)$ $\quad \bar{v}'\big|_{s=0} = \bar{B}\frac{\sin kL}{\cos kL} + \bar{C}L = 0$

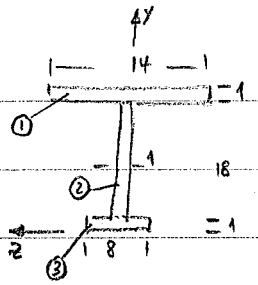
$= B\left[\sin kx - x\frac{\sin kL}{L}\right]$ $\quad \bar{C} = -\frac{\bar{B}\sin kL}{L\cos kL}$

$\bar{v} = \bar{B}\frac{\sin k(s-L)}{\cos kL} + \bar{B}\frac{(s-L)\sin kL}{L\cos kL}$

$v'\big|_{x=L} = B\left[k\cos kL - \frac{\sin kL}{L}\right] = +\bar{B}k\frac{\cos kL}{\cos kL} + \bar{B}\frac{\sin kL}{L\cos kL}$

$EIv''\big|_{x=L} = M\big|_{x=L} = +Bk^2\sin kL = +\bar{B}k^2\frac{\sin kL}{\cos kL}$ $\quad B = \frac{\bar{B}}{\cos kL}$

$EIv'''\big|_{x=L} = EI\bar{v}'''\big|_{s=0} \Leftarrow v'\big|_{x=L} = \bar{v}'\big|_{s=0}$ ו"ש



מרכז הכובד של החתך

	A	$\bar{y}$	$A\bar{y}$
①	14	19.5	273
②	18	10	180
③	8	0.5	4
	$40\,in^2$		457.0

$\bar{y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} = 11.425\,in$

$\bar{z} = 0$

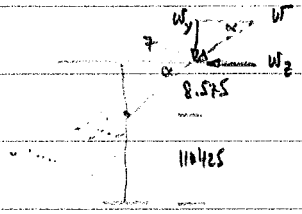
מומנט אינרציה I_{zz} של החתך

	I	A	d	$I+Ad^2$
①	$\frac{bh^3}{12} = \frac{14(1)^3}{12} = 1.167$	14	19.5 − 11.425	914.05
②	$\frac{bh^3}{12} = \frac{1(18)^3}{12} = 486$	18	11.425 − 10	522.55
③	$\frac{bh^3}{12} = \frac{8\cdot1^3}{12} = 0.67$	8	11.425 − 0.5	955.51
				$2392.11\,in^4$

מומנט אינרציה I_{yy} של החתך

	I	A	d	$I+Ad^2$
①	$\frac{hb^3}{12} = \frac{1(14)^3}{12} = 228.67$	14	0	228.67
②	$\frac{hb^3}{12} = \frac{18\cdot1^3}{12} = 1.5$	18	0	1.5
③	$\frac{hb^3}{12} = \frac{1\cdot8^3}{12} = 42.67$	8	0	42.67
				$272.84\,in^4$

פירוק של הכוח



$\tan\alpha = \frac{8.575}{7} \Rightarrow \alpha = 50.77^\circ$

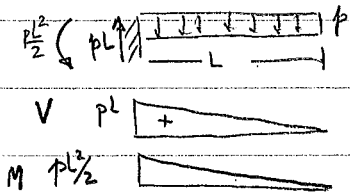
כלומר,

$W_y = W\sin\alpha = 3873.31\ lb/ft = 322.78\ \frac{lb}{in}$

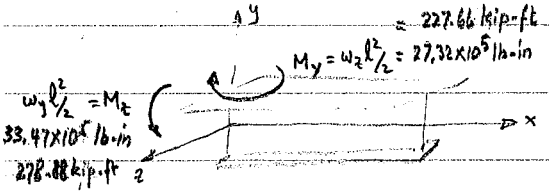
$W_z = W\cos\alpha = 3161.88\ lb/ft = 263.49\ \frac{lb}{in}$

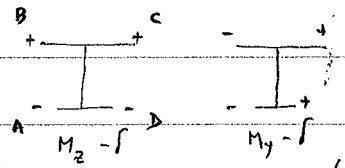
חישוב התנאות – לכוח מפורס

דיאגרמת המקביל, בסמך רשם



חישוב מאמץ המקס.





$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}} = \frac{w_y L^2/2\, y}{I_{zz}} - \frac{w_z l^2/2\, z}{I_{yy}}$$

נ-ת C:

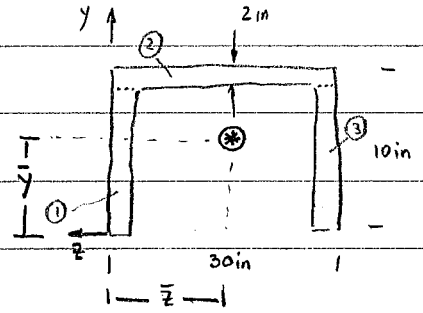
$$\sigma_{x_C} = \frac{(322.78)(144)^2/2\,(8.575)}{2392.11} + \frac{(263.49)(144)^2/2\,(7)}{272.84}$$

$$= 11996.5 + 70088.9 = 82085.38\ lb/in^2 = 11820\ kip/ft^2$$

נ-ת A:

$$\sigma_x = -58035\ \frac{lb}{} = -15984 - 40051 = -(322.78)(144)^2/2\,(+11.425) - (263.49)(144)^2/2\,(4)$$

שרטוט 1 מרכז הכובד



	A	$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$\bar{z}$	$A\bar{z}$
①	16	4	64	-1	-16
②	60	9	540	-15	-900
③	16	4	64	-29	-464
	92 in^2		668		-1380 in^3

$$\bar{y} = \frac{\sum Ay}{\sum A} = \frac{668}{92} = 7.26\,in$$

$$\bar{z} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} = \frac{-1380}{92} = -15\,in$$

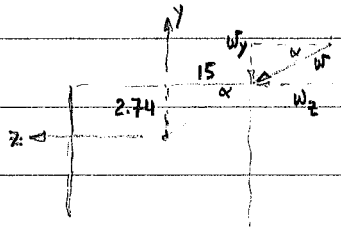
שרטוט 1 מומנט אינרציה I_{zz}

	I	A	d	$I+Ad^2$
①	$\frac{bh^3}{12} = \frac{2(8)^3}{12} = 85.33$	16	7.26-4	255.37
②	$\frac{bh^3}{12} = \frac{30(2)^3}{12} = 20$	60	9-7.26	201.66
③	$\frac{bh^3}{12} = \frac{2(8)^3}{12} = 85.33$	16	7.26-4	255.37
				712.40 in^4 = .034 ft^4

שרטוט 1 מומנט אינרציה I_{yy}

	I	A	d	$I+Ad^2$
①	$\frac{hb^3}{12} = \frac{8(2)^3}{12} = 5.33$	16	15-1	3141.33
②	$\frac{hb^3}{12} = \frac{2(30)^3}{12} = 4500$	60	15-15	4500
③	$\frac{hb^3}{12} = \frac{8(2)^3}{12} = 5.33$	16	15-1	3141.33
				10782.66 in^4 = .52 ft^4

שרטוט 1 אלמנט הצורה



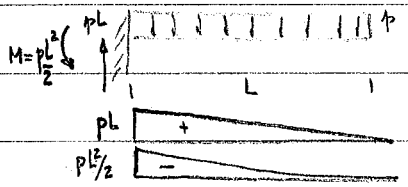
$$\tan\alpha = \frac{2.74}{15};\quad \alpha = 10.35°$$

לכן,

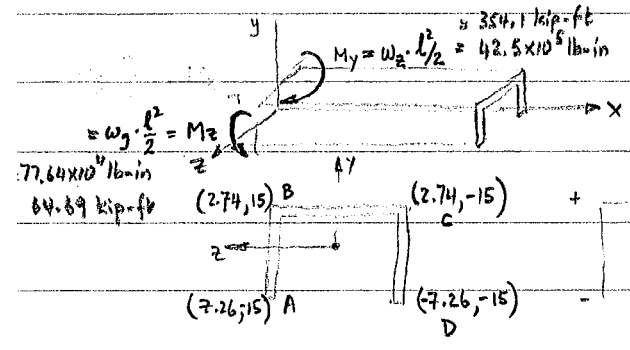
$$w_y = w\sin\alpha = 898.5\ lb/ft \cdot \frac{1ft}{12in} = 74.88\ \frac{lb}{in}$$

$$w_z = w\cos\alpha = 4918.6\ lb/ft \cdot \frac{1ft}{12in} = 409.88\ \frac{lb}{in}$$

שרטוט 1 על התנאורות - לכוח מפורס



המומנט המקסימלי יהיה בסמך הקיר ושווה ל- $\frac{pL^2}{2}$



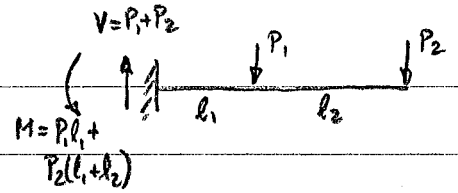
שרטוט 1 מאמץ מקסימלי

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}} = +\frac{w_y \cdot L^2/2 \cdot y}{712.40 in^4} + \frac{-w_z \cdot L^2/2 \cdot z}{10782.66 in^4}$$

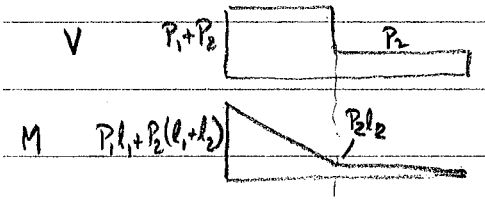
נקודה C:

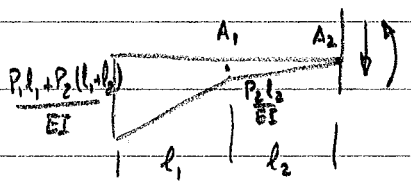
$$\sigma_{x_C} = \frac{74.88(144)^2/2 \cdot (2.74)}{712.40} + \frac{409.88(144)^2/2 \cdot 15}{10782.66}$$

$$\sigma_{x_C} = 2985.98 + 5911.76 = 8898\ \frac{lb}{in^2} = 1281\ kip/ft^2$$



קורה סמוכה





$$\theta_{A_1} = \int_0^{l_1} \frac{M}{EI}\,dx = \frac{[P_1 l_1 + P_2(l_1+l_2)]\,l_1}{2EI} + \frac{P_2 l_2 \cdot l_1}{2EI}$$

$$\theta_{A_2} = \theta_{A_1} + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{M}{EI}\,dx = \theta_{A_1} + \frac{P_2 l_2 \cdot l_2}{2EI} = \frac{P_1 l_1^2 + P_2(l_1+l_2)^2}{2EI}$$

$$\delta_{A_1} = \int_0^{l_1} \theta\,dx = \frac{[P_1 l_1 + P_2(l_1+l_2)]}{EI} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{2l_1}{3} + \frac{P_2 l_2}{EI} \cdot \frac{l_1}{2} \cdot \frac{l_1}{3}$$

$$\delta_{A_2} = \delta_{A_1} + \int_{l_1}^{l_1+l_2} \theta\,dx = \left\{\frac{P_1 l_1 + P_2(l_1+l_2)}{EI} \cdot \frac{l_1}{2}\right\}\left\{\frac{2}{3}l_1 + l_2\right\} + \frac{P_2 l_2}{EI} \cdot \frac{l_2}{2}\left(\frac{1}{3}l_1 + l_2\right) + \frac{P_2 l_2}{EI} \cdot \frac{l_2}{2}\left(\frac{2}{3}l_2\right)$$

$\delta_A = \delta_{A_1} = 0.943\,in$, $\theta_A = \theta_{A_1} = 0.0137$ רדיאנים $\Leftarrow P_2 = 30{,}000\,lb$, $P_1 = 20000\,lb$, $l_2 = 10ft = 120in$, $l_1 = 10ft = 120in$: ג"ה - א

$\delta_A = \delta_{A_1} = 0.473\,in$, $\theta_A = \theta_{A_1} = 0.0088$ רדיאנים $\Leftarrow P_2 = 24{,}000\,lb$, $P_1 = 15{,}000\,lb$, $l_2 = 12ft = 144in$, $l_1 = 8ft = 96in$: ג"ה - ב

$\delta_A = \delta_{A_2} = 1.588\,in$, $\theta_A = \theta_{A_2} = 0.0094$ רדיאנים $\Leftarrow P_2 = 15{,}000\,lb$, $P_1 = 24{,}000\,lb$, $l_2 = 12ft = 144in$, $l_1 = 8ft = 96in$: ג"ה - ד

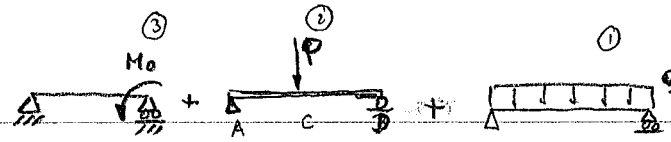
$\delta_A = \delta_{A_2} = 2.334\,in$, $\theta_A = \theta_{A_2} = 0.0137$ רדיאנים $\Leftarrow P_1 = 20{,}000\,lb$, $P_1 = 30{,}000\,lb$ $l_2 = 10ft = 120in$, $l_1 = 10ft = 120in$: ג"ה - ג

ג"ה - א: $\theta_{A_1} = \frac{5500\ kip\text{-}ft^2}{EI}$, $\delta_A = \frac{31666.67\ kip\text{-}ft^3}{EI}$

ג"ה - ב: $\theta_A = \frac{3552\ kip\text{-}ft^2}{EI}$, $\delta_A = \frac{15877\ kip\text{-}ft^3}{EI}$

ג"ה - ד: $\theta_A = \theta_{A_2} = \frac{3768\ kip\text{-}ft^2}{EI}$, $\delta_A = \frac{53301\ kip\text{-}ft^3}{EI}$

ג"ה - ג: $\theta_A = \theta_{A_2} = \frac{5500\ kip\text{-}ft^2}{EI}$, $\delta_A = \frac{78340\ kip\text{-}ft^3}{EI}$



ג) לכל הדוגמאות הבאות נבנית ע"י הסופרפוזיציה של

והשקיעה באמצע מתאזרת השקיעות מס' 13, 18, 12

ב-13) $y_1 = \frac{q l^4}{24EI}\left[\frac{x}{l} - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \left(\frac{x}{l}\right)^4\right]$

ב-12) שלא B בין AC $y_2 = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left[2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \left(\frac{x}{a}\right)^2\left(\frac{x}{b}\right)\right]$; שלא B בין CD $y_2 = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left[2\frac{l-x}{b} + \frac{l-x}{a} + \frac{(l-x)^3}{b^2a}\right]$

ב-18) מפני שקיומנו הפוך מהשביה בדוגמה $y_3 = \frac{M_o l x}{6EI}\left(1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right)$

עבור: δ-א: $x=4$, $l=10$, $b=4$, $a=6$, $\frac{x}{b}=1$, $\frac{x}{a}=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{x}{l}\right)=0.4$, $M=6000\,N\text{-}m$, $P=9000\,N$, $q=6000\,N/m$

$\frac{940800}{EI}\ N\text{-}m^3 = y_1+y_2+y_3 \Leftarrow y_3=\frac{33600}{EI}$, $y_2=\frac{163200}{EI}$, $y_1 = 744{,}000/EI$

δ-ב: $x=4$, $l=10$, $b=4$, $a=6$, $\frac{x}{b}=1$, $\frac{x}{a}=\frac{2}{3}$, $\left(\frac{x}{l}\right)=0.4$, $M=3000\,N\text{-}m$, $P=4500\,N$, $q=3000\,N/m$

$\frac{470400}{EI}\ N\text{-}m^3 = y_1+y_2+y_3 \Leftarrow y_3=\frac{16800}{EI}$, $y_2=\frac{81600}{EI}$, $y_1 = 372000/EI$

δ-ג: $x=4$, $l=10$, $b=7$, $a=3$, $\frac{l-x}{b}=\frac{6}{7}$, $\frac{l-x}{a}=2$, $\left(\frac{x}{l}\right)=0.4$, $M=5000\,N\text{-}m$, $P=9500\,N$, $q=2000\,N/m$

$\frac{447450}{EI}\ N\text{-}m^3 = y_1+y_2+y_3 \Leftarrow y_3=\frac{28000}{EI}$, $y_2=\frac{171450}{EI}$, $y_1 = 248000/EI$

δ-ד: $x=4$, $l=10$, $b=7$, $a=3$, $\frac{l-x}{b}=\frac{6}{7}$, $\frac{l-x}{a}=2$, $\left(\frac{x}{l}\right)=0.4$, $M=10{,}000\,N\text{-}m$, $P=9000\,N$, $q=4000\,N/m$

$\frac{894900}{EI} = y_1+y_2+y_3 \Leftarrow y_3=\frac{56000}{EI}$, $y_2=\frac{342900}{EI}$, $y_1 = 496000/EI$

תרגילי בית -

במשך הסמסטר ינתנו **8-9** גיליונות תרגילים. הביצוע של תרגילי הבית יבדק בבחנים קצרים על תרגילי הבית

הצייונים תלויים בארבעה דברים:

1. מעבדה כ-**10%**
2. **3** בחני תירגול מחושב כ-**15%**
3. בוחן אמצע הסמסטר מחושב כ-**20%**
4. מבחן סופי מחושב כ-**55%**

* ציון סופי בקורס ינתן רק בהגשת כל ציוני המטלות

נודיע לקהל הסטודנטים מקום משרדו של פרופ' לוי בשבוע הראשון.

שעות קבלה: יום ד בין השעות **11:00-13:00**

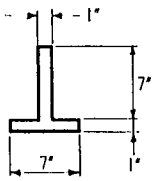
מס' הטל: **07-6462573** במשרד, או בזמן חרום **053-771247**

אם יהיו שינויים לסילבוס זה, קהל הסטודנטים ייוודע בו זמני

תוכן תוארים 2 - עיון עיוני כיתה מס' 1

8-2

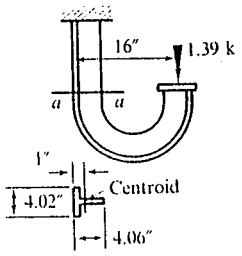
7-4. An offset link is similar to the one shown in the preceding problem but is larger and has a cross section in the form of a T, see figure. At the ends of the link the tensile forces P are applied in. above the bottom of the flanges, and the offset $e = 2\frac{1}{2}$ in. from the line of action of these forces. Find the maximum stress if $P = 40$ kips and the material behaves elastically.



PROB. 7-4

8-17 IN 2

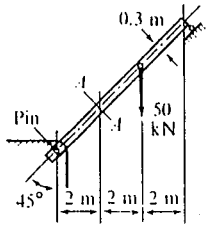
7-7. A large hook fabricated from a structural steel T (AISC designation: WT 4B) is loaded as shown in the figure. Determine the largest normal stress at the built-in end. For this section $A = 2.22$ in.^{2} and $I_0 = 3.29$ in.^{4} *Ans:* 20 ksi.



Section a-a

PROB. 7 - 7

7-10. An inclined beam having a cross-section of 0.20 m by 0.30 m supports a downward load as shown in the figure. Determine the maximum stress acting normal to the section A-A. Assume no eccentricity of the load or reactions and neglect the weight of the member.

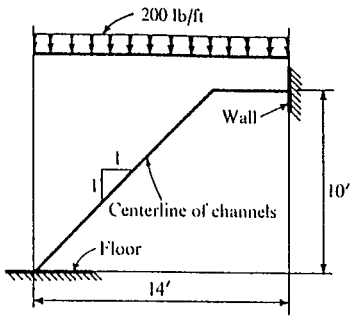


PROB. 7 - 10

8-9

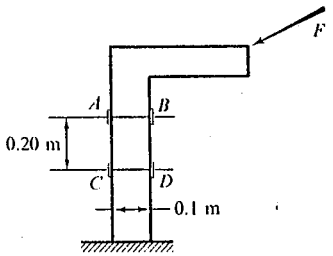
7-13. A factory stairway having the centerline dimensions shown in the figure is made from two 9-in., 13.4-lb steel channels on edge separated by treads framing into them. The loading on each channel, including its own weight, is estimated to be 200 lb per foot of horizontal projection. Assuming that the lower end of the stairway is pinned and that the wall provides only horizontal support at the top, find the largest normal stress in the channels 5 ft above the floor level. *Ans:* −2,600 psi.

$A = 5.88$ in^2
$I = 47.9$ in^4
$W = 10.6$ in^3
$h = 9$"
$G = 13.4$ lb/ft



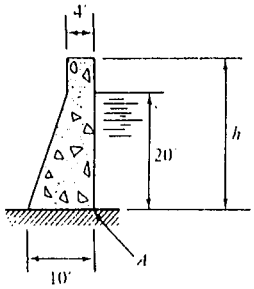
PROB. 7- 13

7-22. A bar having a 0.10 m by 0.10 m cross-section is subjected to a single force F as shown in the figure. The longitudinal stresses on the extreme fibers at two sections 0.20 m apart are determined experimentally to be: $\sigma_A = 0$; $\sigma_B = -30$ MPa; $\sigma_C = -24$ MPa; $\sigma_D = -6$ MPa. Determine the magnitude of the vertical and horizontal components of the force F.



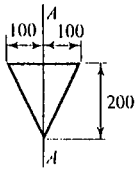
PROB. 7 - 22

7-27. What should the total height h of the dam shown in the cross-sectional view be so that the foundation pressure at A is just zero? Assume that water weighs 62.5 lb/ft^3 and concrete 150 lb/ft^3 *Ans:* 27.6 ft.



8-25

7-29. A short block has cross-sectional dimensions in plan view as shown in the figure. Determine the range along the line A-A over which a downward vertical force could be applied to the top of the block without causing any tension at the base. Neglect the weight of the block. Dimensions given in the figure are in mm.

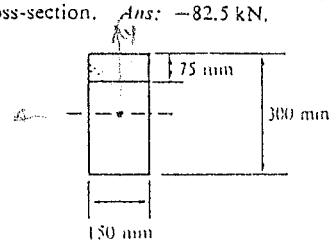


PROB. 7 29

(4)

תוכן תוארים 2 - פרק 1 עמוד מס' 1

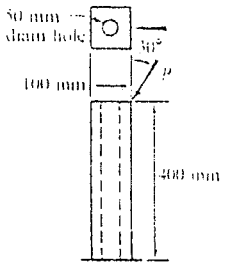
7-5. A beam having the cross-sectional dimensions shown in the figure is subjected at a given section to the following forces: a bending moment of + 20 kN·m a total vertical shear of +20 kN, and an axial thrust of 30 kN. Determine the resultant normal force on the shaded part of the cross-section. *Ans:* −82.5 kN.



PROB. 7 - 5

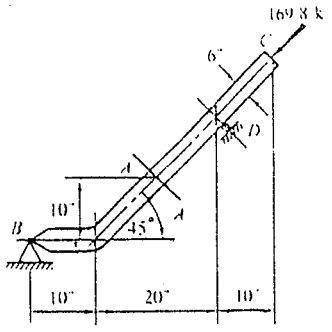
7-9 50 mm

A short 100 mm square steel bar with a diameter axial hole is built in at the base and is loaded at the top as shown in the figure. Neglecting the weight of the bar, determine the value of the force P so that the maximum normal stress at the built-in end would not exceed 140 MPa. *Ans:* 129 kN.



PROB. 7 - 9

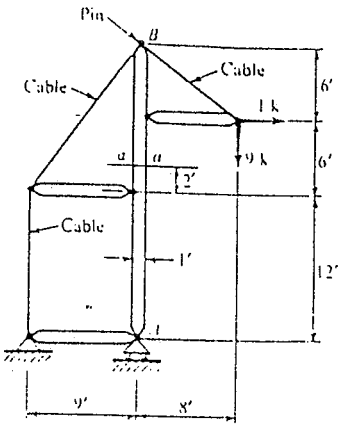
7-12. A force of 169.8 kips is applied to a bar BC at C as shown in the figure. Find the maximum stress acting normal to the section A-A. The member BC is made from a piece of 6 in. by 6 in. steel bar. Neglect the weight of the bar. *Ans:* −18 ksi.



PROB. 7 - 12

8-6

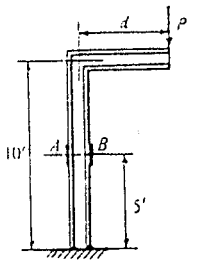
7-17. Compute the maximum compressive stress acting normal to the section a-a for the structure shown in the figure. The post AB has a 12-in.-by-12-in. cross section. Neglect the weight



PROB. 7 - 17

8-11

7-21. A steel frame fabricated from W 8 × 17 steel sections supports a load P at a distance d from the center of the vertical column as shown in the figure. On the outside of the column at a distance 5 ft from the ground the following strains were measured: at A, $\varepsilon = 200 \times 10^{-6}$ in. per inch; and at B, $\varepsilon = -600 \times 10^{-6}$ in. per inch. What are the magnitudes of the load P and the distance d? let $E = 30 \times 10^6$ psi. *Ans:* 30 k, 5.63 in.



$A = 5.01$ in²
$I = 56.6$ in⁴
$W = 14.1$ in³
$h = 8''$
$G = 17 \frac{lb}{ft}$

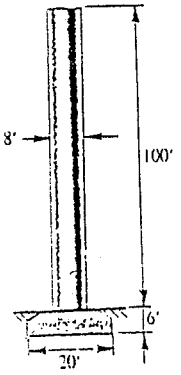
$\sigma = \frac{My}{I}$

$\sigma = \frac{M}{W}$

PROB. 7 - 21

8-28

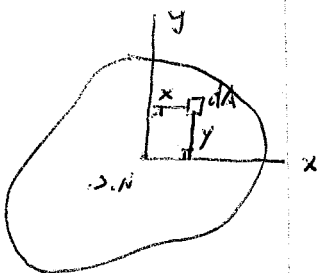
7-33. An 8-ft-diameter steel stack, partially lined with brick on the inside, together with a 20-ft-by-20-ft concrete foundation pad weighs 160,000 lb. This stack projects 100 ft above the ground level, as shown in the figure, and is anchored to the foundation. If the horizontal wind pressure is assumed to be 20 lb per square foot of the projected area of the stack and the wind blows in the direction parallel to one of the sides of the square foundation, what is the maximum foundation pressure? *Ans:* 1.21 k per square foot.



PROB. 7-33

מומנט אינרציה

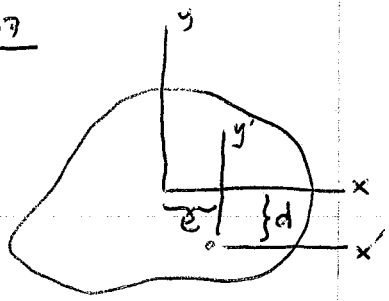
מומנט אינרציה מסביב צירי **מעובר** של **מרכז כובד** (מ.כ.)



$$I_{xx} = \iint y^2 dA \quad , \quad I_{yy} = \iint x^2 dA \quad , \quad I_{xy} = \iint xy dA$$

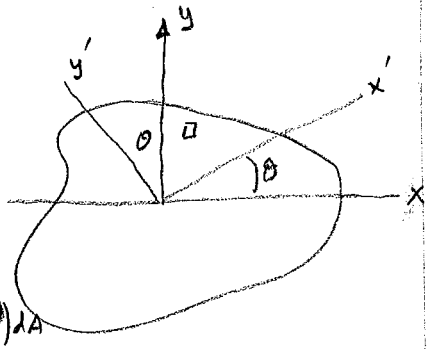
מומנט אינרציה שמביב צירים מקבילים לצירים שעוברים

דרך מרכז הכובד



$$I_{xx'} = \iint y'^2 dA = \iint (y+d)^2 dA = I_{xx} + Ad^2$$
$$I_{y'y'} = \iint x'^2 dA = \iint (x+e)^2 dA = I_{yy} + Ae^2$$
$$I_{x'y'} = \iint x'y' dA = \iint (x+e)(y+d) dA = I_{xy} + edA$$

אלה משפטי שטיינר



$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$
$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

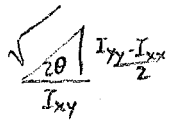
$$I_{xx'} = \int y'^2 dA = \int (y^2\cos^2\theta - 2yx\cos\theta\sin\theta + x^2\sin^2\theta) dA$$
$$= I_{xx}\cos^2\theta - 2\cos\theta\sin\theta\, I_{xy} + I_{yy}\sin^2\theta = \left(\frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}\right) + \left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'y'} = \int x'^2 dA = \int (x^2\cos^2\theta + 2xy\cos\theta\sin\theta + y^2\sin^2\theta) dA$$
$$= I_{yy}\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta\, I_{xy} + I_{xx}\sin^2\theta = \left(\frac{I_{xx}+I_{yy}}{2}\right) + \left(\frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\right)\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \int x'y' dA = \int (xy\cos^2\theta - x^2\cos\theta\sin\theta + y^2\cos\theta\sin\theta - xy\sin^2\theta) dA$$
$$= I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (-I_{yy} + I_{xx})\cos\theta\sin\theta = I_{xy}\cos 2\theta + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\sin 2\theta$$

$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$
$\frac{1+\cos 2\theta}{2} = \cos^2\theta$
$\frac{1-\cos 2\theta}{2} = \sin^2\theta$

$$I_{x'y'} = 0 \implies \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}}{I_{yy} - I_{xx}}$$

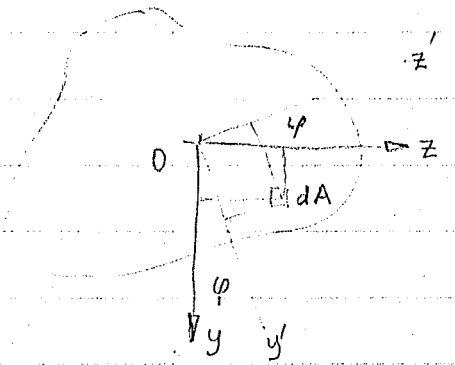


מומנטי אינרציה עבור צירים מקבילים

SOMETIMES THE MOMENTS OF INERTIA ARE GIVEN ABOUT A SET OF AXES, BUT WE WANT TO KNOW THE MOMENTS OF INERTIA ABOUT A DIFFERENT SET OF AXES

O IS CENTROID

הצורים הומוגניים מרכז המסה = מרכז הכובד
Homogeneous bodies CG = CM



DEFINE מגדירים

$$I_{zz} = \int y^2 dA$$

$$y' = y\cos\varphi + z\sin\varphi$$

$$z' = -y\sin\varphi + z\cos\varphi$$

$$I_{z'z'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\varphi + z\sin\varphi)^2 dA$$

$$= \int y^2\cos^2\varphi\, dA + 2\int yz\cos\varphi\sin\varphi\, dA + \int z^2\sin^2\varphi\, dA$$

$$= I_{zz}\cos^2\varphi + I_{yz}\sin 2\varphi + I_{yy}\sin^2\varphi$$

$$= (I_{zz} + I_{yy})/2 + (I_{zz} - I_{yy})\frac{\cos 2\varphi}{2} + I_{yz}\sin 2\varphi$$

HW #1 — Prove these identities

$$I_{y'y'} = \int z'^2 dA = \int (-y\sin\varphi + z\cos\varphi)^2 dA = \int y^2\sin^2\varphi\, dA - 2\int yz\cos\varphi\sin\varphi\, dA + \int z^2\cos^2\varphi\, dA$$

$$= I_{zz}\sin^2\varphi - I_{yz}\sin 2\varphi + I_{yy}\cos^2\varphi$$

$$= (I_{zz} + I_{yy})/2 - (I_{zz} - I_{yy})\frac{\cos 2\varphi}{2} - I_{yz}\sin 2\varphi$$

IDENTITIES (זהויות) $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$

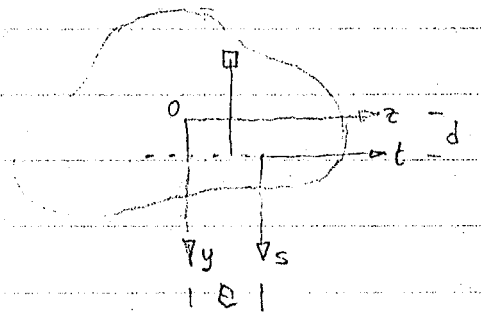
$$I_{y'z'} = \int z'y'\, dA = \int (-y\sin\varphi + z\cos\varphi)(y\cos\varphi + z\sin\varphi)\, dA = \int -y^2\sin\varphi\cos\varphi\, dA + \int yz(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\, dA$$

$$+ \int z^2\sin\varphi\cos\varphi\, dA$$

$$= (-I_{zz} + I_{yy})\frac{\sin 2\varphi}{2} + I_{yz}\cos 2\varphi$$

PARALLEL AXIS THEOREM

משפט הצירים המקבילים (משפט שטיינר)



$$I_{tt} = \int (y+d)^2 dA = \int (y^2 + 2yd + d^2)\, dA$$

$$= \int y^2 dA + 2d\int y\, dA + d^2\int dA$$

$$= I_{zz} + 2d\bar{y}A + d^2A \qquad \bar{y} = \frac{\int z\, dA}{\int dA}$$

$$I_{ss} = I_{yy} + 2e\bar{z}A + e^2A$$

IF O CENTER OF MASS אם O מרכז המסה $\bar{z} = 0$, $\bar{y} = 0$

$$I_{tt} = I_{zz_0} + d^2A$$

$$I_{ss} = I_{yy_0} + e^2A$$

USE FOR COMPOSITE BODIES) משתמשים בהם עבור גופים מורכבים

$$I_{st} = \int (z+e)(y+d)\, dA = \int (zy + zd + ye + de)\, dA = \int zy\, dA + d\int z\, dA + e\int y\, dA + de\int dA$$

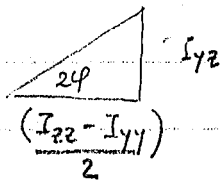
$$= I_{yz} + (d\bar{z} + e\bar{y} + ed)A$$

FOR PRINCIPAL AXES (צירים ראשיים) לחשב את הצירים הראשיים

TAKE $dI_{y'y'}/d\varphi$ or $\frac{dI_{z'z'}}{d\varphi} = 0 \Rightarrow$ כה ניתן את הזוויות

$$\frac{dI_{z'z'}}{d\varphi} = 0 = (I_{zz} - I_{yy})(-\sin 2\varphi) + I_{yz} 2\cos 2\varphi$$

$$\text{or} \quad \tan 2\varphi = 2I_{yz} / (I_{zz} - I_{yy})$$



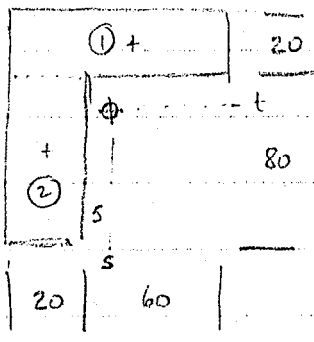
(יתר) HYPOTENUSE IS $\sqrt{\left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$

AND $I_{z'z'} = (I_{zz} + I_{yy})/2 + \sqrt{\left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = I_{max}$

$$I_{y'y'} = (I_{zz} + I_{yy})/2 - \sqrt{\left(\frac{I_{zz} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = I_{min}$$

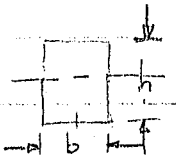
$I_{y'z'} = 0$

$I_{max} = I_{min}$ אם הצירים (CIRCULAR CROSS-SEC.), שטח-חתך עגולי, הם צירים ראשיים



	A	$\bar{y}$ מרוכז	$A\bar{y}$	$\bar{z}$ מרוכז	$A\bar{z}$
①	1600	10	16000	40	64000
②	1600	60	96000	10	16000
Σ	3200		112,000		80,000

$\bar{y}_{\text{מרוכז}} = \frac{112,000}{3,200} = 35\text{mm}$ $\quad \bar{z}_{\text{מרוכז}} = \frac{80000}{3200} = 25\text{mm}$



$I_{zz_0} = \frac{1}{12} bh^3 \qquad I_{yy_0} = \frac{1}{12} hb^3 \qquad I_{yz} = 0$

	I_{zz_0}	A	d^2	I_{tt}
①	$\frac{1}{12}(80)(20)^3$	1600	$(35-10)^2$	1053333.33
	$\frac{1}{12}(20)(80)^3$	1600	$(35-60)^2$	1853333.33



$I_{yy_0} = \frac{1}{12} hb^3$

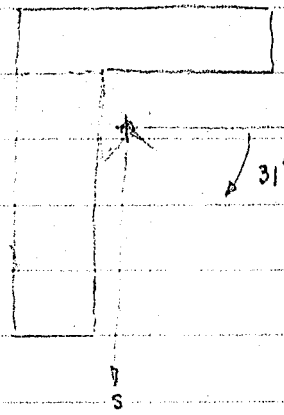
	I_{yy_0}	A	e^2	I_{ss}
①	$\frac{1}{12}(20)(80)^3$	1600	$(25-40)^2$	1213333.33
②	$\frac{1}{12}(80)(20)^3$	1600	$(25-10)^2$	413333.33
				$1626666.67\ mm^4$

	I_{yz_0}	A	dQ	I_{st}
①	0	1600	$(35-10)(25-40)$	$-600,000$
②	0	1600	$(35-60)(25-10)$	$-600,000$
				$-1200000.\ mm^4$

$$\tan 2\varphi = \frac{2I_{st}}{I_{tt} - I_{ss}} = \frac{2(-1.2\times10^6)}{2.907\times10^6 - 1.627\times10^6} = -1.875$$

$$2\varphi = -61.928^\circ \qquad \varphi = -30.96^\circ$$

את הצורות לציר הראשי המינימלי:



$$I_{t't'} = \frac{(I_{tt} + I_{ss})}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{tt} - I_{ss}}{2}\right)^2 + I_{st}^2}$$

$$= 3.627\times10^6\ mm^4$$

$$I_{s's'} = \frac{(I_{tt} + I_{ss})}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{tt} - I_{ss}}{2}\right)^2 + I_{st}^2}$$

$$= 0.907\times10^6\ mm^4$$

WATCHOUT FOR SIGN of e d d in I_{yz}

נ.ב: כדאי לציין בסימן + או − בחישוב ב- p וגם ב-φ

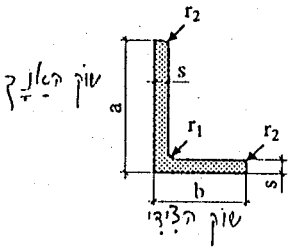
שפורץ בחישובות בחישוב של I_{yz} וגם הצורות φ

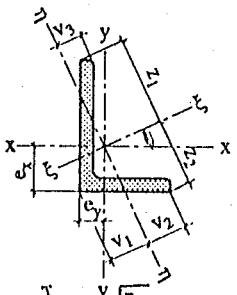
יש לבצעות שכוללות כל החישובים שעשינו ומקום אחד ונקה אותן מכן:

פרופילי פלדה LPN – זוויתנים שוני שוקיים

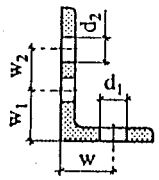
תקן: DIN 1028

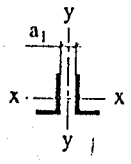
A - שטח החתך
G - משקל של 1 מטר אורך
U - שטח המעטפת
I - מומנט ההתמד (אינרציה)
W - מודול החתך (מומנט התנגדות)
i - רדיוס ההתמד (אינרציה) = $\sqrt{I/A}$
a_1 - המרחק בין זוויתנים הנותן $I_x = I_y$





	(17)	$\frac{I_x}{a-e_x}$ (18)	$\sqrt{I_x/A}$ (19)	(20)	$\frac{I_y}{b-e_y}$ (21)	$\sqrt{I_y/A}$ (22)	(23)	$\sqrt{I_\zeta/A}$ (24)	(25)	$\sqrt{I_\eta/A}$ (26)	(27)	מקטרים (28)	(29)	(30)	(31)	(32)	(33)
סימון	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	I_ζ cm^4	i_ζ cm	I_η cm^4	i_η cm	I_{xy} cm^4	a_1 mm	d_1 mm	d_2 mm	w mm	w_2 mm	w_1 mm
* 30x20x3	1.25	0.62	0.94	0.44	0.29	0.56	1.43	1.00	0.25	0.42	0.43	5.2	6.4	8.4	12	17	---
* 30x20x4	1.59	0.81	0.93	0.55	0.38	0.55	1.81	0.99	0.33	0.42	0.53	4.2	6.4	8.4	12	17	---
* 40x20x3	2.79	1.08	1.27	0.47	0.30	0.52	2.96	1.31	0.30	0.42	0.64	14.6	6.4	11.0	12	22	---
* 40x20x4	3.59	1.42	1.26	0.60	0.39	0.52	3.79	1.30	0.39	0.42	0.81	13.8	6.4	11.0	12	22	---
(40x25x4)	3.89	1.47	1.26	1.16	0.62	0.69	4.35	1.33	0.70	0.53	1.22	10.4	6.4	11.0	12	22	---
(45x30x3)	4.47	1.46	1.43	1.60	0.70	0.86	5.15	1.53	0.93	0.65	1.55	9.0	8.4	11.0	17	25	---
* 45x30x4	5.78	1.91	1.42	2.05	0.91	0.85	6.65	1.52	1.18	0.64	2.01	8.0	8.4	11.0	17	25	---
* 45x30x5	6.99	2.35	1.41	2.47	1.11	0.84	8.02	1.51	1.44	0.64	2.39	7.2	8.4	11.0	17	25	---
* 50x30x4	7.71	2.33	1.59	2.09	0.91	0.82	8.53	1.67	1.27	0.64	2.29	13.1	8.4	13.0	17	30	---
* 50x30x5	9.41	2.88	1.58	2.54	1.12	0.82	10.40	1.66	1.56	0.64	2.77	12.2	8.4	13.0	17	30	---
(50x40x4)	8.54	2.47	1.57	4.86	1.64	1.19	10.90	1.78	2.46	0.84	3.82	---	11.0	13.0	22	30	---
* 50x40x5	10.40	3.02	1.56	5.89	2.01	1.18	13.30	1.76	3.02	0.84	3.60	---	11.0	13.0	22	30	---
* 60x30x5	15.60	4.04	1.90	2.60	1.12	0.78	16.50	1.96	1.69	0.63	3.55	21.4	8.4	17.0	17	35	---
* 60x40x5	17.20	4.25	1.89	6.11	2.02	1.13	19.80	2.03	3.50	0.86	5.98	11.2	11.0	17.0	22	35	---
* 60x40x6	20.10	5.03	1.88	7.12	2.38	1.12	23.10	2.02	4.12	0.85	6.94	10.2	11.0	17.0	22	35	---
(60x40x7)	22.00	5.79	1.87	8.07	2.74	1.11	26.30	2.00	4.73	0.85	7.81	9.2	11.0	17.0	22	35	---
* 65x50x5	23.10	5.11	2.04	11.90	3.18	1.47	28.80	2.28	6.21	1.06	9.810	3.6	13.0	21.0	30	35	---
(65x50x7)	31.00	6.99	2.02	15.80	4.31	1.44	38.40	2.25	8.37	1.06	13.00	1.8	13.0	21.0	30	35	---
(65x50x9)	38.20	8.77	2.00	19.40	5.39	1.42	47.00	2.22	10.50	1.05	15.70	---	13.0	21.0	30	35	---
* 70x50x6	33.50	7.04	2.21	14.30	3.81	1.44	39.90	2.41	7.94	1.07	12.67	---	13.0	21.0	30	40	---
* 75x50x7	46.40	9.24	2.36	16.50	4.39	1.41	53.30	2.53	9.56	1.07	15.90	13.0	13.0	23.0	30	40	---
(75x50x9)	57.40	11.60	2.34	20.20	5.49	1.39	65.70	2.50	11.90	1.07	19.40	11.0	13.0	23.0	30	40	---
* 75x55x5	35.50	6.84	2.37	16.20	3.89	1.60	43.10	2.61	8.68	1.17	14.20	8.4	17.0	23.0	30	40	---
* 75x55x7	47.90	9.39	2.35	21.80	5.32	1.59	57.90	2.59	11.80	1.17	18.90	6.6	17.0	23.0	30	40	---
(75x55x9)	59.40	11.80	2.33	26.80	6.66	1.57	71.30	2.55	14.80	0.86	23.10	5.0	17.0	23.0	30	40	---
* 80x40x6	44.90	8.73	2.55	7.59	2.44	1.05	47.60	2.63	4.90	0.84	10.40	29.0	11.0	23.0	22	45	---
* 80x40x8	57.60	11.40	2.53	9.68	3.18	1.04	60.90	2.60	6.41	0.84	13.00	27.2	11.0	23.0	22	45	---
* 80x60x7	59.00	10.70	2.51	28.40	6.34	1.74	72.00	2.77	15.40	1.28	23.81	5.7	11.0	23.0	35	45	---
* 80x65x8	68.10	12.30	2.49	40.10	8.41	1.91	88.00	2.82	20.30	1.36	30.80	---	21.0	23.0	35	45	---
(80x65x10)	82.20	15.10	2.46	48.30	10.30	1.89	106.00	2.79	24.80	1.35	36.80	---	21.0	23.0	35	45	---
* 90x60x6	71.70	11.70	2.87	25.80	5.61	1.72	82.80	3.09	14.60	1.30	25.20	17.8	17.0	25.0	35	50	---
* 90x60x8	92.50	15.40	2.85	33.00	7.31	1.70	107.00	3.06	19.00	1.29	32.20	16.0	17.0	25.0	35	50	---





density צפיפות $\rho = \frac{G}{A}$

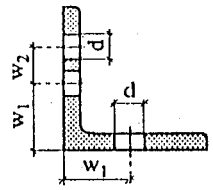
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
סימון	a mm	b mm	s mm	r_1 mm	r_2 mm	A cm^2	G kg/m	U m^2/m	e_x cm	e_y cm	z_1 cm	z_2 cm	v_1 cm	v_2 cm	v_3 cm	tg α
* 30x20x3	30	20	3	3.5	2.0	1.42	1.11	0.097	0.99	0.50	2.04	1.51	0.86	1.04	0.56	0.431
* 30x20x4	30	20	4	3.5	2.0	1.85	1.45	0.097	1.03	0.54	2.02	1.52	0.91	1.03	0.58	0.423
* 40x20x3	40	20	3	3.5	2.0	1.72	1.35	0.117	1.43	0.44	2.61	1.77	0.79	1.19	0.46	0.259
* 40x20x4	40	20	4	3.5	2.0	2.25	1.77	0.117	1.47	0.48	2.57	1.80	0.83	1.18	0.50	0.252
(40x25x4)	40	25	4	4.0	2.0	2.46	1.93	0.127	1.36	0.62	2.69	1.90	1.10	1.35	0.68	0.381
(45x30x3)	45	30	3	4.5	2.0	2.19	1.72	0.146	1.43	0.70	3.09	2.23	1.21	1.59	0.80	0.436
* 45x30x4	45	30	4	4.5	2.0	2.87	2.25	0.146	1.48	0.74	3.07	2.26	1.27	1.58	0.83	0.436
* 45x30x5	45	30	5	4.5	2.0	3.53	2.77	0.146	1.52	0.78	3.05	2.27	1.32	1.58	0.85	0.430
* 50x30x4	50	30	4	4.5	2.0	3.07	2.41	0.156	1.68	0.70	3.36	2.35	1.24	1.67	0.78	0.356
* 50x30x5	50	30	5	4.5	2.0	3.78	2.96	0.156	1.73	0.74	3.33	2.38	1.28	1.66	0.80	0.353
(50x40x4)	50	40	4	4.0	2.0	3.46	2.71	0.177	1.52	1.03	3.50	2.85	1.67	1.84	1.26	0.629
* 50x40x5	50	40	5	4.0	2.0	4.27	3.35	0.177	1.56	1.07	3.49	2.88	1.73	1.84	1.27	0.625
* 60x30x5	60	30	5	6.0	3.0	4.29	3.37	0.175	2.15	0.68	3.90	2.67	1.20	1.77	0.72	0.256
* 60x40x5	60	40	5	6.0	3.0	4.79	3.76	0.195	1.96	0.97	4.08	3.01	1.68	2.09	1.10	0.437
* 60x40x6	60	40	6	6.0	3.0	5.68	4.46	0.195	2.00	1.01	4.06	3.02	1.72	2.08	1.12	0.433
(60x40x7)	60	40	7	6.0	3.0	6.55	5.14	0.195	2.04	1.05	4.04	3.03	1.77	2.07	1.14	0.429
* 65x50x5	65	50	5	6.0	3.0	5.54	4.35	0.224	1.99	1.25	4.52	3.61	2.08	2.38	1.50	0.583
(65x50x7)	65	50	7	6.0	3.0	7.60	5.97	0.224	2.07	1.33	4.50	3.62	2.19	2.37	1.52	0.574
(65x50x9)	65	50	9	6.0	3.0	9.58	7.52	0.224	2.15	1.41	4.48	3.63	2.28	2.36	1.57	0.567
* 70x50x6	70	50	6	6.0	3.0	6.88	5.40	0.235	2.24	1.25	4.82	3.68	2.20	2.52	1.42	0.497
* 75x50x7	75	50	7	6.5	3.5	8.30	6.51	0.244	2.48	1.25	5.10	3.77	2.13	2.63	1.38	0.433
(75x50x9)	75	50	9	6.5	3.5	10.50	8.23	0.244	2.56	1.32	5.06	3.80	2.22	2.62	1.44	0.427
* 75x55x5	75	55	5	7.0	3.5	6.30	4.95	0.254	2.31	1.33	5.19	4.00	2.27	2.71	1.58	0.530
* 75x55x7	75	55	7	7.0	3.5	8.66	6.80	0.254	2.40	1.41	5.16	4.02	2.37	2.70	1.62	0.525
(75x55x9)	75	55	9	7.0	3.5	10.90	8.59	0.254	2.47	1.48	5.14	4.04	2.46	2.70	1.66	0.518
* 80x40x6	80	40	6	7.0	3.5	6.89	5.41	0.234	2.85	0.88	5.21	3.53	1.55	2.42	0.89	0.259
* 80x40x8	80	80	40	8.0	3.5	9.01	7.07	0.234	2.94	0.95	5.15	3.57	1.65	2.38	1.04	0.253
* 80x60x7	80	60	7	8.0	4.0	9.38	7.36	0.274	2.51	1.52	5.55	4.42	2.70	2.92	1.68	0.546
* 80x65x8	80	65	8	8.0	4.0	11.00	8.66	0.283	2.47	1.73	5.59	4.65	2.79	2.94	2.05	0.645
(80x65x10)	80	65	10	8.0	4.0	13.60	10.70	0.283	2.55	1.81	5.56	4.68	2.90	2.95	2.11	0.640
* 90x60x6	90	60	6	7.0	3.5	86.90	6.82	0.294	2.89	1.41	6.14	4.50	2.46	3.16	1.60	0.442
* 90x60x8	90	60	8	7.0	3.5	11.40	8.96	0.294	2.97	1.49	6.11	4.54	2.56	3.15	1.69	0.437

* זוויתנים מועדפים בהזמנה

פרופילי פלדה LPN – זוויתנים שווי שוקיים

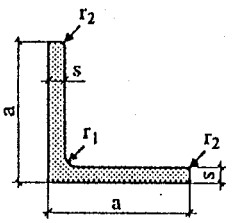
תקן: DIN 1028

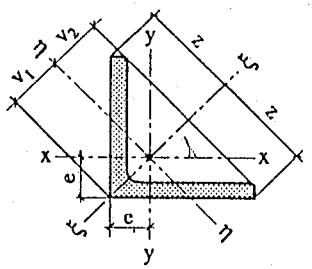
A - שטח החתך
G - משקל של מטר אורך אחד
U - שטח המעטפת
I - מומנט ההתמד (אינרציה)
W - מודול החתך (מומנט התנגדות)
i - רדיוס ההתמד (אינרציה)
a_1 - המרחק בין זוויתנים הנותן $I_x = I_y$



סימון	(12) $I_x=I_y$ cm^4	(13) $W_x=W_y$ cm^3	(14) $i_x=i_y$ cm	(15) I_ζ cm^4	(16) i_ζ cm	(17) I_η cm^4	(18) i_η cm	(19) I_{xy} cm^4	(20) d mm	(21) w_1 mm	(22) w_2 mm
* 20x3	0.39	0.28	0.59	0.62	0.74	0.15	0.37	0.24	6.4	12	---
* 25x3	0.79	0.45	0.75	1.27	0.95	0.31	0.47	0.48	8.4	15	---
25x4	1.01	0.58	0.74	1.61	0.93	0.40	0.47	0.61	8.4	15	---
* 30x3	1.41	0.65	0.90	2.24	1.14	0.57	0.57	0.84	8.4	17	---
30x4	1.81	0.86	0.89	2.85	1.12	0.76	0.58	1.05	8.4	17	---
(30x5)	2.16	1.04	0.88	3.41	1.11	0.91	0.57	1.25	8.4	17	---
* 35x4	2.96	1.18	1.05	4.68	1.33	1.24	0.68	1.72	11.0	20	---
35x5	3.56	1.45	1.04	5.63	1.31	1.49	0.67	2.07	11.0	20	---
* 40x4	4.48	1.55	1.21	7.09	1.52	1.86	0.78	2.62	11.0	22	---
40x5	5.43	1.91	1.20	8.64	1.51	2.22	0.77	3.20	11.0	22	---
45x4	6.43	1.97	1.36	10.20	1.71	2.68	0.88	3.85	11.0	25	---
* 45x5	7.83	2.43	1.35	12.40	1.70	3.25	0.87	4.58	11.0	25	---
* 50x5	11.00	3.05	1.51	17.40	1.90	4.59	0.98	6.41	13.0	30	---
50x6	12.80	3.61	1.50	20.40	1.89	5.24	0.96	7.56	13.0	30	---
50x7	14.60	4.15	1.49	23.10	1.88	6.02	0.96	8.58	13.0	30	---
(55x6)	17.30	4.40	1.66	27.40	2.08	7.24	1.07	10.10	17.0	30	---
60x5	19.40	4.45	1.82	30.70	2.30	8.03	1.17	11.30	17.0	35	---
* 60x6	22.80	5.29	1.82	36.10	2.29	9.43	1.17	13.40	17.0	35	---
60x8	29.10	6.88	1.80	46.10	2.26	12.10	1.16	17.00	17.0	35	---
(65x7)	33.40	7.18	1.96	53.00	2.47	13.80	1.26	19.60	21.0	35	---
(70x6)	36.90	7.27	2.13	58.50	2.68	15.30	1.37	21.60	21.0	40	---
* 70x7	42.40	8.43	2.12	67.10	2.67	17.60	1.37	24.80	21.0	40	---
70x9	52.60	10.60	2.10	83.10	2.64	22.00	1.36	30.60	21.0	40	---
75x7	52.40	9.67	2.28	83.60	2.88	21.10	1.45	31.30	23.0	40	---
75x8	58.90	11.00	2.26	93.30	2.85	24.40	1.46	34.50	23.0	40	---
80x6	55.80	9.57	2.44	88.50	3.08	23.10	1.57	32.70	23.0	45	---
* 80x8	72.30	12.60	2.42	115.00	3.06	29.60	1.55	42.70	23.0	45	---
80x10	87.50	15.50	2.41	139.00	3.03	35.90	1.54	51.60	23.0	45	---
90x7	92.60	14.10	2.75	147.00	3.46	38.30	1.77	54.40	25.0	50	---
* 90x9	116.00	18.00	2.74	184.00	3.45	47.80	1.76	68.20	25.0	50	---

* זוויתנים מועדפים בהזמנה



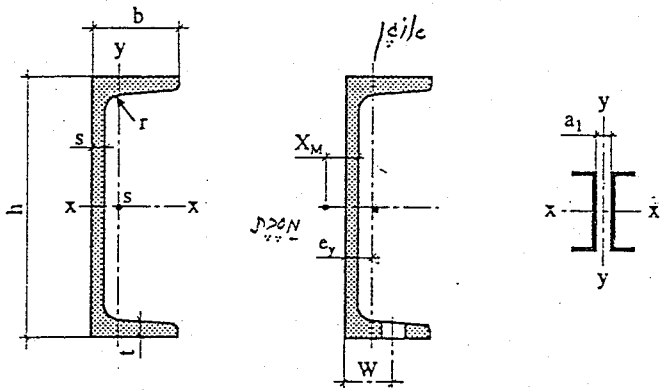


	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
סימון	a	s	r_1	r_2	A	G	U	e	z	v_1	v_2
	mm	mm	mm	mm	cm^2	kg/m	m^2/m	cm	cm	cm	cm
* 20x3	20	3	3.5	2.0	1.12	0.88	0.077	0.60	1.41	0.85	0.70
* 25x3	25	3	3.5	2.0	1.42	1.12	0.097	0.73	1.77	1.03	0.87
25x4	25	4	3.5	2.0	1.85	1.45	0.097	0.76	1.77	1.08	0.89
* 30x3	30	3	5.0	2.5	1.74	1.36	0.116	0.84	2.12	1.18	1.04
30x4	30	4	5.0	2.5	2.27	1.78	0.116	0.89	2.12	1.24	1.05
(30x5)	30	5	5.0	2.5	2.78	2.18	0.116	0.92	2.12	1.30	1.07
* 35x4	35	4	5.0	2.5	2.67	2.10	0.136	1.00	2.47	1.41	1.24
35x5	35	5	5.0	2.5	3.28	2.57	0.136	1.04	2.47	1.47	1.25
* 40x4	40	4	6.0	3.0	3.08	2.42	0.155	1.12	2.83	1.58	1.40
40x5	40	5	6.0	3.0	3.79	2.97	0.155	1.16	2.83	1.64	1.42
45x4	45	4	7.0	3.5	3.49	2.74	0.174	1.23	3.18	1.75	1.57
* 45x5	45	5	7.0	3.5	4.30	3.38	0.174	1.28	3.18	1.81	1.58
* 50x5	50	5	7.0	3.5	4.80	3.77	0.194	1.40	3.54	1.98	1.76
50x6	50	6	7.0	3.5	5.69	4.47	0.194	1.45	3.54	2.04	1.77
50x7	50	7	7.0	3.5	6.56	5.15	0.194	1.49	3.54	2.11	1.78
(55x6)	55	6	8.0	4.0	6.31	4.95	0.213	1.56	3.89	2.21	1.94
60x5	60	5	8.0	4.0	5.82	4.57	0.233	1.64	4.24	2.32	2.11
* 60x6	60	6	8.0	4.0	6.91	5.42	0.233	1.69	4.24	2.39	2.11
60x8	60	8	8.0	4.0	9.03	7.09	0.233	1.77	4.24	2.50	2.14
(65x7)	65	7	9.0	4.5	8.70	6.83	0.252	1.85	4.60	2.62	2.29
(70x6)	70	6	9.0	4.5	8.13	6.38	0.272	1.93	4.95	2.73	2.46
* 70x7	70	7	9.0	4.5	9.40	7.38	0.272	1.97	4.95	2.79	2.47
70x9	70	9	9.0	4.5	11.90	9.34	0.272	2.05	4.95	2.90	2.50
75x7	75	7	10.0	5.0	10.10	7.94	0.291	2.09	5.30	2.95	2.63
75x8	75	8	10.0	5.0	11.50	9.03	0.291	2.13	5.30	3.01	2.65
80x6	80	6	10.0	5.0	9.35	7.34	0.311	2.17	5.66	3.07	2.80
* 80x8	80	8	10.0	5.0	12.30	9.66	0.311	2.26	5.66	3.20	2.82
80x10	80	10	10.0	5.0	15.10	11.90	0.311	2.34	5.66	3.31	2.85
90x7	90	7	11.0	5.5	12.20	9.61	0.351	2.45	6.36	3.47	3.16
* 90x9	90	9	11.0	5.5	15.50	12.20	0.351	2.54	6.36	3.59	3.18

* זוויתנים מועדפים בהזמנה

פרופיל-פלדה UPB U

תקן: DIN 1026



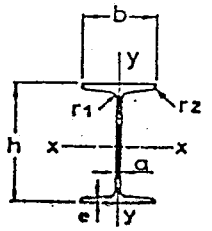
A - שטח החתך
G - משקל של מטר אורך אחד
I - מומנט ההתמד (אינרציה)
W - מודול החתך (מומנט התנגדות)
i - רדיוס ההתמד (אינרציה)
a_1 - המרחק בין צירי הפרופילים הנותן $I_x=I_y$

סימון	h mm	b mm	s mm	$t=r_1$ mm	A cm^2	G kg/m	I_x cm^4	W_x cm^3	i_x cm	I_y cm^4	W_y cm^3	i_y cm	e_y cm	x_M cm	Z_x cm^3	Z_y cm^3	a_1 mm	d_1 mm	w mm	סימון
50	50	38	5.0	7.0	7.12	5.59	26.4	10.6	1.92	9.12	3.75	1.13	1.37	2.47	---	---	4	11	20	50
60	60	30	6.0	6.0	6.46	5.07	31.6	10.5	2.21	4.51	2.16	0.84	0.91	1.50	---	---	---	---	---	60
65	65	42	5.5	7.5	9.03	7.09	57.5	17.7	2.52	14.10	5.07	1.25	1.42	2.60	23.4	5.1	16	11	25	65
80	80	45	6.0	8.0	11.00	8.64	106.0	26.5	3.10	19.40	6.36	1.33	1.45	2.67	31.8	16.6	28	13	25	80
100	100	50	6.0	8.5	13.50	10.60	206.0	41.2	3.91	29.30	8.49	1.47	1.55	2.93	49.0	22.3	42	13	30	100
120	120	55	7.0	9.0	17.00	13.40	364.0	60.7	4.62	43.20	11.10	1.59	1.60	3.03	72.6	30.2	56	17	30	120
140	140	60	7.5	10.5	20.40	16.00	605.0	86.4	5.45	62.70	14.80	1.75	1.75	3.37	102.8	40.0	70	17	35	140
160	160	65	7.5	10.0	24.00	18.80	925.0	116.0	6.21	85.30	18.30	1.89	1.84	3.56	137.6	50.2	82	21	35	160
180	180	70	8.0	11.0	28.00	22.00	1350.0	150.0	6.95	114.00	22.40	2.02	1.92	3.75	179.2	62.4	96	21	40	180
200	200	75	8.5	11.5	32.20	25.30	1910.0	191.0	7.70	148.00	27.00	2.14	2.01	3.94	228.0	72.6	108	23	40	200
220	220	80	9.0	12.5	37.40	29.40	2690.0	245.0	8.48	197.00	33.60	2.30	2.14	4.20	292.0	94.2	122	23	45	220
240	240	85	9.5	13.0	42.30	33.20	3600.0	300.0	9.22	248.00	39.60	2.42	2.23	4.39	358.0	112.0	134	25	45	240
260	260	90	10.0	14.0	48.30	37.90	4820.0	371.0	9.99	317.00	47.70	2.56	2.36	4.66	442.0	136.0	146	25	50	260
280	280	95	10.0	15.0	53.30	41.80	6280.0	448.0	10.90	399.00	57.20	2.74	2.53	5.02	532.0	160.0	160	25	50	280
300	300	100	10.0	16.0	58.80	46.20	8030.0	535.0	11.70	495.00	67.80	2.90	2.70	5.41	632.0	188.0	174	25	55	300
320	320	100	14.0	17.5	75.80	59.50	10870.0	679.0	12.10	597.00	80.60	2.81	2.60	4.82	826.0	215.0	182	25	55	320
350	350	100	14.0	16.0	77.30	60.60	12840.0	734.0	12.90	570.00	75.00	2.72	2.40	4.45	918.0	205.0	204	25	55	250
380	380	102	13.5	16.0	80.40	63.10	15760.0	829.0	14.00	615.00	78.70	2.77	2.38	4.58	1014.0	214.0	230	25	55	380
400	400	110	14.0	18.0	91.50	71.80	20350.0	1020.0	14.90	846.00	102.00	3.04	2.65	5.11	1240.0	279.0	240	25	60	400

טבלאות פרופילים: פ-IPN 1

IPN	Weight G	Depth D	Width W	Thickness Web	Thickness Flange	Toe Rad R2	Area F	Moment of Inertia Ixx	Moment of Inertia Iyy	Rad of Gyration rxx	Rad of Gyration ryy	Elastic Modulus Zxx	Elastic Modulus Zyy	Plastic Modulus Sxx	Plastic Modulus Syy	Iw	J	Ct	Cw,e	Cw,c
	kg/m	h (mm)	b (mm)	t w(mm)	t f(mm)	mm	cm^2	cm^4	cm^4	cm	cm	cm^3	cm^3	cm^3	cm^3	cm	cm^4	kN*m^2	kN*m^3	kN*m^3
80	5.95	80	42	3.9	5.9	2.3	7.58	77.8	6.29	3.2	0.91	19.5	3	22.8	5	1.04	0.869	9.34	4.72	4.25
100	8.34	100	50	4.5	6.8	2.7	10.6	171	12.2	4.01	1.07	34.2	4.88	39.8	8.1	1.23	1.6	17.65	11.50	10.43
120	11.1	120	58	5.1	7.7	3.1	14.2	328	21.5	4.81	1.23	54.7	7.41	10.5	12.4	1.42	2.71	30.49	24.43	22.22
140	14.3	140	66	5.7	8.6	3.4	18.2	573	35.2	5.61	1.4	81.9	10.7	95.4	17.9	1.60	4.32	49.25	46.79	42.62
160	17.9	160	74	6.3	9.5	3.8	22.8	935	54.7	6.4	1.55	117	14.8	136	24.8	1.79	6.57	75.72	83.28	76.07
180	21.9	180	82	6.9	10.4	4.1	27.9	1450	81.3	7.2	1.71	161	19.8	187	33.3	1.98	9.58	111.47	139.49	127.83
200	26.2	200	90	7.5	11.3	4.5	33.4	2140	117	8	1.87	214	26	250	43.6	2.17	13.5	158.74	223.35	204.47
220	31.1	220	98	8.1	12.2	4.9	39.5	3060	162	8.8	2.02	278	33.1	324	55.7	2.36	18.6	219.25	340.55	312.13
240	36.2	240	106	8.7	13.1	5.2	46.1	4250	221	9.59	2.2	354	41.7	412	70	2.55	25	296.88	507.28	465.94
260	41.9	260	113	9.4	14.1	5.6	53.3	5740	288	10.4	2.32	442	51	514	85.9	2.71	33.5	392.32	716.43	658.22
280	47.9	280	119	10.1	15.2	6.1	61	7590	364	11.1	2.45	542	61.2	632	103	2.86	44.2	506.62	975.09	895.41
300	54.2	300	125	10.8	16.2	6.5	69	9800	451	11.9	2.56	653	72.2	762	122	3.00	56.8	639.26	1294.83	1188.54
320	61	320	131	11.5	17.3	6.9	77.7	12510	555	12.7	2.67	782	84.7	914	143	3.14	72.5	801.18	1699.53	1560.65
340	68	340	137	12.2	18.3	7.3	86.7	15700	674	13.5	2.8	923	98.4	1080	166	3.28	90.4	985.90	2193.48	2014.52
360	76.1	360	143	13	19.5	7.8	97	19610	818	14.2	2.9	1090	114	1280	194	3.43	115	1225.02	2817.70	2588.96
380	84	380	149	13.7	20.5	8.2	107	24010	975	15	3.02	1260	131	1480	222	3.57	141	1480.91	3545.91	3246.12
400	92.4	400	155	14.4	21.6	8.6	118	29210	1160	15.7	3.13	1460	149	1710	254	3.71	170	1773.66	4440.51	4075.10
425	104	425	163	15.3	23	9.2	132	36970	1440	16.7	3.3	1740	176			3.91	216	2227.54	5856.15	5375.42
450	115	450	170	16.2	24.3	9.7	147	45850	1730	17.7	3.43	2040	203	2400	345	4.07	267	2714.54	7450.29	6846.43
475	128	475	178	17.1	25.6	10.3	163	56480	2090	18.6	3.6	2380	235			4.26	329	3311.98	9501.74	8729.22
500	141	500	185	18	27	10.8	179	68740	2480	19.6	3.72	2750	268	3240	456	4.42	402	3988.01	11866.88	10894.28
550	166	550	200	19	30	11.9	212	99180	3490	21.6	4.02	3610	349			4.81	544	5503.38	18359.14	16877.71
600	199	600	215	21.6	32.4	13	254	139000	4670	23.4	4.3	4630	434			5.12	813	7782.53	26815.31	24597.27

IPN



$$M_{cr,t} = \frac{C_t}{l_e} \qquad C_t = \frac{\pi E \sqrt{I_y J}}{\sqrt{2.6}}$$

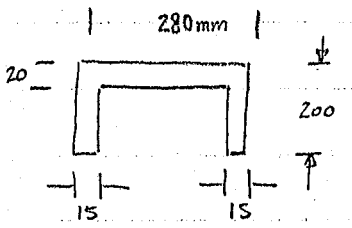
$$M_{cr,wc} = \frac{C_{w,c}}{l_e^2} \qquad C_{w,c} = \pi^2 E i_w^2 W_{el,x}$$

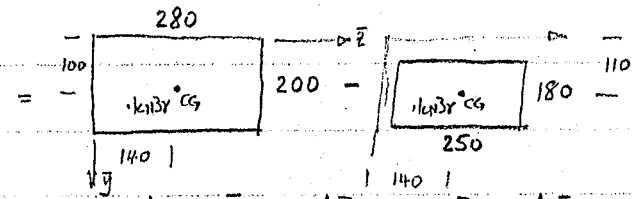
$$M_{cr,we} = \frac{C_{w,e}}{l_e^2} \qquad C_{w,e} = \frac{\pi^2 E I_y (D - t_f)}{2}$$

$$i_w = \sqrt{\frac{I_y}{2\left(A_f + \frac{1}{6} A_w\right)}}$$

web = גוף

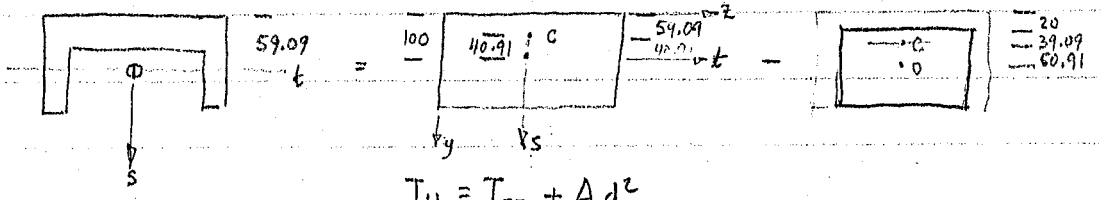
flange = דיל





		A	$\bar{z}$	$A\bar{z}$	$\bar{y}$	$A\bar{y}$
	①	56000	140	7.84×10^6	100	56×10^5
−	②	45000	140	6.3×10^6	110	49.5×10^5
	Σ	11000		1.54×10^6		6.5×10^5

$$\bar{z} = \frac{\Sigma A\bar{z}}{\Sigma A} = 140 \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = 59.09\text{mm}$$



$$I_{tt} = I_{zz_0} + A d^2$$

$$I_{zz_0} = \frac{1}{12} bh^3$$

		I_{zz_0}	A	d^2	I_{tt}
	①	$\frac{1}{12}(280)(200)^3$	56000	$(-40.91)^2$	$2.804\times10^8\ mm^4$
−	②	$\frac{1}{12}(250)(180)^3$	45000	$(-50.91)^2$	$-2.381\times10^8\ mm^4$
					$42.258\times10^6\ mm^4$

SINCE y AXIS IS AXIS OF SYMMETRY

$I_{st} = 0$

$$I_{yy_0} = \frac{1}{2} hb^3$$

$I_{ss} = I_{yy_0} + Ae^2$; $= I_{yy_0}$ כאשר e - שווה לציר

	①	$\frac{1}{12}(200)(280)^3$	56000	0	3.659×10^8
−	②	$\frac{1}{12}(180)(250)^3$	45000	0	-2.344×10^8
					$1.315\times10^8\ mm^4$

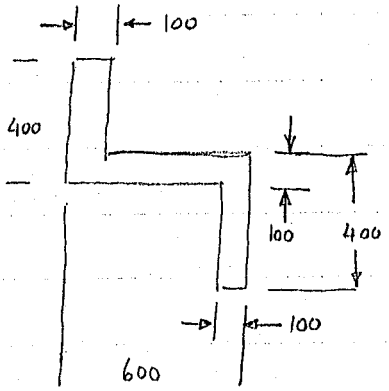
THUS PRINC. AXES ARE SAME AS s,t AND $\varphi = 0$

מכאן שהצירים y ו-s הם צירים ראשיים ⇐ $I_{st} = 0$. לכן הצירים הראשיים (s'-t') הם אותם צירים כמו s ו-t וזווית φ שווה ל-0

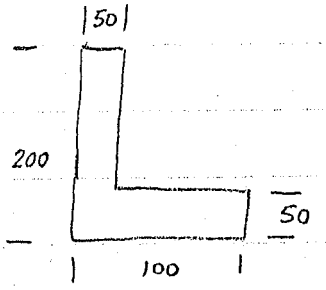
24.10.99

תרגילי בית # 2

כל המידות ב- mm

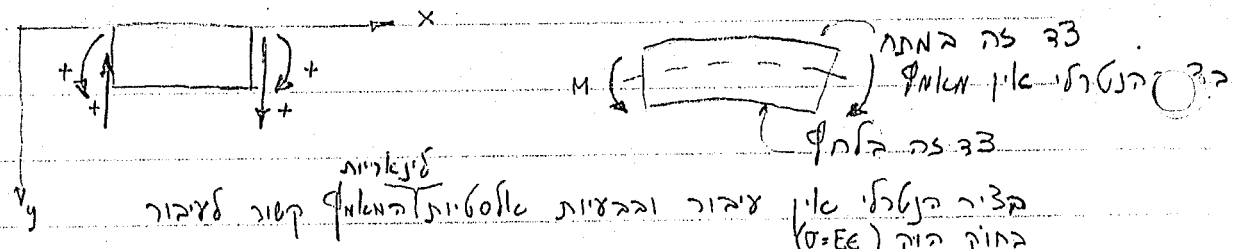


לחישוב: מרכז הכובד, מומנט אינרציה
מסביב מרכז הכובד, וצירים
הרשומים



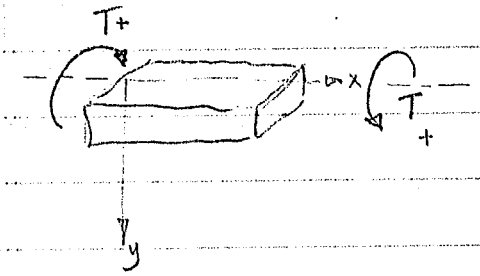
להגיש ב- 2.11.99

הסכם הסימנים למומנט הכפיפה ולכוח הציריה



ציר הנטרלי אין מאומץ
בחומר היוק ($\sigma = E\varepsilon$)
קביר הנטרלי אין עיבור ובהעדרות פלסטיות המאומץ קטור לעיבור
לינאריות

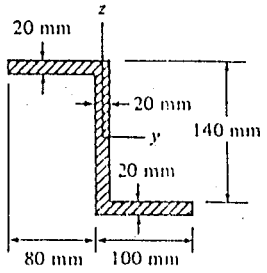
הסכם הסימנים למומנט הפיתול



הנחות

- משורים לפני כפיפה נשארים במישורים אחרי הכפיפה PLANE SECTIONS REMAIN PLANE
- ציר הנטרלי עובר דרך מרכז הכובד NEUTRAL AXIS PASSES THROUGH CG.
- הפוך הוק הומוגני האיזוטרופי לגי משנה HOOKS DENSITY

*9.3 (a) For the Z section shown, calculate I_y, I_z, and I_{yz}. Also locate the principal centroidal axes and calculate the principal moments of inertia.



(a)

PROBLEM 9.3

9.9 What centroidal axial force must be applied to the beam of Fig. 9.2.3 to make $|\sigma_{xA}| = |\sigma_{xB}|$ after bending and axial stresses are superposed?

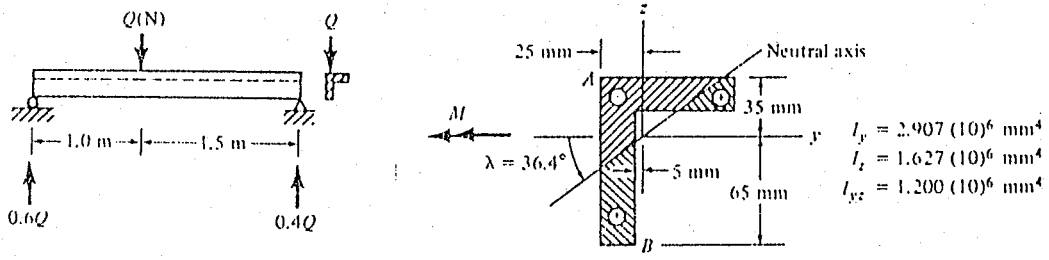
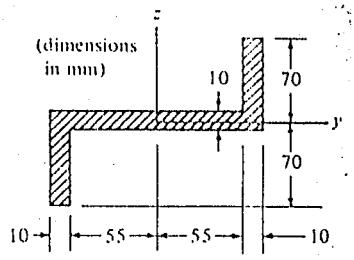


FIGURE 9.2.3.

*9.13 (a) A cantilever beam 1.6 m long has the Z section shown. It carries a load P = 2500 N in the $-z$ direction at the free end. Find the maximum magnitude of flexural stress (either tensile or compressive). Where does this stress appear?

(b) Repeat part (a) with load P redirected so that it acts in the $-y$ direction.

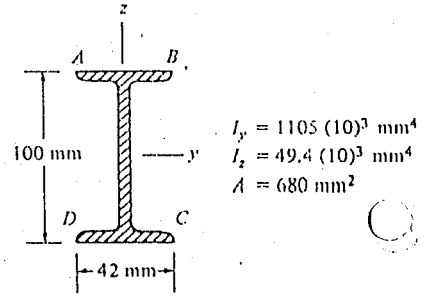
Answer: (a) 184 MPa y = 55mm z = 70mm



PROBLEM 9.13

*9.15 A column has the I section shown. A compressive force P parallel to the axis of the column is applied at corner A. Find axial stress σ_x in terms of P at the remaining three corners B, C, and D.

$\sigma_c = 0.00972P$ (MPa if P in N).

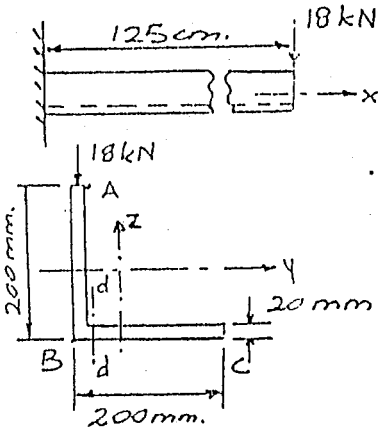


PROBLEM 9.15

5. A structural angle (L200 x 200 x 20) is used as a horizontal cantilever beam 125 cm long, and is subjected to a vertical concentrated load of 18,000 N acting through the shear center of the cross section as shown below.

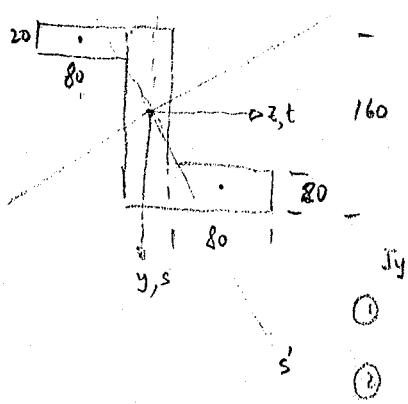
(a) Calculate the flexural stress σ_x at the points A, B and C at the fixed end of the beam, as well as the average shear stress τ acting along the line d-d of this cross section (see figure).

(b) Find the position of the Neutral Axis and the direction of the deflection. Show on a sketch of the cross-section, indicating the orientation with respect to the y-axis.



Given : $I_{zz} = I_{yy} = 2875$ cm⁴,

Answer: σ_{xA} = 145.6 MPa, σ_{xB} = − 109.3MPa, $|\tau|$ = 2.9 MPa



$I_{zz} = 22.613 \times 10^6\ mm^4$

$I_{yy} = 9.813 \times 10^6\ mm^4$

$I_{yz} = +11.2 \times 10^6\ mm^4$

	I_{yz}	A	c d	
①	0	20×80	50·70	$= 5.6\times10^6$
②	0	160×20	0	
③	0	20×80	-50·70	$= 5.6\times10^6$

$11.2\times10^6\ mm^4$

	I_{zz}	A	c^2
①	$\frac{1}{12}80\cdot20^3$	1600	70^2
②	$\frac{1}{12}20\cdot(160)^3$	3200	0
③	$\frac{1}{12}\cdot80\cdot(20)^3$	1600	70^2

I_{yy}	A	c^2
$\frac{1}{12}20\cdot80^3$	1600	50^2
$\frac{1}{12}160\cdot20^3$	3200	0
$\frac{1}{12}\cdot20\cdot80^3$	1600	50^2

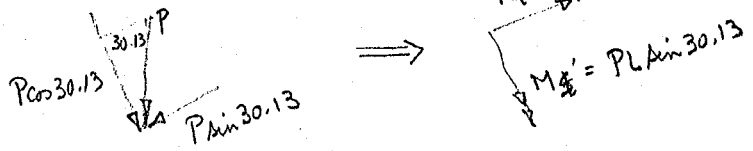
$$\tan 2\theta = \frac{2\cdot11.2\times10^6}{(22.613-9.813)\times10^6} = \frac{2I_{st}}{I_{tt}-I_{ss}} = 1.75$$

$2\theta = 60.255$

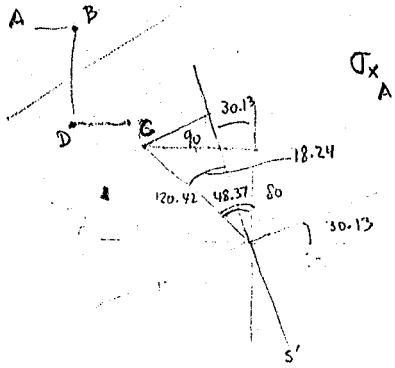
$\theta = 30.13^\circ$

$$I_{max\ min} = \frac{I_{tt}+I_{ss}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{tt}-I_{ss}}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = (16.21 \pm 12.90)\times10^6 = \begin{matrix}29.11\times10^6\\3.31\times10^6\end{matrix}$$

אופן הפעולת המקסימלי:



A (s=-80 t=-90)



$$\sigma_{x_A} = -\frac{M_t s'}{I_{tt}} + \frac{M_s' t'}{I_{ss}} = -\frac{PL\cos30.13(-114.37)}{29.11\times10^6} + \frac{PL\sin30.13(-37.69)}{3.31\times10^6}$$

$$= PL(3.398 - 5.716)\times10^{-6} = -2.318\,PL\times10^{-6}$$

$\sigma_{x_C}(s' = 114.37, t' = 37.69) = -\sigma_{x_A}$

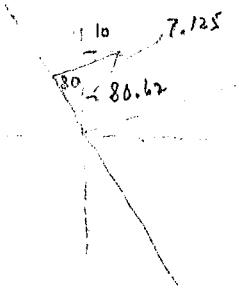
$= 2.318\,PL\times10^{-6}$

$\beta = 18.24^\circ$

$t' = -120.42\sin 18.24^\circ = -37.69$

$s' = -120.42\cos 18.24^\circ = -114.37$

B(s=-80, t=10) σ_{x_B} לחשב



$\beta = 30.13 + 7.13 = 37.26^\circ$

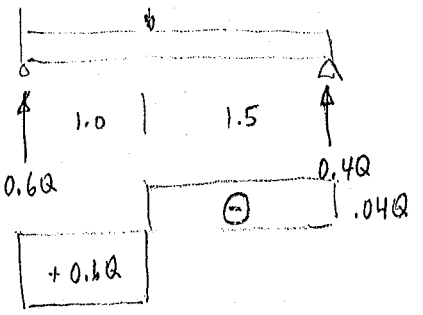
$t' = 80.62\sin 37.26 = 48.81$

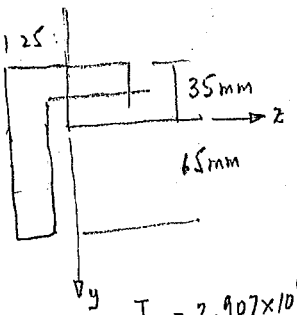
$s' = \ "\ \cos 37.26 = -64.17$

$$\sigma_{x_B} = -\frac{PL\cos30.13(-64.17)}{29.11\times10^6} + \frac{PL\sin30.13(48.81)}{3.31\times10^6}$$

$$\sigma_{x_B} = PL(1.907 + 7.402)\times10^{-6} = 9.309\,PL\times10^{-6}$$

$\sigma = -9.309\,PL\times10^{-6}$





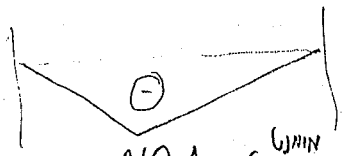
$I_z = 2.907\times10^6$

$I_y = 1.627\times10^6$

$I_{yz} = -1.2\times10^6$

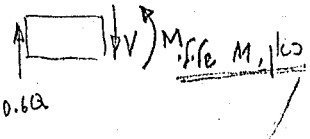
$I_{t't'} = 3.627\times10^6\ mm^4$

$I_{s's'} = 0.907\times10^6\ mm^4$



$$\tan 2\theta = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2(-1.2)}{2.907-1.627} = -11.93$$

$\theta = -30.96°$

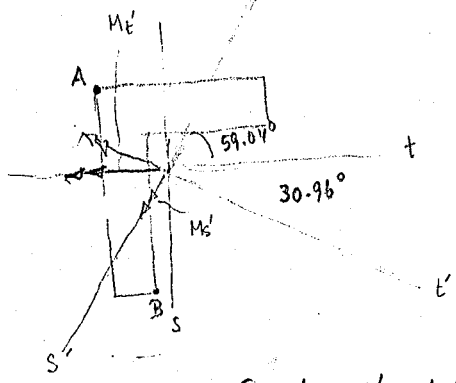


כדי למצוא את הזוויות המשוואות על $I_{t't'}$ כדי למצוא את הזווית בין t ו-t'. לכן:

$M_t = -0.6Q$ N-m $= -600Q$ N-mm

$M_{t'} = M_t \cos(-30.96) = -514.3Q$

$M_{s'} = +M_t \sin(-30.96) = +309.0Q$



$A(s=-35, t=-25)$

$t' = t\cos(-30.96°) - s\sin(-30.96°) = -39.46$ mm

$s' = t\sin(-30.96°) + s\cos(-30.96°) = -17.12$ mm

$$\sigma_{x_A} = -\frac{M_{t'}s'}{I_{t't'}} + \frac{M_{s'}t'}{I_{s's'}}$$

$$= -\frac{(-514.3Q)(-17.12)}{3.627\times10^6} + \frac{(+309.0Q)(-39.46)}{0.907\times10^6} = -0.0159Q$$

לנקודה B - s' ו-t':

$B(s=65, t=-5)$

$t' = t\cos\theta - s\sin\theta = 29.15$

$s' = t\sin\theta + s\cos\theta = 58.31$

$$\sigma_{x_B} = -\frac{M_{t'}s'}{I_{t't'}} + \frac{M_{s'}t'}{I_{s's'}}$$

$$= -\frac{(-514.3Q)(58.31)}{3.627\times10^6} + \frac{(309.0Q)(29.15)}{.907\times10^6} = 0.0182Q$$

אלו יכולים להתקבל כ-

$$\sigma_x = -\frac{(M_t I_{ss}\cdot s) + M_t I_{st}\cdot t}{I_{ss}I_{tt} - I_{st}^2} = \frac{M_t(-I_{ss}s + I_{st}\cdot t)}{I_{ss}I_{tt} - I_{st}^2}$$

$$= \frac{(-600Q)\left[-1.627\times10^6\cdot(-35) + (-1.2\times10^6)(-25)\right]}{(1.627\times10^6)(2.907\times10^6) - (-1.2\times10^6)^2} = -0.0159Q \text{ MPa}$$

מתקבלים בדיוק אותה שגיאה לנקודה σ_{x_B} עם $s=65, t=-5$

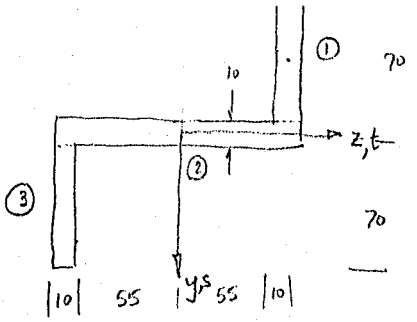
אם יש עומס ציר N, המאמץ הוא $N/3200$, כאשר השטח הוא $3200\ mm^2$. לכן

$$-\left(\sigma_{x_A} + N/3200\right) = \left(\sigma_{x_B} + N/3200\right)$$

פותרים את המשוואה הקודמת נותן את הערך של N

$$N = -3.68Q$$

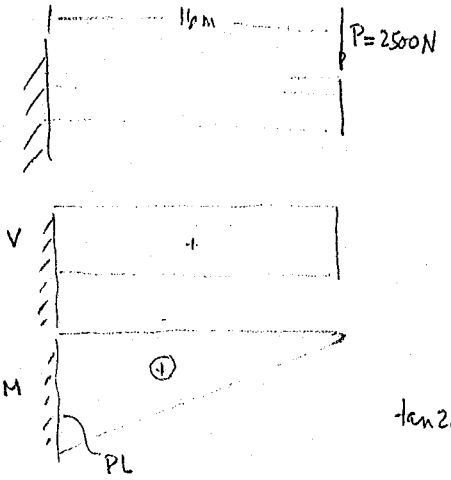
נ.ב. העומס N לוחץ על השלח, אפשר ש-Q הוא תיאורי.



	I_{yy}	A	e^2	I_{ss}
①	$\frac{1}{12}\cdot 65\cdot 10^3$	10×65	$(-60)^2$	23.45×10^5
②	$\frac{1}{12}\cdot 10\cdot 130^3$	10×130	0	18.31×10^5
③	$\frac{1}{12}\cdot 65\cdot 10^3$	10×65	$(60)^2$	23.45×10^5
				6.5222×10^6

	I_{st}	A	$e\cdot d$	I_{st}
①	0	10×65	$37.5\times(-60)$	-14.63×10^5
②	0	10×130	0.0	0
③	0	10×65	$(-37.5)(60)$	-14.63×10^5
				-2.925×10^6

	I_{tt}	A	e^2	I_{tt}
①	$\frac{1}{12}(10)\cdot65^3$	10×65	$(37.5)^2$	11.43×10^5
②	$\frac{1}{12}(130)\cdot10^3$	10×130	0	$.1083\times10^5$
③	$\frac{1}{12}(10)\times65^3$	10×65	$(-37.5)^2$	11.43×10^5
				2.297×10^6



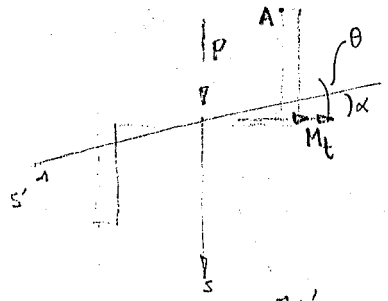
לאחוג הכיוונים הראשיים

$$\tan 2\theta = \frac{2I_{st}}{I_{tt}-I_{ss}} = \frac{2(-2.925\times10^6)}{(2.297-6.522)\times10^6} = 1.3846$$

$$2\theta = 54.16^\circ$$
$$\theta = 27.08^\circ$$

$$\begin{matrix} I_{t't'} \\ I_{s's'} \end{matrix} = \frac{(I_{ss}+I_{tt})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{tt}-I_{ss}}{2}\right)^2 + I_{st}^2} = 4.41 \pm 3.608 = \begin{cases} 8.018\times10^6 \\ .802\times10^6 \end{cases}$$

אם נרצה לבדוק שאנו הכיוונים הנכונים, נחשב $I_{t't'} = \frac{(I_{tt}+I_{ss})}{2} + \frac{(I_{ss}-I_{tt})}{2}\cos 2\theta + I_{st}\sin 2\theta$ כך:



P גורם למומנט M_t סביב t, וזרועו היא PL = 4000N-m

אם נשתמש במשוואה הבאה, $M_s = 0$ ו-

$$\sigma_x = \frac{-M_t I_{st}\cdot s + M_t I_{ss}\cdot t}{I_{ss}I_{tt} - I_{st}^2}$$

רואים שנקודה A היא יותר רחוקה מהציר הנטרלי, לכן, לפי הכיוונים s ו-t $t=55$ ו- $s=70$

$$\sigma_{x_A} = (4000\times1000)\left[\frac{-I_{ss}\cdot s + I_{st}\cdot t}{I_{ss}I_{tt}-I_{st}^2}\right] = 4\times10^6\left[\frac{-6.522\times(-70)+(-2.925)(55)}{6.522\times2.297-(-2.925)^2}\right]\times10^{-6}$$

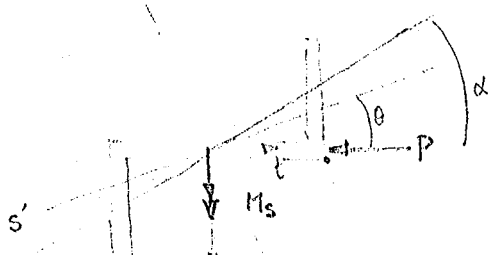
$$= 184.06\ \text{N-mm}\times\text{mm}^4\times\text{mm}^{-8} = 184.06\ \text{N/mm}^2 = 184.06\ \text{MPa}$$

מציאת הכיוון הנטרלי, לפתרון (a):

$$\tan\alpha = \frac{s}{t} = \frac{I_{tt}\tan\theta + I_{st}}{I_{ss}+I_{st}\tan\theta}$$

$$\tan\theta = M_s/M_t = 0$$

$$-24.16^\circ = \alpha \leftarrow -.448 = \frac{I_{st}}{I_{ss}} = \tan\alpha$$



(b) P גורם למומנט סביב s, וזרועו 4000mm

$$\sigma_x = \frac{-M_s I_{st}\cdot s + M_s I_{tt}\cdot t}{I_{ss}I_{tt}-I_{st}^2}$$

$\theta = 90° - \alpha$

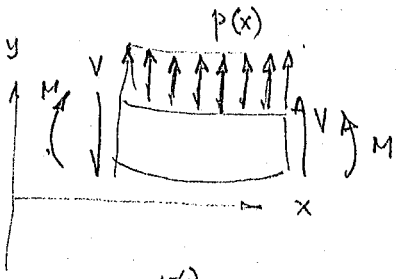
$\tan\alpha = \frac{I_{st}}{I_{tt}} = -.785 \Rightarrow \alpha = -38.14°$

$\tan\alpha = \frac{I_{st}}{I_{tt}} = \frac{s}{t}$, לכן

נמצא שנקודה B הינה הנקודה המרוחקת ביותר מציר הניטרלי, לכן $t = 65$, $s = 5$.

$$\sigma_x = 4\times10^6 \left[-\frac{(-2.925)(5) + (2.297)\times(65)}{2.297 \times 6.522 - (11.2)^2} \right] \times 10^{-6} = 4\times10^6 (25.51\times10^{-6}) = 102.06\ MPa$$

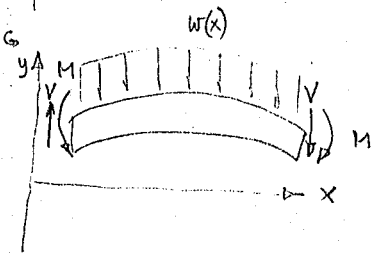
Popov



$$\sigma_x = \frac{-My}{I}$$

$$\frac{dV}{dx} = -p(x) \qquad \frac{dM}{dx} = -V$$

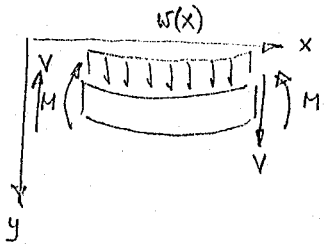
Cook & Young



$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \qquad \frac{dM}{dx} = -V$$

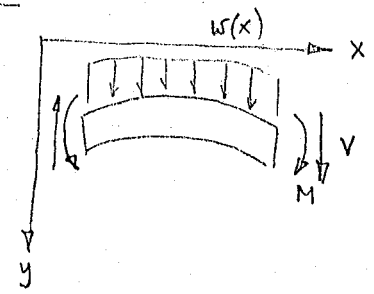
Patel & Venkatraman



$$\sigma_x = \frac{My}{I}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \qquad \frac{dM}{dx} = V$$

אלון

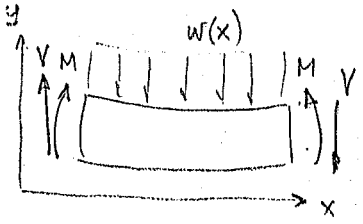


$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

שוותו דגרה כאן אבל הכיוונים של y, V+, M+, w שונים מהציור של Popov

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \qquad \frac{dM}{dx} = -V$$

Beer & Johnston
Hibbeler



$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\frac{dV}{dx} = -w(x) \qquad \frac{dM}{dx} = V$$

מכפל סימנים לפי פיזור

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

$$\frac{dM}{dx} = -V \qquad \frac{dV}{dx} = -p(x)$$

M_{zz} בלבד

$$\sigma_{xx}^{(1)} = -\frac{M_z y}{I_{zz}}$$

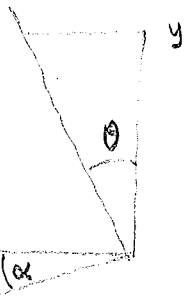
M_{yy} בלבד

$$\sigma_{xx}^{(2)} = \frac{M_{yy} z}{I_{yy}}$$

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_{zz} y}{I_{zz}} + \frac{M_{yy} z}{I_{yy}}$$

שלם α הינו חיובי

$$\sigma_{xx} = -\frac{M\cos\alpha \cdot y}{I_{zz}} + \frac{\left(-M\sin\alpha \cdot z\right)}{I_{yy}}$$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta z} = \frac{y - y_0}{z - z_0}$$

מפני שנקודה עוברת את מרכז הכובד

$$z_0 = y_0 = 0 \Rightarrow \frac{y}{z} = m = \tan\theta\cot$$

$M \blacktriangledown$

ציר נייטרלי הוא כאשר $\sigma_x = 0$

$$\frac{M_{xx}y}{I_{xx}} - \frac{M_{xy}z}{I_{xy}} = \frac{M_{xx}y}{I_{xx}} - \frac{M_{xy}z}{I_{xy}} = 0$$

$$\tan\alpha = \frac{I_{xx}}{I_{xy}} \cdot \frac{z}{y} = \tan\theta\cot$$

ציר הנייטרלי אינו מאונך, בדרך כלל, למישור שבו פועל את המומנט.

- כך כאשר $I_{xx} = I_{yy}$ (שטח חתך עיגולי) מישור שבו פועל מומנט מומנטים תוכל מאונך למישור שבו נמצאו הציר הנייטרלי.

שם שטח החתך הוא זווית, כפי שכתוב בספר "מכניקת שיווי משקל" הטלה והכוחות שעל המבנים z, y אינם הצירים הראשיים, אלא

$$\sigma_x = -\left(\frac{M_{zz}I_{yy} - M_{yy}I_{zz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2}\right)y + \left(\frac{M_{yy}I_{zz} - M_{zz}I_{yz}}{I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2}\right)z$$

1-

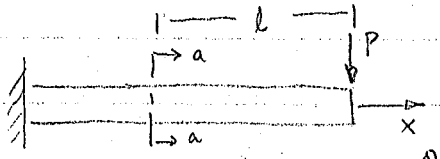
$$\tan\theta\cot = \frac{z}{y} = \frac{-I_{yz} + I_{zz}\tan\alpha}{I_{yy} - I_{yz}\tan\alpha}$$

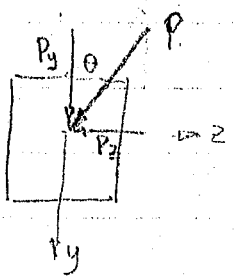
- הצירים y ו-z חייבים לעבור מרכז הכובד אבל אינם חייבים להיות ראשיים
- מישור בפיסה אינו מאונך למישור הנייטרלי
- כדי שלא יהיו מטמנים פיקולוים, צריך לוישם את התוחות במרכז הצירים.

כאשר יש שטח-חתך דו-סימטרי, מרכז הכובד הוא מרכז הצירים.

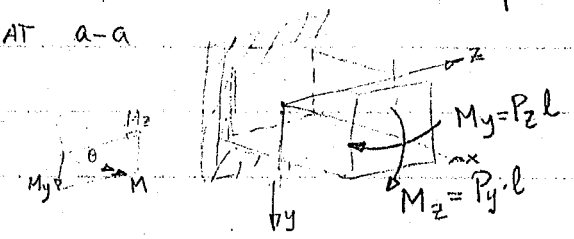
USE MATERIAL FROM BOOK

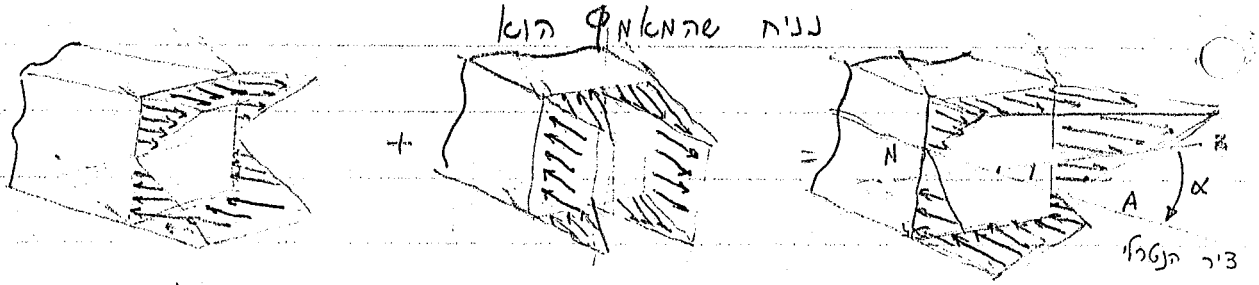
IF SUCH A FORCE ACTS - RESOLVE FORCES





AT a-a





$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_{zz}} + \frac{M_y z}{I_{yy}}$$

$$\sigma_x = \frac{M_y \cdot z}{I_{yy}} \quad ②$$

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_{zz}} \quad ①$$

SET $\sigma_x = 0$ TO GET NEUTRAL AXIS. AXIS LIES IN y-z plane

ציר הנטרלי: $\sigma_x = 0$. לכן, וכולם לקבל את ההשוואה של הקו. הציר שכבה מישור ה z-y.

לכן,

$$y = \frac{M_y z I_{zz}}{M_z I_{yy}}$$

נניח שהציר הנטרלי עושה זווית של α עם הציר z - הפונקציה. מכאן שהציר הכובד אין מאונך, הציר צריך לעבור דרך הנקודה הכאות. לכן מפני שהשיפוע (slope) של הקו הוא $m = \frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1}$, ומכיוון הכובד הוא נקודת הקו ומרכז הכובד הוא מקור הציר:

$$m = \tan\alpha = y/z$$

לכן,

ומכיוון

$$M_y = P_z l = P \sin\theta \cdot l$$

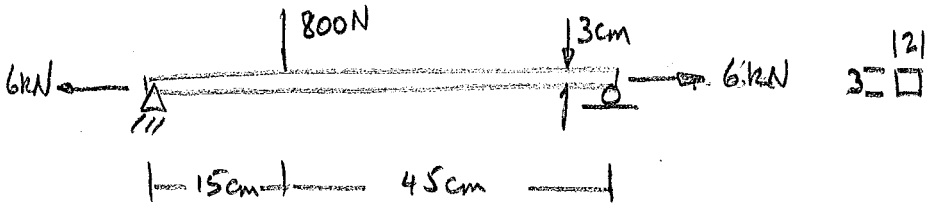
$$M_z = P_y l = P \cos\theta \cdot l$$

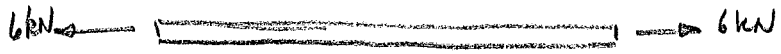
לכן

$$\frac{M_y}{M_z} = \tan\theta$$

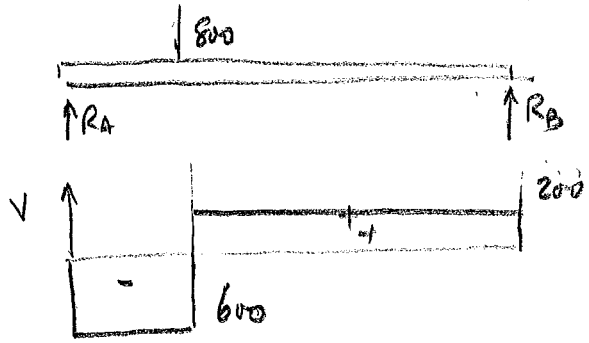
$$\tan\alpha = \frac{I_{zz}}{I_{yy}} \tan\theta$$

1-





$$\sigma_x = P/A = \frac{6000}{6\,cm^2} = 1000\ N/cm^2$$



$$\Sigma M_A = 800 \times 15 - R_B \cdot 60 = 0$$
$$R_B = 200\ N$$
$$\Sigma F = R_A + R_B - 800 = 0$$
$$R_A = 600\ N$$

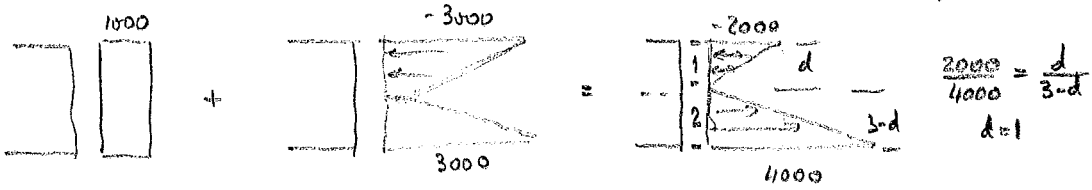


$$\text{opp}^n\ M = 600 \times 15\,cm = 9000\ N\text{-}cm$$

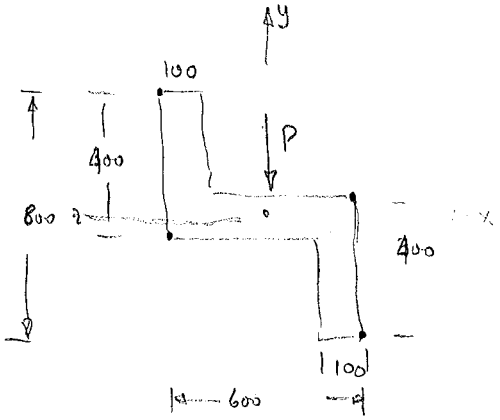


$$I = \frac{bh^3}{12}$$

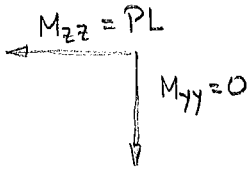
$$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{9000\,(1.5)}{\frac{(2)(3)^3}{12}}$$
$$= 3000\ N/cm^2$$



$$\frac{2000}{4000} = \frac{d}{3-d}$$
$$d = 1$$



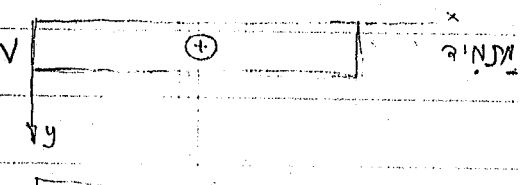
$$I_{zz} = 29. \times 10^8\ mm^4$$
$$I_{yy} = 56 \times 10^8\ mm^4$$
$$I_{yz} = 30 \times 10^8\ mm^4$$



$\alpha = 0$

$$\sigma_x = \frac{-(PLI_{yy})y}{I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2} - \frac{PLI_{yz}z}{I_{zz}I_{yy} - I_{yz}^2}$$

המומנט על הציר P_1 הוא תיובי $M = P_1(l-x)$



את השוואות הקוו ? מהו המאמץ המקסימלי ?
שנורם למתח בקיוון ציר ה-x התיובי . מה קורה לציר הנייטרלי ואיך למצוא
אותך שנורם לכפיפה והזומס הנוי



נסתכל במוט שלנו יש שני זומסים -
כאשר יש כפיפה טהורה, ציר הנייטרלי הולך דרך מרכז הכובד.

— פעולה משולבת של כוח צירי ומומנט כפיפה (Combined action of axial force + bending moments)

כאשר יש שילוב-תוך בין-סימטרי, מרכז הצירה הוא מרכז הכובד.
כדי שלא יהיו מאמצים פיתוליים, צריך ליישם את הכוחות במרכז הצירה (נדון על זה בהמשך).

- $\alpha \neq \theta$ והמישור כפיפה אינו מאונך למישור הנייטרלי
- הצירים z ו-y חייבים לעבור דרך מרכז הכובד אבל אינם מחויבים להיות הצי
- הצורת α מיוחסת ל-θ והיחוס הוא

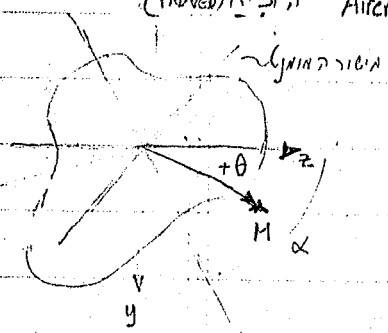
$$\frac{z}{y} = \tan\alpha = \frac{I_{zz}\tan\theta + I_{yz}}{I_{yy} + I_{yz}\tan\theta}$$

והצורת α מיוחסת ל-θ והיחוס הוא

$$\sigma_x = -\left(\frac{M_z I_{yy} + M_y I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\right) y + \left(\frac{M_y I_{zz} + M_z I_{yz}}{I_{yy} I_{zz} - I_{yz}^2}\right) z$$

שהמאמץ שווה ל-

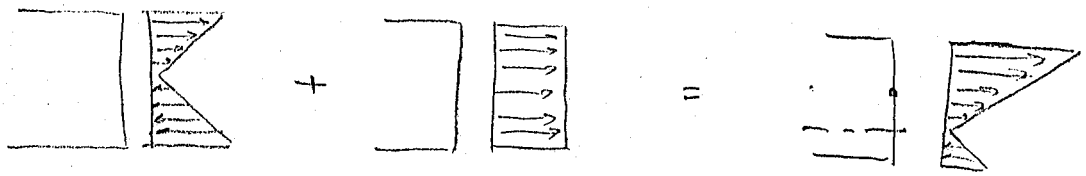
• טוב לדעת שלא-התקן שרירותית (ARBITRARY), פיזי כפי שלו Aircraft Structures הוא (PROVED).



• משלא-התקן ראשוני, כלומר ש $I_{yy} = I_{zz}$, אז $\theta = \alpha$.

— כמה דברים נוספים:

שווה לצורת על הצומס. במצב הכה מישור הכפיפה הוא מאונך למישור הנייטרלי.
או שהמומנט עושה זאת הציר-z. רק אם $I_{yy} = I_{zz}$ שהציר הנייטרלי עושה צורת
THUS $\theta \neq \alpha$. ONLY WHEN $I_z = I_y \Rightarrow \theta = \alpha$



סך-הכל = +

$\sigma_{x_1} = \frac{-My}{I_{zz}}$ + $\sigma_{x_2} = \frac{P_z}{A}$

התיר הנתרלי בד. ממקומו ובה תלוי בגורם σ_{x_2}. בה התיר על עובדי דרך מרכב הכובף

- וכולים לעשות בה אך ורק כאשר התנועות כלפי הַיְיוּן-ע ין קטנות displ small
- וכולים לעשות בה כאשר העיבורים הם עדיין אלסטיים וש קשר לינארי ε still elastic
למאמצים.

- אם התנועות על קטנות, ין אַפְשָׁרוּת את המאמצים לפרמים (אם העומס P_z COMPRESSIVE LOAD INCREASE DISPLACEMENT
הוא עומס יַתְּכִי).

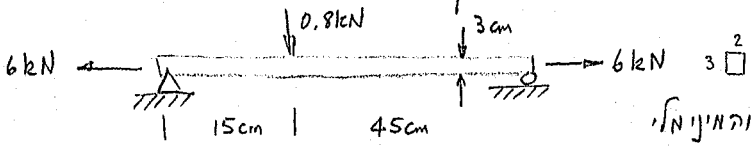
- הפרעות השלה על מַבְּיִים את המאמצים במקום קרוב למקום שבו פועלים את העומסים.

stresses in picture region away from load



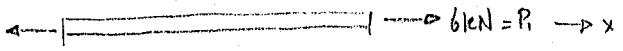
דוגמה

מוט בין שלח-תתק 2cm x 3cm, באורך 60cm, ללא משקל, עומס במורכלה בשיווי

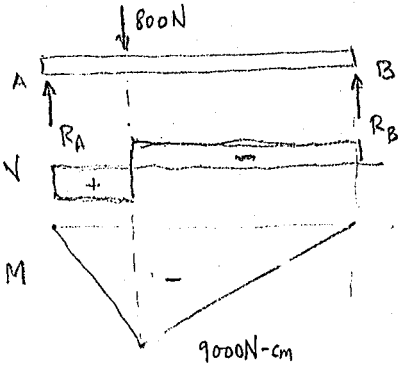


למצוא: את המאמץ המקסימלי והמינימלי

הנחות: המוט פועל כמוט אלסטי
המוט הומוגני

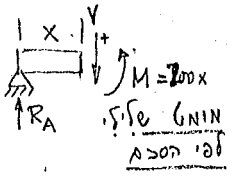


$\sigma_x = \frac{P_1}{A} = \frac{6000}{2\times3} = 1000\ N/cm^2$ מכות התיר:



$\Sigma M_A = 800\times15 - R_B\cdot60 = 0$ $R_B = 200N$

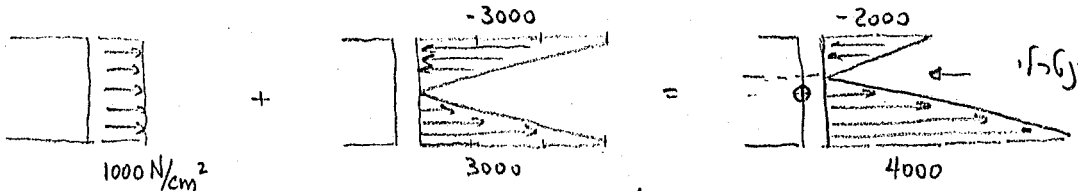
$\Sigma F = -(R_A+R_B)+800 = 0$ $R_A = 600N$



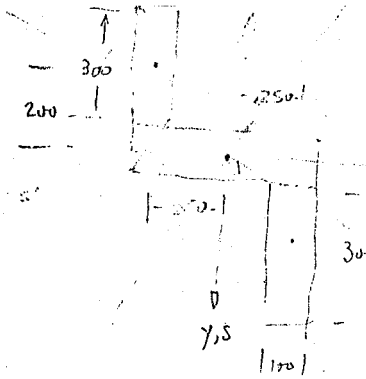
MOMENT פנימי לפי הסכם

לחשב את המאמץ שהוא מהבעיה

$\sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(9000\ N\text{-}cm)\cdot 1.5\ cm}{2\cdot 3^3/12} = \pm 3000\ N/cm^2$



- מאמץ הכפיפה שווה מעל מאמץ הכוח הצירי.
- התיר הנתרלי נמצא ולכן הולך בדרך מרכב הכובף



		$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$\bar{z}$	$A\bar{z}$
①	300×100	-200	-105×10^5	-250	-75×10^5
②	600×100	0	0	0	0
③	300×100	200	105×10^5	250	75×10^5
	ΣA 12×10^4		0		0

$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = 0 \qquad \bar{z} = 0$$

	I_{zz_o}	A	d^2	I_{tt}
①	$\frac{1}{12}(100)(300)^3$	3×10^4	$(+200)^2$	$2.25\times10^8 + 12\times10^8 = 14.25\times10^8$
②	$\frac{1}{12}(600)(100)^3$	6×10^4	0	0.5×10^8
③	$\frac{1}{12}(100)(300)^3$	3×10^4	$(-200)^2$	14.25×10^8
				29×10^8

	I_{yy_o}	A	e^2	I_{ss}
①	$\frac{1}{12}(300)(100)^3$	3×10^4	$(250)^2$	$25\times10^6 + 1875\times10^6 = 19\times10^8$
②	$\frac{1}{12}(100)(600)^3$	6×10^4	$(0)^2$	18×10^8
③	$\frac{1}{12}(300)(100)^3$	3×10^4	$(-250)^2$	19×10^8
				56×10^8

I_{yz_o}	A	ed	I_{st}
0	3×10^4	$(250)(200)$	15×10^8
0	6×10^4	$0\cdot0$	0
0	3×10^4	$(-250)(-200)$	15×10^8
			30×10^8

$$I_{t't'} = \frac{I_{ss}+I_{tt}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{tt}-I_{ss}}{4}\right)^2 + I_{st}^2}$$

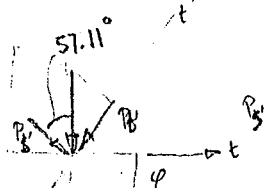
$$= 42.5\times10^8 + \sqrt{\left(\frac{27\times10^8}{4}\right)^2 + (30\times10^8)^2} = 42.5\times10^8 + 32.898\times10^8 = 75.398\times10^8$$

$$I_{s's'} = \frac{I_{ss}+I_{tt}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{tt}-I_{ss}}{2}\right)^2 + I_{st}} = 42.5\times10^8 - 32.898\times10^8 = 9.602\times10^8$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2I_{st}}{I_{tt}-I_{ss}} = \frac{2\cdot30\times10^8}{29\times10^8 - 56\times10^8} = \frac{60}{-27} = -2.222$$

$$2\varphi = -65.77^\circ \qquad \varphi = -32.89^\circ$$

$$I_{s't'} = 0$$



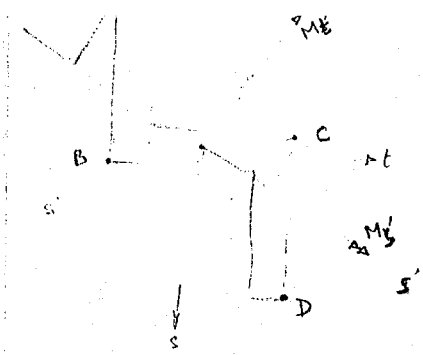
$P_{s'} = P\cos 57.11^\circ$

$P_{t'} = P\sin 57.11^\circ$

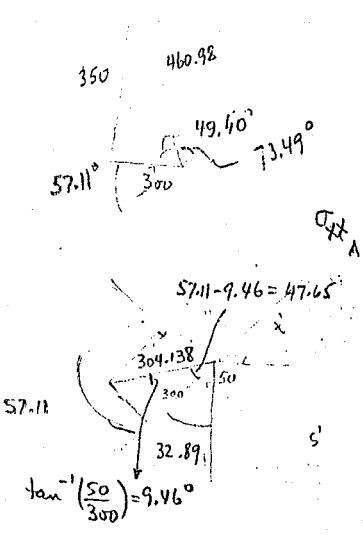
$M_{t'} = PL\cos 57.11^\circ = P_{t'}\ell$

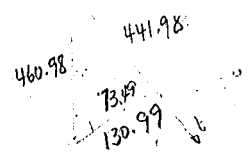
$M_{s'} = PL\sin 57.11^\circ$

$\sigma = -M_{t'}s' + M_{s't'}$



$\sigma_x = -\frac{M_t s'}{I_{tt'}} + \frac{M_s t'}{I_{ss'}}$





$t = -s\sin\varphi + t\cos\varphi$ $\quad s = -350$ $\quad t = -300$

$$\sigma_{xx_A} = \frac{+PL\sin 57.11°\,(+130.99)}{9.602\times10^8} - \frac{PL\cos 57.11°\,(-441.98)}{75.398\times10^8} = PL\cdot 14.64\times10^{-8}$$

$s' = 304.138\sin 47.65 = 224.77$

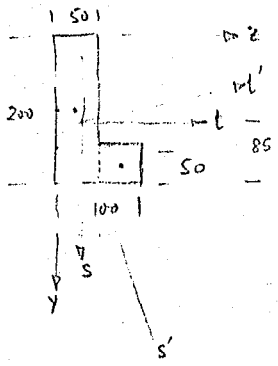
$t' = 304.138\cos 47.65 = 204.88$

$$\sigma_{xx_B} = \frac{+PL\sin 57.11°\,(-204.88)}{9.602\times10^8} - \frac{PL\cos 57.11°\,(-224.77)}{75.398\times10^8}$$

$\sigma_{xx_C} = -\sigma_{xx_B}$

$\sigma_{xx_A} = -\sigma_{xx_D}$

2



	A	$\bar{y}$	$A\bar{y}$	$\bar{z}$	$A\bar{z}$
①	50×200	100	1×10^6	25	2.5×10^5
②	50×50	175	4.375×10^5	75	1.875×10^5
	12500		14.375×10^5		4.375×10^5

$\bar{y} = 115 = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}$ $\qquad \bar{z} = 35 = \frac{\Sigma A\bar{z}}{\Sigma A}$

	I_{zz_0}	A	d^2	I_{tt}
①	$\frac{1}{12}(50)(200)^3$	1×10^4	$(15)^2$	$33.33\times10^6 + 2.25\times10^6 = 35.583\times10^6$
②	$\frac{1}{12}(50)(50)^3$	$.25\times10^4$	$(-60)^2$	$.52083\times10^6 + 9\times10^6 = 9.521\times10^6$
				45.104×10^6

	I_{yy_0}	A	e^2	I_{ss}
①	$\frac{1}{12}(200)(50)^3$	1×10^4	10^2	$2.0833\times10^6 + 1\times10^6 = 3.0833\times10^6$
②	$\frac{1}{12}(50)(50)^3$	$.25\times10^4$	$(-40)^2$	$.52083\times10^6 + 4\times10^6 = 4.5208\times10^6$
				7.6041×10^6

	I_{yz_0}	A	e d	I_{st}
①	0	1×10^4	10(15)	1.5×10^6
②	0	$.25\times10^4$	(-60)(-40)	6×10^6
				7.5×10^6

$$\tan 2\varphi = \frac{2I_{st}}{I_{tt} - I_{ss}} = \frac{2\times7.5\times10^6}{(45.104-7.604)\times10^6} = 0.4$$

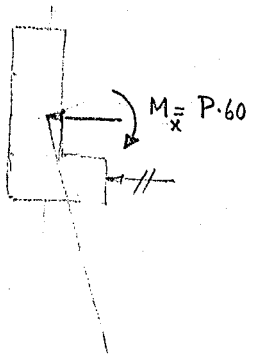
$2\varphi = 21.80°$

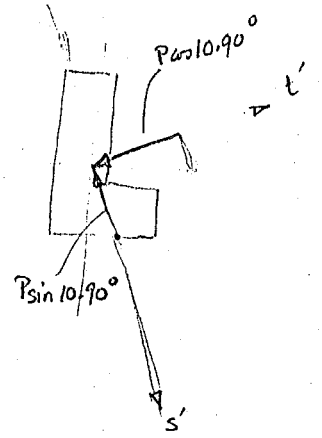
$$= \frac{I_{ss} + I_{tt}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{ss} - I_{tt}}{2}\right)^2 + I_{st}^2}$$

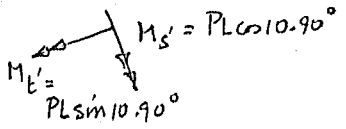
$$= \left(\frac{17.604 + 45.104}{2} + \sqrt{\left(\frac{37.5}{2}\right)^2 + (7.5)^2} \right) \times 10^6 = 26.354 + 20.194 = 46.548 \times 10^6$$

$$I_{s's'} = \frac{I_{ss} + I_{tt}}{2} - \sqrt{\qquad} = 26.354 - 20.194 = 6.16 \times 10^6$$

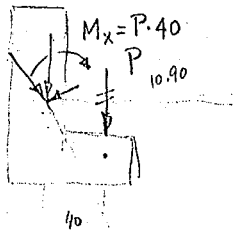
$$I_{s't'} = 0$$







$$\sigma_{xx} = \frac{PL \sin 10.90^\circ}{I_{t't'}} s' + \frac{PL \cos 10.90^\circ}{I_{s's'}} t'$$



t'

$P_{s'} = +P \cos 10.90$
$P_{t'} = -P \sin 10.90$

$M_{t'} = PL \cos 10.90$
$M_{s'} = +PL \sin 10.90$

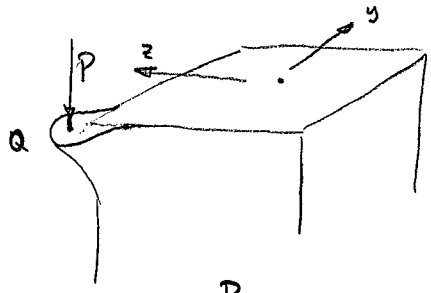
$$\sigma_{xx} = \frac{-M_{t'}}{I_{t't'}} s' + \frac{M_s}{I_{s's'}} t'$$

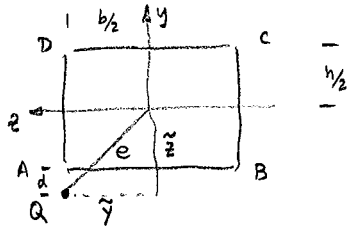
$$= -\frac{PL \cos 10.90 \cdot s'}{46.548 \times 10^6} + \frac{PL \sin 10.90 \cdot t'}{6.16 \times 10^6}$$

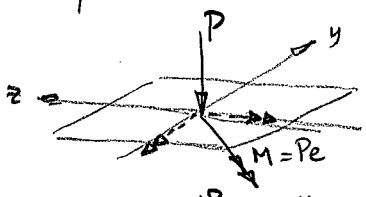
s'

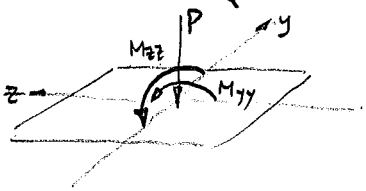
ארז'ן התנך

נמצאנו את הקווים שבו הנורמל $\sigma_x=0$.
אם יש כוח צירי אבל אקסנטרי יש אפשרות שהקווים יצוי למקום אחר.
נוכל למצוא את מחק מערכי הבובה שבו נפגוש את הכוח בציר ש- הקווים עם $\sigma_x=0$ לפי
יעבור במקום על תנך הקורה או המוט.









אפשר להשתמש בערכת אקוויולנטית
להעביר את הכוח למרכז הבובה

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z}{I_{zz}}y + \frac{M_y}{I_{yy}}z$$

$\sigma_x|_A \left(y=-h/2, z=b/2\right)$ $\quad \sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z}{I_{zz}}\left(-h/2\right) + \frac{M_y}{I_{yy}}\left(b/2\right)$

P, M_y, M_z שלילי כל
$M_z = +P\tilde{z} = +P(d+h/2)$
$M_y = +P\tilde{y} = +P(b/2)$

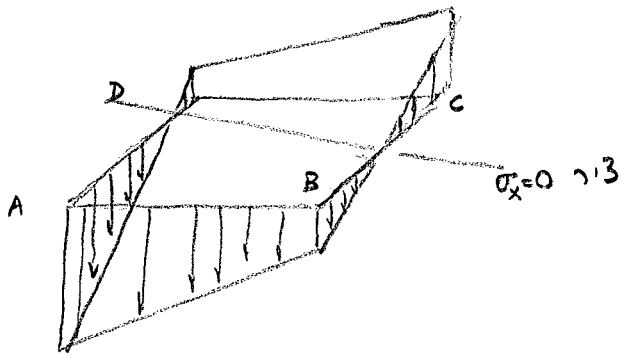
$\sigma_x|_C \left(y=h/2 \;\; z=-b/2\right)$ $\quad \sigma_x = P/A - \frac{M_z}{I_{zz}}\left(h/2\right) + \frac{M_y}{I_{yy}}\left(-b/2\right)$

$h=6"$ $\quad b=12"$ $\quad 3"=d$ $\quad P=14.4\,kip$ נתון

$$M_z = +P(d+h/2) = -14.4\,(3+3) = -86.4\ kip\text{-}in$$
$$M_y = P\left(b/2\right) = -14.4\,(6) = -86.4\ kip\text{-}in$$
$$P = -14.4\ kip$$
$$A = bh = 12\cdot 6 = 72\ in^2$$
$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{12\cdot 6^3}{12} = 216\ in^4$$
$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6\cdot 12^3}{12} = 864\ in^4$$

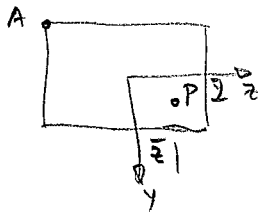
$$\sigma_x|_A = \frac{-14.4}{72} - \frac{(-86.4)(-3)}{216} + \frac{(-86.4)(6)}{864} = -0.2 - 1.2 - 0.6 = -2.0\ \frac{kip}{in^2} = -2000\ psi$$

$$\sigma_x|_C = \frac{-14.4}{72} - \frac{(-86.4)(3)}{216} + \frac{(-86.4)(-6)}{864} = -0.2 + 1.2 + 0.6 = 1.6\ \frac{kip}{in^2} = 1600\ psi$$



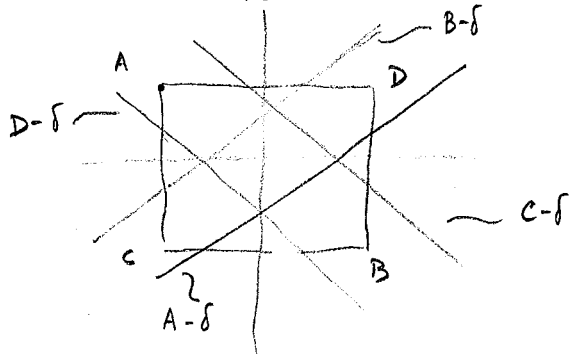
מבקש את התאזור שבו פועל את P כדי שלכל יהיו מאומצים תיובויים

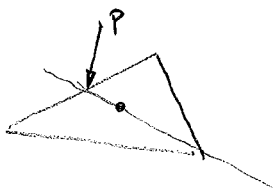
בחתך בנקודה D $P=-P_0 \quad M_y=-P_0 z \quad M_z=+P_0 y$

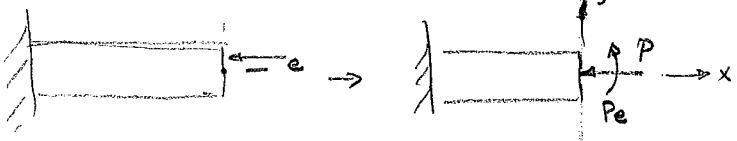


$$\sigma_x=0=-\frac{P}{A}-\frac{P_0\bar{y}(-b/2)}{I_{zz}}+\frac{(-P_0\bar{z})(-h/2)}{I_{yy}}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{\bar{z}}{h/6}+\frac{\bar{y}}{b/6}$$







$$\sigma = \frac{-My}{I} - \frac{P}{A}$$

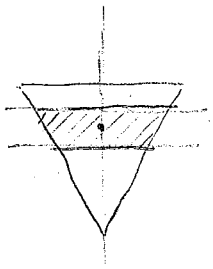
$$= \frac{-Pe}{bh^3/36}(-2h/3) - \frac{P}{bh/2}$$

כדי שלא יהיו מאמצים חוברים $= \frac{2Pe}{bh^3/12} - \frac{P}{bh/2} = 0$

$$\frac{2e}{h/6} - 1 = 0 \qquad e = h/12$$



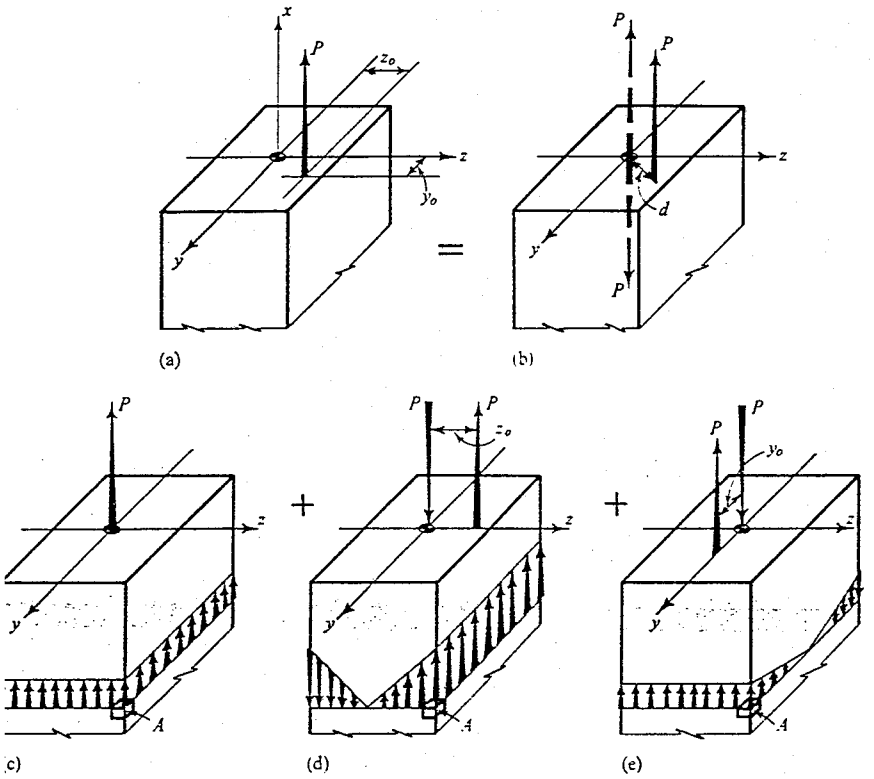
$$\sigma = \frac{-(-Pe)y}{bh^3/36} - \frac{P}{bh/2}$$



$\sigma = \frac{Pe(h/3)}{bh^3/36} - \frac{P}{bh/2}$ מאמץ חוזר כי $y = h/3$

$$0 = \frac{Pe}{bh^2/12} - \frac{P}{bh/2}$$

$$\frac{e}{h/6} - 1 = 0 \qquad e = h/6$$



ig. 8-11. Resolution of a problem into three problems, each one f which may be solved by the methods previously discussed.

are the principal axes, Eq. 8-8 is applicable to prismatic members of any cross-sectional shape.

For a given loading condition Eq. 8-8 can be rewritten as

$$\sigma_x = A + By + Cz \tag{8-9}$$

where A, B, and C are constants. This is seen to be an equation of a plane; it clearly shows the nature of stress distribution. For the linearly elastic case under discussion, dividing through Eq. 8-9 by the elastic modulus E recovers the basic kinematic assumption of the technical theory, i.e.,

$$\varepsilon_x = a + by + cz \tag{8-10}$$

where a, b, and c are constants.

KERN - 1978

Section 8-4
Eccentrically loaded members

In some eccentrically loaded members it is possible to locate the line of zero stress within the cross-sectional area of a member by determining a line where $\sigma_x = 0$. This line is analogous to the neutral axis occurring in pure bending. Unlike the former case, however, with $P \neq 0$ this line does not pass through the centroid of a section. For large axial loads and small moments, it lies outside the cross section. Its significance lies in the fact that the normal stresses vary linearly from it.

This method is applicable for compression members providing their length is small in relation to their transverse dimensions. Slender bars in compression require special treatment (Chapter 14). Also, near the point of application of the force, the analysis developed here is incorrect. There the stress distribution is greatly disturbed and is similar to a local stress concentration (see Art. 4-18 and especially Fig. 4-30).

EXAMPLE 8-5

Find the stress distribution at the section $ABCD$ for the block shown in Fig. 8-12(a) if $P = 14.4$ kips. At the same section, locate the line of zero stress. Neglect the weight of the block.

SOLUTION

The forces acting on the section $ABCD$, Fig. 8-5(c), are $P = -14.4$ kips, $M_{yy} = -14.4(6) = -86.4$ kip-in., and $M_{zz} = -14.4(3 \div 3) = -86.4$

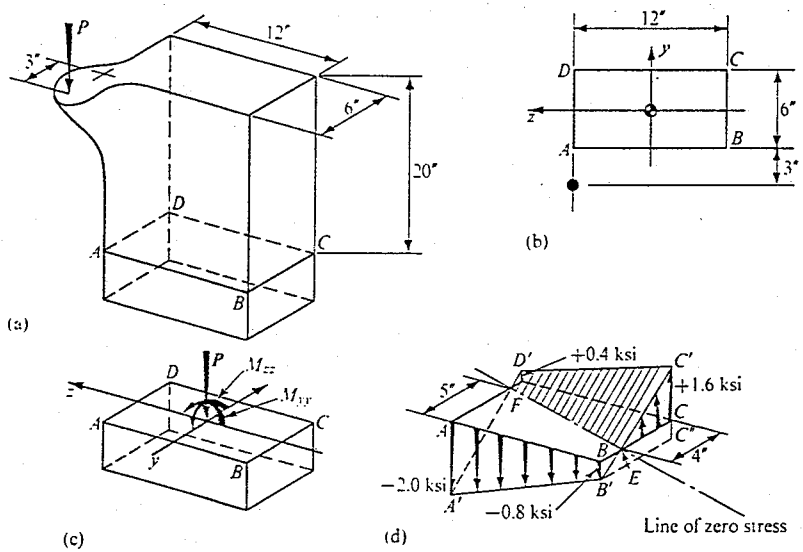


Fig. 8-12

kip-in. The cross section of the block $A = 6(12) = 72$ in.^{2}, and the respective section moduli are $S_{zz} = 12(6)^2/6 = 72$ in.^{3} and $S_{yy} = 6(12)^2/6 = 144$ in.^{3} Hence, using a relation equivalent to Eq. 8-8 gives the compound normal stresses for the corner elements:

$$\sigma = \frac{P}{A} \mp \frac{M_{zz}}{S_{zz}} \pm \frac{M_{yy}}{S_{yy}} = -\frac{14.4}{72} \pm \frac{86.4}{72} \mp \frac{86.4}{144} = -0.2 \pm 1.2 \mp 0.6$$

Here the units of stress are kips per square inch. The sense of the forces shown in Fig. 8-12(c) determines the signs of stresses. Therefore, if the subscript of the stress signifies its location, the corner normal stresses are:

$$\sigma_A = -0.2 - 1.2 - 0.6 = -2.0 \text{ ksi}$$

$$\sigma_B = -0.2 - 1.2 + 0.6 = -0.8 \text{ ksi}$$

$$\sigma_C = -0.2 + 1.2 + 0.6 = +1.6 \text{ ksi}$$

$$\sigma_D = -0.2 + 1.2 - 0.6 = +0.4 \text{ ksi}$$

These stresses are shown in Fig. 8-12(d). The ends of these four stress vectors at A', B', C', and D' lie in the plane $A'B'C'D'$. The vertical distance between the planes $ABCD$ and $A'B'C'D'$ defines the compound stress at any point on the cross section. The intersection of the plane $A'B'C'D'$ with the plane $ABCD$ locates the line of zero stress FE.

By drawing a line $B'C''$ parallel to BC, similar triangles $C'B'C''$ and $C'EC$ are obtained: thus the distance $CE = [1.6/(1.6 + 0.8)]6 = 4$ in. Similarly, the distance AF is found to be 5 in. Points E and F locate the line of zero stress.

EXAMPLE 8-6

Find the zone over which the vertical downward force P_o may be applied to the rectangular weightless block shown in Fig. 8-13(a) without causing any tensile stresses at the section A-B.

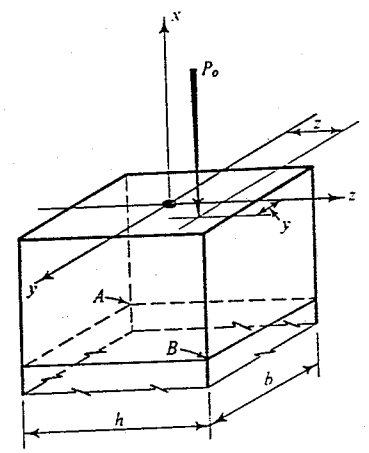
SOLUTION

The force $P = -P_o$ is placed at an arbitrary point in the first quadrant of the y-z coordinate system shown. Then the same reasoning used in the preceding example shows that with this position of the force the greatest tendency for a tensile stress exists at A. With $P = -P_o$, $M_{zz} = +P_o y$ and $M_{yy} = -P_o z$, setting the stress at A equal to zero fulfills the limiting condition of the problem. Using Eq. 8-8 allows the stress at A to be expressed as:

$$\sigma_A = 0 = \frac{(-P_o)}{A} - \frac{(P_o y)(-b/2)}{I_{zz}} + \frac{(-P_o z)(-h/2)}{I_{yy}}$$

or

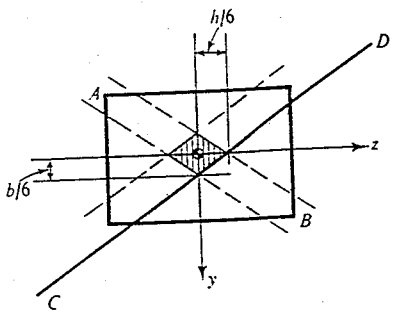
$$-\frac{P_o}{A} + \frac{P_o y}{b^2 h/6} + \frac{P_o z}{bh^2/6} = 0$$



(a)

M_z - ve M_y - ve $\sigma_x > 0$

At A ($y = -b/2$, $z = -h/2$)



(b)

Fig. 8-13

Simplifying $[z/(h/6)] + [y/(b/6)] = 1$, which is an equation of a straight line. It shows that when $z = 0$, $y = b/6$; and when $y = 0$, $z = h/6$. Hence this line may be represented by the line CD in Fig. 8-13(b). A vertical force may be applied to the block anywhere on this line and the stress at A will be zero. Similar lines may be established for the other three corners of the section; these are shown in Fig. 8-13(b). If the force P is applied on any one of these lines or on any line parallel to such a line toward the centroid of the section, there will be no tensile stress at the corresponding corner. Hence the force P may be applied anywhere within the shaded area in Fig. 8-13(b) without causing tensile stress at any of the four corners or anywhere else. This zone of the cross-sectional area is called the *kern* of a section.

If for a rectangular block the location of the force P is limited to one of the lines of symmetry, the maximum eccentricity $e = h/6$ to give zero stress along one of the edges, Figs. 8-14(a) and (b). This leads to a practical rule, much used in the past by designers of masonry structures: If the resultant of vertical forces acts within the middle third of a rectangular section, there is no tension in the material at that section. If, further, the applied load P acts outside the middle third and the contact surfaces cannot transmit tensile forces, one has the case shown in Figs. 8-14(c) and (d). Here, assuming elastic action, the normal stress at B may be expressed as

$$\sigma_B = -\frac{P}{xb} + P\left(\frac{x}{2} - a\right)\frac{6}{bx^2} = 0$$

where $(x/2) - a$ is the eccentricity of the applied force with respect to

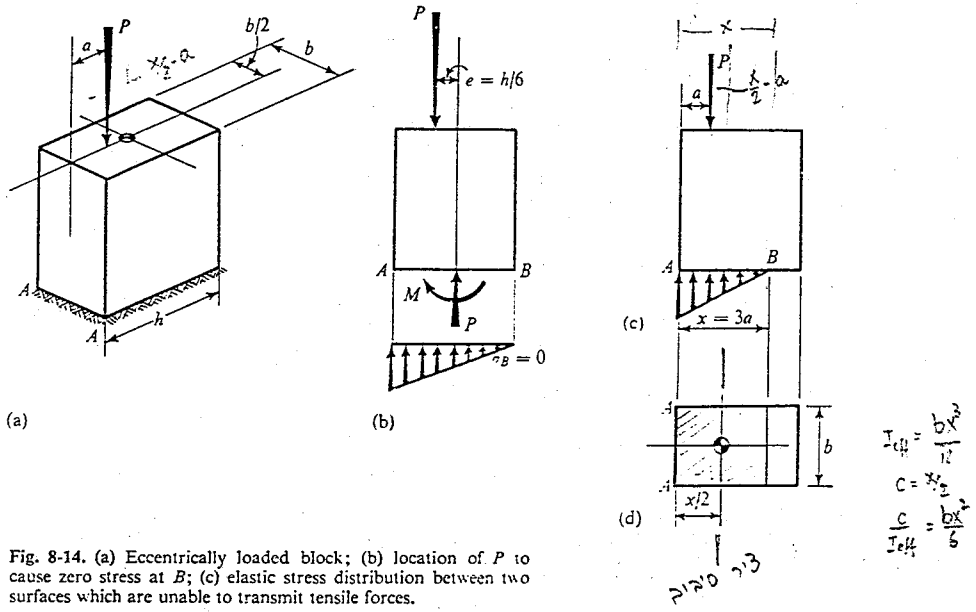


Fig. 8-14. (a) Eccentrically loaded block; (b) location of P to cause zero stress at B; (c) elastic stress distribution between two surfaces which are unable to transmit tensile forces.

the centroidal axis of the shaded contact area, and $bx^2/6$ is its section modulus. Solving for x, one finds that $x = 3a$; the pressure distribution will be "triangular" as in Fig. 8-14(c) (why?). As a decreases, the intensity of pressure on the line A-A increases; when a is zero, the block becomes unstable. Such problems are important in the design of foundations.

8-5. SUPERPOSITION OF SHEARING STRESSES

In the preceding part of the chapter superposition of the normal stresses σ_x was the principal concern. In problems where both the elastic torsional and direct shearing stresses can be determined, the compound shearing stress also may be found by superposition. This corresponds to superposition of the off-diagonal stresses in Eq. 8-1. Here attention will be directed to instances where the shearing stresses being superposed not only act on the same element of area but also have the same line of action.* Only elastic stresses fall within the scope of this treatment.

* Noncolinear shearing stresses acting on the same element of area can be added vectorially.

Section 8-5
Superposition of shearing stresses

EXAMPLE 8-7

Find the maximum shearing stress due to the applied forces in the plane A-B of the ½ in.-diameter, high-strength shaft in Fig. 8-15(a).

SOLUTION

The free body of a segment of the shaft is shown in Fig. 8-15(b). The system of forces at the cut necessary to keep this segment in equilibrium consists of a torque $T = 200$ in-lb, a shear $|V| = 60$ lb, and a bending moment $M = 240$ in-lb.

Because of the torque T, the shearing stresses in the cut A-B vary linearly from the axis of the shaft and reach the maximum value given by Eq. 5-4, $\tau_{max} = Tc/J$. These maximum shearing stresses, agreeing in sense with the resisting torque T, are shown at points A, B, D, and E in Fig. 8-15(c).

The "direct" shearing stresses caused by the shearing force V may be obtained by using Eq. 7-6, $\tau = VQ/(It)$. For the elements A and

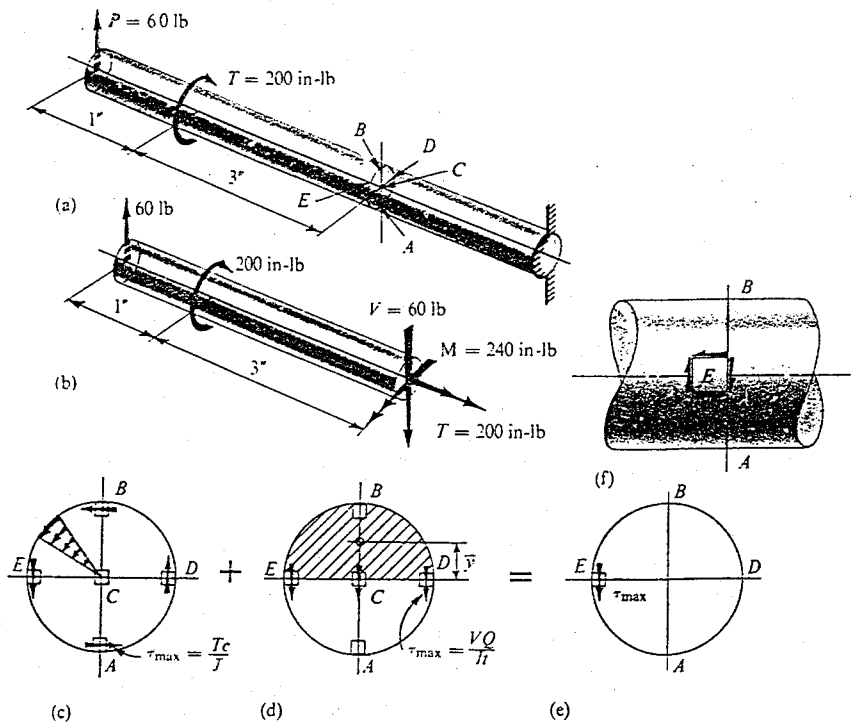


Fig. 8-15

B, Fig. 8-15(d), $Q = 0$, hence $\tau = 0$. The shearing stress reaches its maximum value at the level ED. To determine this, consider Q equal to the shaded area in Fig. 8-15(d) multiplied by the distance from its centroid to the neutral axis. The latter quantity is $\bar{y} = 4c/(3\pi)$, where c is the radius of the cross-sectional area. Hence $Q = (\pi c^2/2)[4c/(3\pi)] = 2c^3/3$. Moreover, since $t = 2c$, and $I = J/2 = \pi c^4/4$, the maximum direct shearing stress is

$$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{2c}\frac{2c^3}{3}\frac{4}{\pi c^4} = \frac{4V}{3\pi c^2} = \frac{4V}{3A}$$

$Q = \int y\,dA = \bar{y} \cdot A$

where A is the entire cross-sectional area of the rod. In Fig. 8-15(d) this shearing stress is shown acting downward on the elementary areas at E, C, and D. This direction agrees with the direction of the shear V.

To find the maximum compound shearing stress in the plane A-B, the stresses shown in Figs. 8-15(c) and (d) are superposed. Inspection shows that the maximum shearing stress is at E since in the two diagrams the shearing stresses at E have the same direction and sense. There are no direct shearing stresses at A and B, and at C there is no torsional shearing stress. The two shearing stresses have an opposite sense at D. The five points A, B, C, D, and E thus considered for the compound shearing stress are all that may be adequately treated by the methods developed in this text. However, this procedure selects the elements where the maximum shearing stresses occur.

$$J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(0.5)^4}{32} = 0.00614 \text{ in.}^4 \quad \text{and} \quad I = \frac{J}{2} = 0.00307 \text{ in.}^4$$

$$A = \pi d^2/4 = 0.196 \text{ in.}^2$$

$$(\tau_{max})_{torsion} = \frac{Tc}{J} = \frac{200(0.25)}{0.00614} = 8{,}150 \text{ psi}$$

$$(\tau_{max})_{direct} = \frac{VQ}{It} = \frac{4V}{3A} = \frac{4(60)}{3(0.196)} = 408 \text{ psi}$$

$$\tau_E = 8{,}150 + 408 = 8{,}560 \text{ psi}$$

A planar representation of the shearing stress at E with the matching stresses on the longitudinal planes is shown in Fig. 8-15(f). No normal stress acts on this element as it is located on the neutral axis.

8-6. STRESSES IN CLOSELY COILED HELICAL SPRINGS

Helical springs, such as the one shown in Fig. 8-16(a), are often used as elements of machines. With certain limitations, these springs may be analyzed for elastic stresses by a method similar to the one used in the preceding example. The discussion will be limited* to springs manufactured from rods or wires of circular cross section. Moreover, any one coil of such a spring will be assumed to lie in a plane which is nearly perpendicular to the axis of the spring. This requires that the adjoining coils be close together. With this limitation, a section taken perpendicular to the axis of the spring's rod becomes nearly vertical.† Hence to maintain equilibrium of a segment of the spring, only a shearing force $V = F$ and a torque $T = F\bar{r}$ are required at all sections through the rod, Fig. 8-16(b).‡ Note that $\bar{r}$ is the distance from the axis of the spring to the centroid of the rod's cross-sectional area.

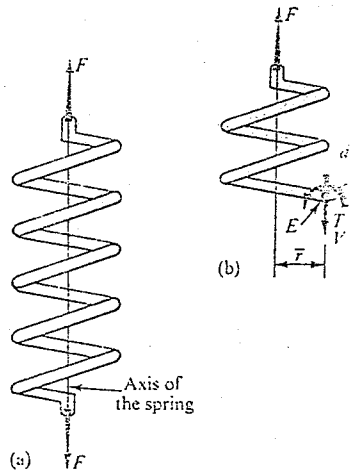


Fig. 8-16. Closely coiled helical spring.

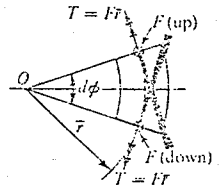
The maximum shearing stress at an arbitrary section through the rod could be obtained as in the preceding example by superposing the torsional and the direct shearing stresses. This maximum shearing stress occurs at the inside of the coil at point E, Fig. 8-16(b). However, in the analysis of springs it has become customary to assume that the shearing stress caused by the direct shearing force is uniformly distributed over the cross-sectional area of the rod. Hence, the nominal direct shearing stress for any point on the cross section is $\tau = F/A$. Superposition of this stress and the torsional shearing stress at E gives the maximum compound shearing stress. Thus since $T = F\bar{r}$, $d = 2c$, and $J = \pi d^4/32$

$$\tau_{max} = \frac{F}{A} + \frac{Tc}{J} = \frac{Tc}{J}\left(\frac{FJ}{ATc} + 1\right) = \frac{16F\bar{r}}{\pi d^3}\left(\frac{d}{4\bar{r}} + 1\right) \qquad (8\text{-}11)$$

* For a complete discussion on springs see A. M. Wahl, *Mechanical Springs* (Cleveland, Ohio: Penton Publishing Co., 1944).

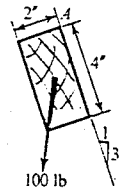
† This eliminates the necessity of considering an axial force and a bending moment at the section taken through the spring.

‡ In previous work it has been reiterated that if a shear is present at a section, a change in the bending moment must take place along the member. Here a shear acts at every section of the rod, yet no bending moment nor a change in it occurs. This is so only because the rod is curved. An element of the rod viewed from the top is shown in the figure. At both ends the torques are equal to $F\bar{r}$ and act in the directions shown. The component of these vectors toward the axis of the spring O, resolved at the point of intersection of the vectors, $2F\bar{r}\,d\phi/2 = F\bar{r}\,d\phi$, opposes the couple developed by the vertical shears $V = F$, which are $\bar{r}\,d\phi$ apart.



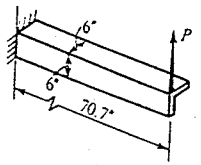
Determine the required dimensions of the beam so that the maximum stress due to bending does not exceed 1,500 psi. (b) Locate the neutral axis of the beam and show its position on the sketch.

8-20. A full-sized, 2-in.-by-4-in. cantilever projects 4 ft from a wall in a tilted position as shown in the figure. At the free end a vertical force of 100 lb is applied which acts through the centroid of the section. Determine the maximum flexural stress, caused by the applied force, in the beam at the built-in end and locate the neutral axis. Neglect the weight of the beam. *Ans.* ±1,423 psi, 3.34 in.



PROB. 8-20

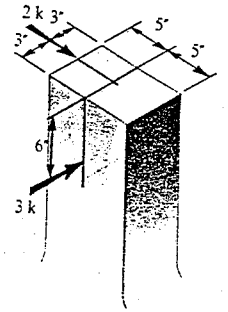
8-21. A 6-in.-by-6-in.-by-½-in. steel angle with one of its legs placed in a horizontal position and its other leg directed downward is used as a cantilever 70.7 in. long, see figure. If an upward force of 1,000 lb is applied at the end of this cantilever through the shear center, what are the maximum tensile and compressive stresses at the built-in end? Neglect the weight of the angle. (See hint for Prob. 6-22.) *Ans.* 14.7 ksi, −18.4 ksi.



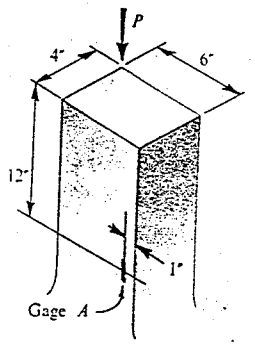
PROB. 8-21

8-22. If the block shown in Fig. 8-12 is made from steel weighing 0.283 lb per cubic inch, find the magnitude of the force P necessary to cause zero stress at D. Neglect the weight of the small bracket supporting the load. For the same condition, locate the line of zero stress at the section $ABCD$. *Ans.* 203 lb.

8-23. A cast iron block is loaded as shown in the figure. Neglecting the weight of the block, determine the stresses acting normal to a section taken 18 in. below the top and locate the line of zero stress.



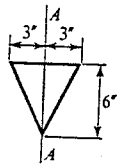
PROB. 8-23



PROB. 8-24

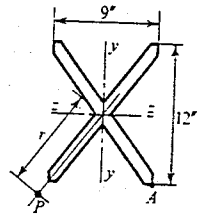
8-24. An aluminum-alloy block is loaded as shown in the figure. The application of this load produces a tensile strain of 500 × 10^{-6} in. per inch at A as measured by means of an electrical strain gage. Compute the magnitude of the applied force P. Let $E = 10 \times 10^6$ psi. *Ans.* 30 k.

8-25. A short block has cross-sectional dimensions in plan view as shown in the figure. Determine the range along the line A–A over



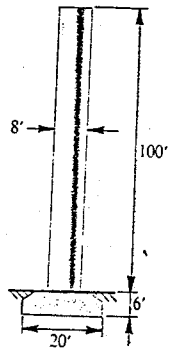
PROB. 8-25

which a downward vertical force could be applied to the top of the block without causing any tension at the base. Neglect the weight of the block. *Ans.* Between 3 in. and 4½ in. from the apex.



PROB. 8-26

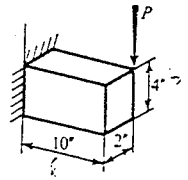
8-26. A short compression member has the proportions shown in the figure; its A = 72.9 in.^{2}, I_{zz} = 1,199 in.^{4}, and I_{yy} = 633 in.^{4} Determine the distance r along the diagonal where a longitudinal force P should be applied so that point A lies on the line of zero stress. Neglect the weight of the member. *Ans.* 53 in.



PROB. 8-28

8-27. Determine the kern for a member having a solid, circular cross section. *Ans.* $c/4$.

8-28. An 8-ft-diameter steel stack, partially lined with brick on the inside, together with a 20-ft-by-20-ft concrete foundation pad weighs 160,000 lb. This stack projects 100 ft above the ground level, as shown in the figure, and is anchored to the foundation. If the horizontal wind pressure is assumed to be 20 lb per square foot of the projected area of the stack and the wind blows in the direction parallel to one of the sides of the square foundation, what is the maximum foundation pressure? *Ans.* 1.21 k per square foot.



PROB. 8-29

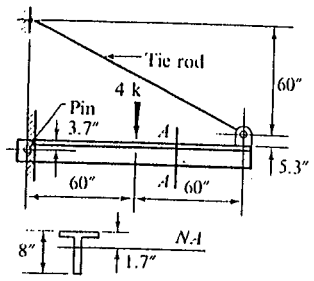
8-29. A rectangular cantilever 10 in. long is loaded with P = 10 kips at the free end as shown in the figure. Determine the maximum shearing stress at the built-in end due to the direct shear and the torque. Show the result on a sketch analogous to Fig. 8-15(e).

8-30. A helical compression spring is made from ⅛-in.-diameter phosphor-bronze wire and has an outside diameter of 1¼ in. If the allowable shearing stress is 30,000 psi, what force may be applied to this spring? Correct the answer for stress concentrations.

8-31. A helical spring is made of ½-in.-diameter steel wire by winding it on a 5-in.-diameter mandrel. If there are 10 active coils, what is the spring constant? $G = 12 \times 10^6$ psi. What force must be applied to the spring to elongate it 1¾ in?

8-32. A helical valve spring is made of ¼-in.-diameter steel wire and has an outside diameter of 2 in. In operation the compressive force applied to this spring varies from 20 lb minimum to 70 lb maximum. If there are eight active coils, what is the valve lift (or travel) and what is the maximum shearing

10-50. Plot shear, moment, and axial force diagrams for the jib-crane loaded as shown in the figure. Neglect the weight of the beam. *Ans:* 128.6 k-in.

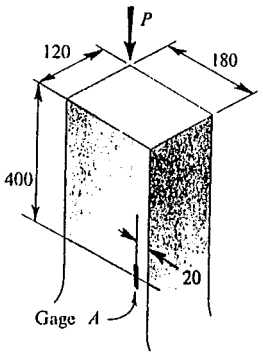


Section *A-A*

PROB. 10 - 50

8-29

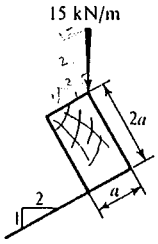
7-35. An aluminum-alloy block is loaded as shown in the figure. The application of this load produces a tensile strain of 500×10^{-6} mm. per mm at A as measured by means of an electrical strain gage. Compute the magnitude of the applied force P. Let $E = 10 \times 10^6$ kN/m². All dimensions given in the figure are in mm.



PROB. 7 - 35

8-19 (18)

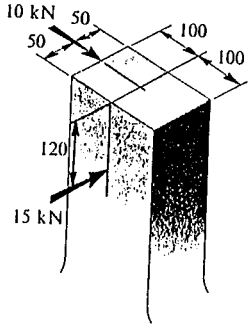
7-44. A tilted, simply supported beam with a depth to width ratio of 2 to 1 is to span 4 m and is to carry a uniformly distributed load of 15 kN per linear meter, including its own weight, applied as shown in the figure. (a) Determine the required dimensions of the beam so that the maximum stress due to bending does not exceed 10 MN/m². (b) Locate the neutral axis of the beam and show its position on the sketch.



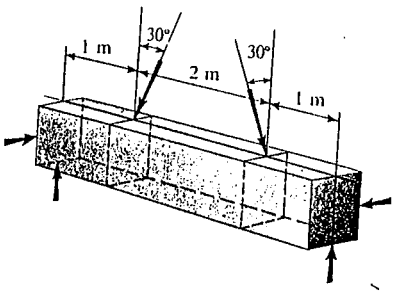
PROB. 7 - 44

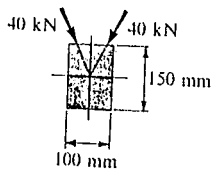
8-23

7-34. A cast iron block is loaded as shown in the figure. Neglecting the weight of the block, determine the stresses acting normal to a section taken 0.5 m below the top and locate the line of zero stress. All dimensions given in the figure are in mm. *Ans:* ±24.6 MPa, ±9.6 MPa.



10-91. A 4 m long beam is loaded as shown in the figure. The two applied forces act perpendicularly to the long axis of the beam and are inclined 30° with the vertical. If these forces act through the centroid of the cross-sectional area find the location and magnitude of the maximum bending stress. Neglect the weight of the beam. *Ans:* ±132 MN/m².

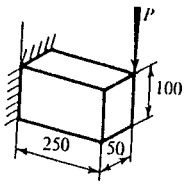




PROB. 10 - 91

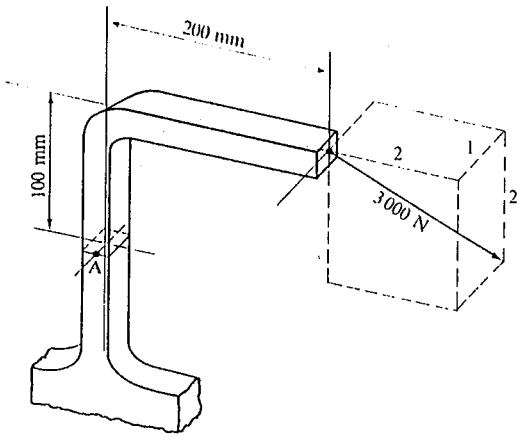
8-28

7-45. A rectangular cantilever 250 mm long is loaded with $P = 50$ kN at the free end as shown in the figure. Determine the maximum shearing stress at the built-in end due to the direct shear and the torque. Show the result on a sketch analogous to Fig. 7-17(e). All dimensions shown in the figure are in mm. *Ans:* 35.3 MPa.



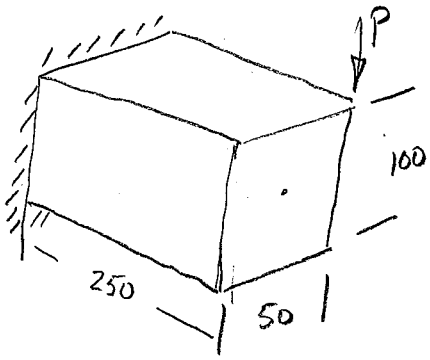
PROB. 7 - 45

9-26. A bent rectangular bar is subjected to an inclined force of 3 000 N as shown in the figure. The cross-section of the bar is 12 mm by 12 mm. (a) Determine the state of stress at point A caused by the applied force and show the results on an element. (b) Find the maximum principal stress. *Ans:* (a) +333 MPa, 578 MPa

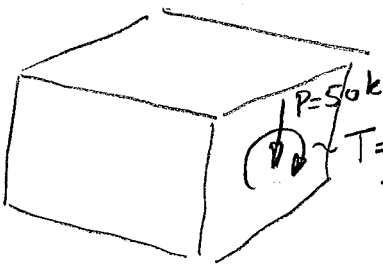


PROB. 9 - 26

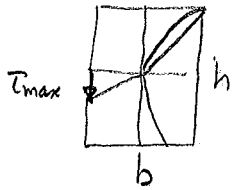
8-28



=

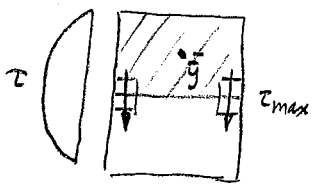


h/b	1.00	1.50	2.00	3.00	∞
α	0.208	0.231	0.246	0.267	0.333



$\frac{h}{b} = \frac{100}{50} = 2 \qquad \alpha = 0.246$

פיתול $\tau_{max} = \frac{T}{\alpha h b^2} = \frac{1250\ N\text{-}m}{0.246(0.10)(0.05)^2} = 20.3252\ MPa$



$\tau_{max} = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{\frac{bh^3}{12}\cdot b}\cdot\frac{bh^2}{8}$

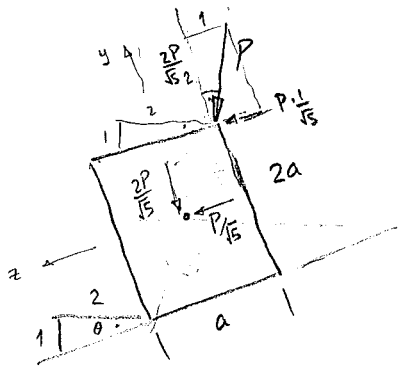
$Q = \int y dA = \bar{y}\cdot A = \frac{h}{4}\cdot\frac{hb}{2} = \frac{h^2 b}{8}$

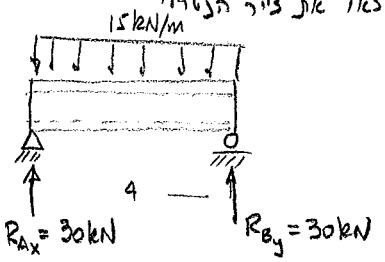
צירה $\tau_{max} = \frac{3V}{2A} = \frac{3\cdot 50000N}{2(0.10)(0.05)} = 15\ MPa$

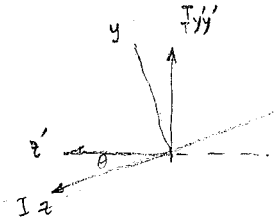
$\tau_{max} = 20.33\ MPa + 15\ MPa = 35.33\ MPa$

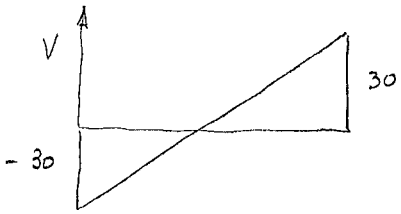
$\sigma_{max} = +\frac{Pl\cdot y}{I_{zz}} = \frac{50000\cdot(0.25)(0.050)}{4.167\times10^{-6}} = 150\ MPa \qquad I_{zz} = \frac{bh^3}{12} = \frac{(0.05)(0.1)^3}{12} = 4.166\times10^{-6}\ m^4$

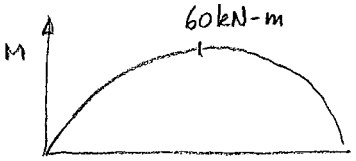
$\sigma_{min} = 0 \qquad 0 = y \rightarrow$



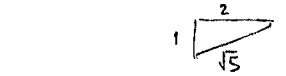








$$I_z = \frac{a(2a)^3}{12} = 0.667a^4 \qquad I_y = \frac{2a(a)^3}{12} = .167a^4 \qquad I_{yz} = 0$$



$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

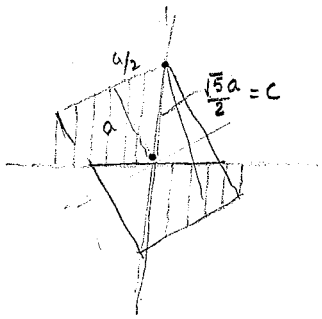
$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -2\cdot\frac{2}{5} = -\frac{4}{5}$

$\frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6} \qquad \frac{4}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{3}{6}$

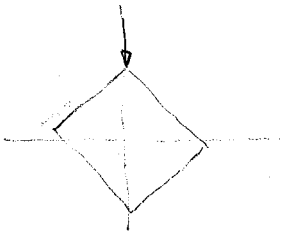
$$I_{z'z'} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} - \frac{(I_{yy} - I_{zz})}{2}\cos 2\theta + I_{yz}\sin 2\theta$$

$$\frac{5}{12}a^4 + \frac{1}{4}a^4\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right) = \left(\underset{4\cdot 3}{\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{12}} + \underset{4\cdot 5}{\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{3}}\right)a^4 = \frac{34}{60}a^4$$



$$\sigma_x = -\frac{M \cdot y}{I} = -\frac{60\,\text{kN-m} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{34}{60}a^4} = 10\times10^9\,\text{N-m}$$

$$= \frac{118380}{a^3} = 10\times10^9\,\frac{N}{m^2} \qquad a = 0.0228\,m$$



$\alpha = 0$ ביר נוכל

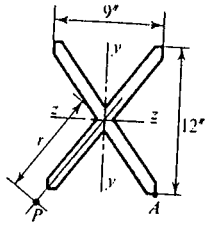
$$I_{y'y'} = \frac{I_{yy} + I_{zz}}{2} + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\cos 2\theta - I_{zy}\sin 2\theta = \frac{5}{12}a^4 - \frac{3}{20}a^4 = \frac{16}{60}a^4$$

$$I_{z'y'} = I_{zy}\cos 2\theta + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{2}\sin 2\theta = \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}$$

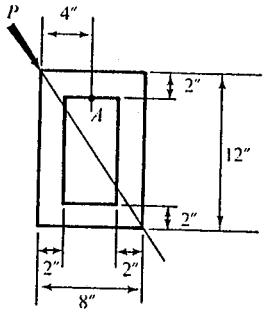
$$\cot\theta = +\frac{I_{z'y'}}{I_{y'y'}} = \frac{-1/5}{16/60}\,a^4$$

8-26

7-38 A short compression member has the proportions shown in the figure; its $A = 72.9$ in.^{2}, $I_{zz} = 1{,}199$ in.^{4}, and $I_{yy} = 633$ in.^{4} Determine the distance r along the diagonal where a longitudinal force P should be applied so that point A lies on the line of zero stress. Neglect the weight of the member. *Ans:* 53 in.

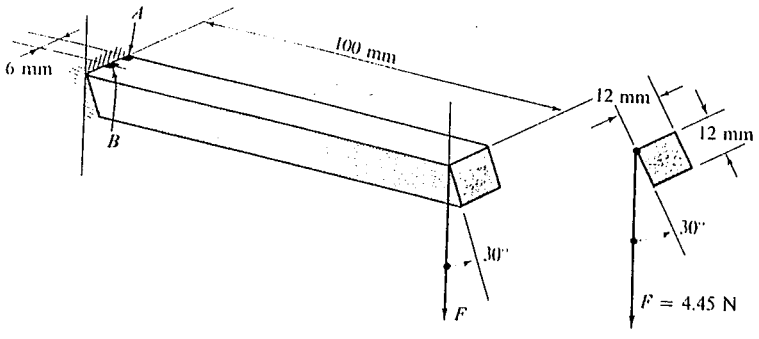


7-43. An inclined force P acts on a cantilever beam in the plane shown in the cross-sectional view. At the section considered, the total resisting moment in the plane of the force is 8,000 ft-lb. Find the bending stress at point A. *Ans:* 325 psi.



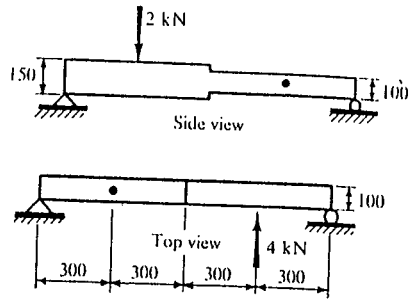
PROB. 7 - 43

9-27. A horizontal 12 mm by 12 mm rectangular bar 100 mm long is attached at one end to a rigid support. Two of the bar's sides form an angle of 30° with the vertical as shown in the figure. By means of an attachment (not shown) a vertical force $F = 4.45$ N is applied acting through a corner of the bar. (See figure.) Calculate the stress at points A and B caused by the applied force F. Neglect stress concentrations. Show the results on the elements viewed from the top. Stress transformations to obtain principal stresses are not required.



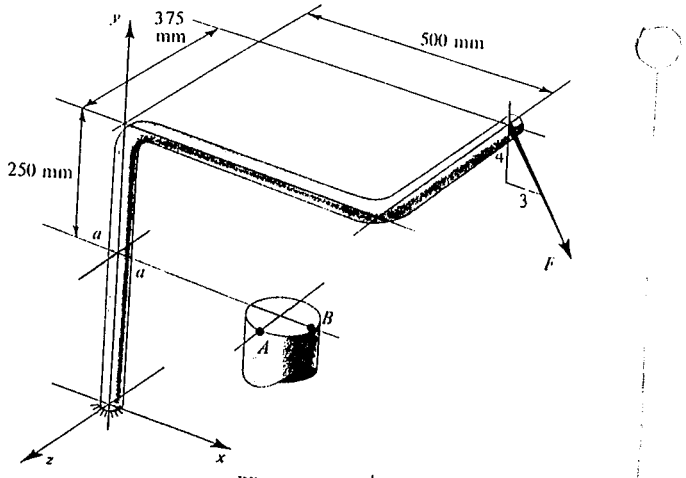
PROB. 9 - 27

10-89. Neglecting the weight of the beam and stress concentrations at the change in cross section, find the largest bending stress for the beam loaded as shown in the figure. All dimensions in the figure are in mm.



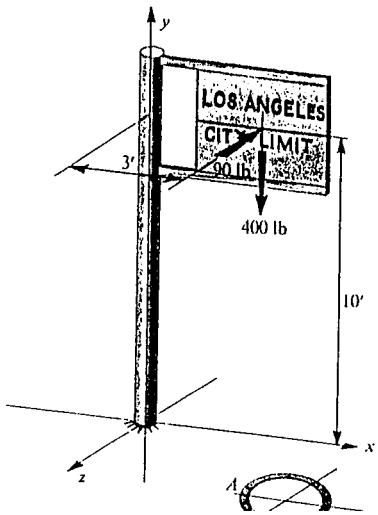
PROB. 10 - 89

9-25. A 50 mm diameter rod is subjected at its free end to an inclined force $F = 225\pi$ N as in the figure. (The force F in plan view acts in the direction of the x axis.) Determine the magnitude and directions of the stresses due to F on the elements A and B at section a–a. Show the results on elements clearly related to the points on the rod. Principal stresses are not required.



PROB. 9 - 25

9-30. A 400-lb sign is supported by a 2½-in. standard-weight steel pipe as in the figure. The maximum horizontal wind force acting on this sign is estimated to be 90 lb. Determine the state of stress caused by this loading at points A and B at the built-in end. Principal stresses are not required. Indicate results on sketches of elements cut out from the pipe at these points. These elements are to be viewed from outside the pipe. *Ans:* For A: 13,295 psi, 1,422 psi; for B: 9,912 psi, 1,523 psi.



$$\epsilon_{x'} = l_1^2 \epsilon_x + m_1^2 \epsilon_y + n_1^2 \epsilon_z + l_1 m_1 \gamma_{xy} + m_1 n_1 \gamma_{yz} + n_1 l_1 \gamma_{zx}$$

$$\epsilon_{y'} = \ldots$$

$$\epsilon_{z'} = \ldots$$

$$\gamma_{x'y'} = -2 l_1 m_1 (\epsilon_x - \epsilon_y) + (l_1 m_2 + m_1 l_2) \gamma_{xy}$$

$$= \ldots$$

$$\gamma_{z'x'} = \ldots$$

ϵ_1, ϵ_2 2-D max, min $\quad \gamma_{12} = 0$

$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 3-D max, min, other $\quad \gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = 0$

9-24.1

$$\text{2-D} \begin{cases} \epsilon_x + \epsilon_y = I_{1\epsilon} & \text{invariant} \\ \epsilon_x \epsilon_y - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 = I_{2\epsilon} & \text{invariant} \end{cases}$$

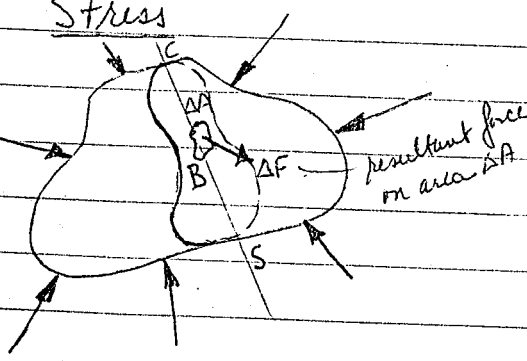
$$\text{3-D} \begin{cases} \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = I_{1\epsilon} & \text{invariant} \\ \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = I_{2\epsilon_2} \\ \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}) - \frac{1}{4}(\epsilon_x \gamma_{yz}^2 + \epsilon_y \gamma_{zx}^2 + \epsilon_z \gamma_{xy}^2) = I_{3\epsilon} \end{cases}$$

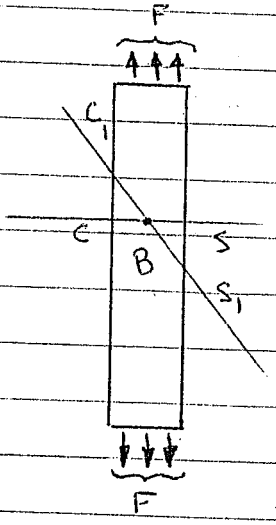
1.139

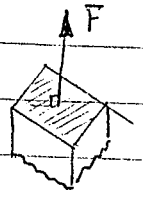
FIG 1

9-24

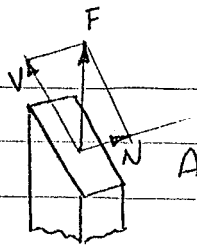
Stress







$\frac{F}{A}$ = Intensity of internal forces in the axial direction.



F/A_1 = Intensity of load in axial direction

$F/A_1 < F/A$

$\sigma = \frac{N}{A_1}$ normal stress

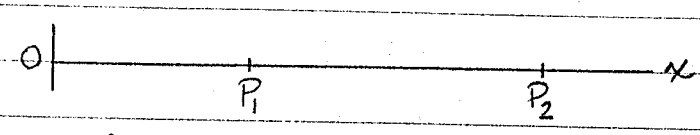
σ & τ are uniformly distributed $\tau = \frac{V}{A_1}$ shear stress

stress at $B = \left(\frac{\Delta F}{\Delta A}\right)_{\Delta A \to 0}$ we define at vector $\bar{n}$ $\perp$ to the plane

↓ need 2 vectors those quantities needing 2 vectors to define it are tensors ∴ stress is a tensor.

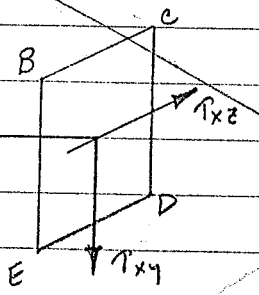
9-29-70

FIG 3. 9-29



Positive face of the parallelopiped is defined as the one with the larger coordinate.

FIG. 2a 9-29



σ_x is defined positive

τ_{xy} " " "

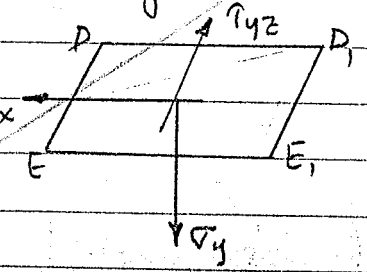
Sign convention: σ → tensile stress +

→ compressive " −

τ → pos. direct. for positive face : +

→ neg. " " neg " : −

FIG. 2b 9-29



6 unknowns, 3 equations makes proper problem statically indeterminate.

10-5-70

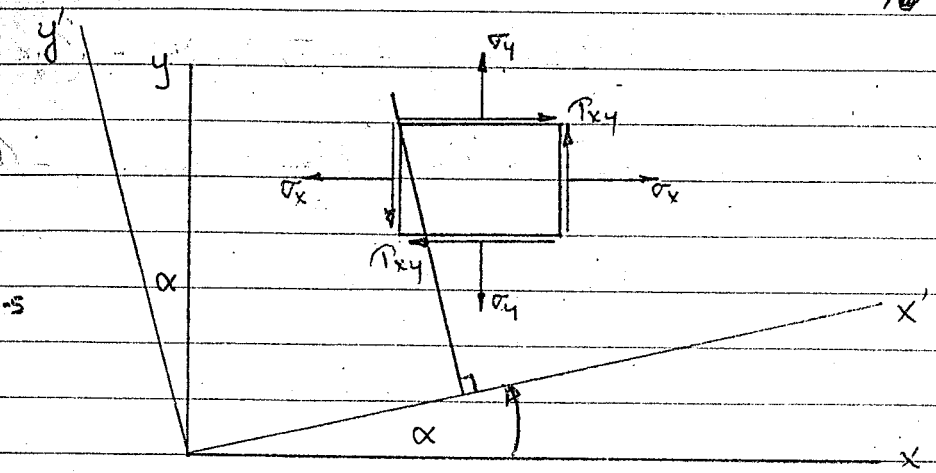


FIG. 1

10-5

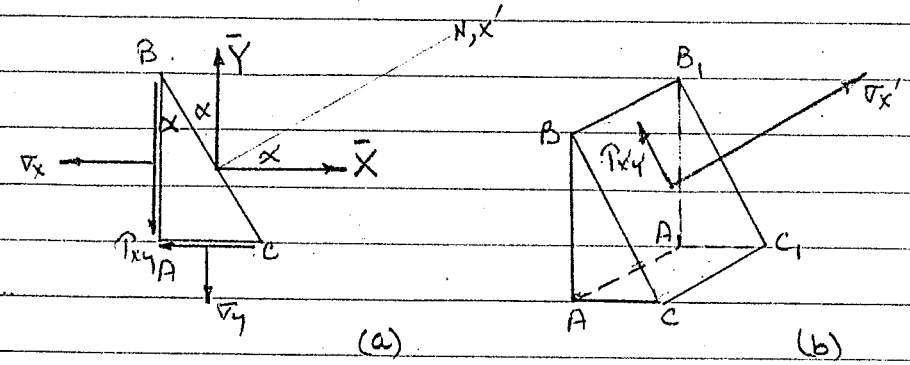


FIG. 2

10-5

$\bar{AB} = \bar{BC}\cos\alpha$

$\bar{AC} = \bar{BC}\sin\alpha$

$ABB_1A_1A = A_x = A_n\cos\alpha$

$ACC_1A_1A = A_y = A_n\sin\alpha$

$BB_1C_1CB = A_n$

Then

$$\bar{X} = \sigma_x A_x + \tau_{xy} A_y = \sigma_x A_n\cos\alpha + \tau_{xy} A_n\sin\alpha =$$

$$\bar{Y} = \tau_{xy} A_x + \sigma_y A_y = \tau_{xy} A_n \cos\alpha + \sigma_y A_n \sin\alpha =$$

$$A_n \sigma_x' = (\bar{X}\cos\alpha + \bar{Y}\sin\alpha) \quad ;\ (\text{thus } \sigma_x' = \bar{X}\cos\alpha + \bar{Y}\sin\alpha)$$

$$A_n \sigma_x' = (\sigma_x \cos^2\alpha + 2\tau_{xy}\sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha) A_n$$

10-5,1
$$\boxed{\sigma_x' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha}$$

$$A_n \tau_{x'y'} = \bar{Y}\cos\alpha + \bar{X}\sin\alpha \quad ;\ (\text{thus } \tau_{x'y'} = \bar{Y}\cos\alpha + \bar{X}\sin\alpha)$$

$$= (\tau_{xy}\cos^2\alpha + (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}\sin^2\alpha) A_n$$

$$\tau_{x'y'} = \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha.$$

10-5,2
$$\boxed{\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha}$$

for σ_y' use $\alpha = \alpha + 90^\circ$ and get

$$\boxed{\sigma_y' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha\right]}$$

	X	Y		
x'	l	m	$\cos\alpha = l$	$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}$
y'	$l_2 = -m$	$m_2 = l$	$\sin\alpha = m$	$\bar{Y} = l\tau_{xy} + m\sigma_x$

$l_2^2 + m^2 = 1$ $\qquad \sigma_x' = l\bar{X} + m\bar{Y}$

$$= l^2\sigma_x + 2lm\tau_{xy} + m^2\sigma_y$$

$$\frac{\partial \sigma_x'}{\partial l} = 2\left[l\sigma_x + m\tau_{xy}\right] + 2\left[l\tau_{xy} + m\sigma_y\right]\frac{\partial m}{\partial l} = 0$$

if $l^2 + m^2 = 1$ $\qquad 2l\,dl + 2m\,dm = 0$ $\qquad \frac{dm}{dl} = -l/m$

$$\frac{\overset{(1)}{l\sigma_x + m\tau_{xy}}}{l} = \frac{\overset{(2)}{l\tau_{xy} + m\sigma_y}}{m} = \overset{(3)}{\sigma}$$

$$\bar{X}/l = \bar{Y}/m = \sigma$$

from ① & ③ $\quad (\sigma_x - \sigma)\,l + m\,\tau_{xy} = 0$

from ② & ③ $\quad (\sigma_y - \sigma)\,m + l\,\tau_{xy} = 0$

Therefore, $\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0$

or, $\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \left[(\sigma_x \sigma_y) - \tau_{xy}^2\right] = 0$

10-5.3

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

σ_{max} +

σ_{min} −

$0 = \tau_{xy}$ w/ ⇐ $\sigma_{max}, \sigma_{min}$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\,\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

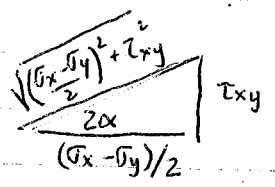
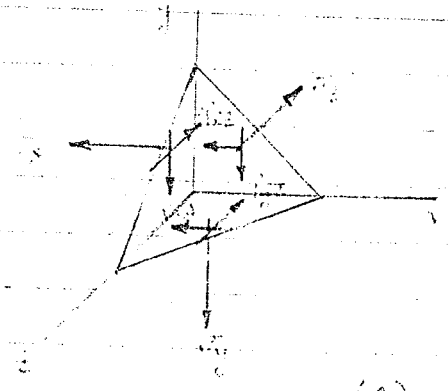
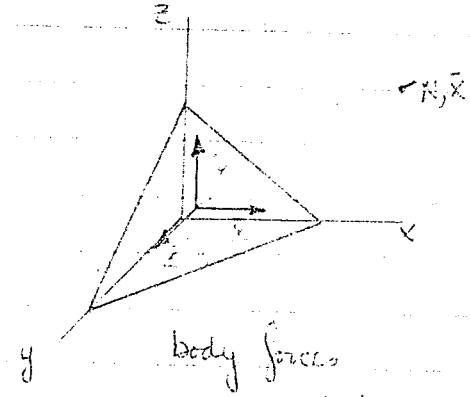


FIG. 3





$A_x = l_1$ if $A_n = 1$

$A_y = m_1$

$A_z = n_1$

$\bar{X} = l_1\sigma_x + m_1\tau_{xy} + n_1\tau_{zx}$

$\bar{Y} = l_1\tau_{xy} + m_1\sigma_y + n_1\tau_{zy}$

$\bar{Z} = l_1\tau_{xz} + m_1\tau_{yz} + n_1\sigma_z$

	X	Y	Z
X′	l_1	m_1	n_1
Y′			
Z′			

10-6-70

From FIG. 1 10-5 we can obtain

$$(\sigma_x')_{\substack{max \\ min}} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$\tau_{xy}=0$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

In 2-D the invariants are

10-6.A

$$I_{1\sigma} = \sigma_x+\sigma_y \quad ; \quad I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$$

In 3-D the invariants become

$$I_{1\sigma} = \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z \quad ; \quad I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)$$

$$I_{3\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{zx}\tau_{yz} - \left(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{zx}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2\right)$$

From $\frac{\partial\sigma_x'}{\partial\ell}$ we had obtained $\frac{l\sigma_x+m\tau_{xy}}{\ell} = \frac{l\tau_{xy}+m\sigma_y}{m} = \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}}{m}$

or $m/\ell = \bar{Y}/\bar{X} = \tan\alpha$

If ratio holds then we have only σ_1 and no shear

FIG. 1 10-6



From strain displacements we have 6 equations

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

From Stress Equilibrium Equations we got

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\bar{X}=0$$

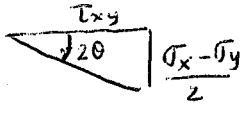
כדי למצוא את הזוויות (או המישורים) שבהם פועלים המאמצים הגזירה המקסימלי והמינימלי,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\tau_{xy}\cos 2\theta - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$= -2\tau_{xy}\sin 2\theta - 2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta$$

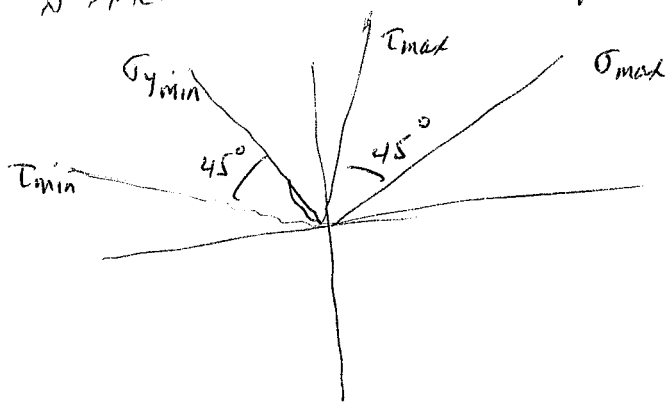
לכן

$$m_2 = \tan 2\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$



$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow 2\theta \perp 2\alpha$$

כלומר אומרת ש- המישורים למאמץ גזירה מקסימלי הוא 45° ל מישורים שלא מאמצים מקסימליים וזה גם נכון למישורים של מאמצים מינימליים



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \tau_{min} = -\tau_{max}$$

אלא ניקח

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\quad} = \sigma_1 = \sigma_{max}$$

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\quad} = \sigma_2 = \sigma_{min}$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \tau_{max}$$

אלכן, כאן יש מאמצים נורמליים שפועלים מאונך למישורים של מאמצי הגזירה המקסימליים

$$\sigma' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

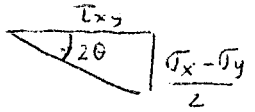
למצוא את הזוויות שעוברות ל- τ_{max}, נדרוש לפחות אחד מהזוויות θ_2 ולפשט אותו $\tau_{xy} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

כדי למצוא את הזוויות (או המישורים) שבהן פועלים המאמצים בצורה המקסימלי ומינימלי,

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\tau_{xy}\cos 2\theta - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta\right]$$

$$= -2\tau_{xy}\sin 2\theta - 2\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta$$

לכן

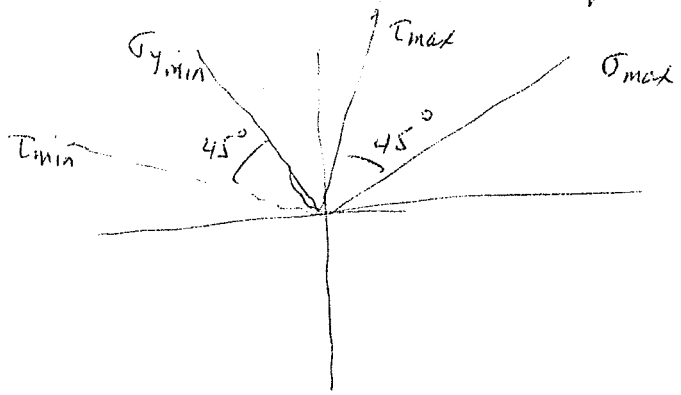


$$m_2 = \tan 2\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \quad 2\theta \perp 2\alpha$$

כלומר אומרים ש- המישורים למאמץ בצורה מקסימלי הוא 45° ל מישורים שם מאמצים מקסימליים

וכך גם נכון למישורים של מאמצים מינימליים



$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad \tau_{min} = -\tau_{max}$$

ואם נקח

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \sqrt{\quad} = \sigma_1 = \sigma_{max}$$

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \sqrt{\quad} = \sigma_2 = \sigma_{min}$$

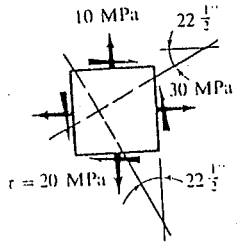
$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \tau_{max}$$

אבל, כאן יש מאמצים נורמלים שפועלים מאונך למישורים של מאמצים הצורה המקסימליים

$$\sigma' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

לגבי את הזוויות שבהן τ_{max}, צריך לבחור אחד מהזוויות θ_2 ולהשוות אותו ל $\tau_{xy} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$

תיבת תרגילים 2 – שלוש תרגילי בית מס' 3



8-3: לאלמנט המתואר בתרשים מדוע לחשב את המאמץ הנורמלי המאמץ הגזירה על השטחים הקטו"פ בתרשים.

Ans: 8-3: $\sigma = -1.2$ MPa, $\tau = 7.1$ MPa; $\sigma = +1.2$ MPa, $\tau = 7.1$ MPa.

8-14. $\sigma_x = -10$ MN/m², $\sigma_y = -40$ MN/m², $\tau = +20$ MN/m².

8-14: נתון מצב מאמצים על אלמנט.

מדוע: לחשב באופן האלמנט, לחשב המאמצים הראשיים ואת שלמה על הקלידה המתאימה לחשב המאמצי הגזירה המכסימלי ומצב המאמצים על הקלידה המתאימה.

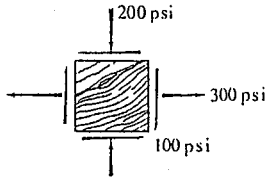
Ans: 0, −50 MN/m²; 25 MN/m²

8-16: נתון שונה מעיקרון מוהר, מדוע לפתור את שאלה 8-14.

8-22: נתון שנע מעיקרון מוהר, חשב ומצא את הקלידה המקדים, הקלידה על המאמצים הראשיים והקלידה עם מאמצי גזירה מכסימלים, לתיקונים הקאוי:

8-22. $\sigma_x = +60\,000$ kN/m², $\sigma_y = +30\,000$ kN/m², $\tau = +25\,000$ kN/m². *Ans:* +74.2 MPa, 15.8 MPa, 29½°; 29.2 MPa, 45 MPa.

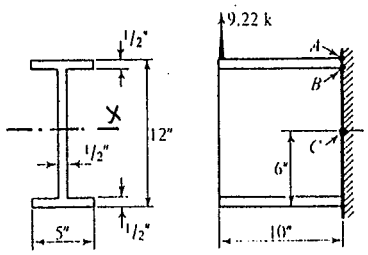
8-33: נתון מצב מאמצים על אלמנט עץ. הסיבים יוצרים זוית 30° עם ציר האנכי. מאמץ הגזירה המותר למעבים בעץ 150 psi. האם מצב המאמצים המתואר על הקלידה מותר?



PROB. 8 – 33

9-5: בחתך המתואר בתרשים $I_x = 221$ in⁴

מדוע: לחשב את המאמצים הראשיים בנקודות A, B, C



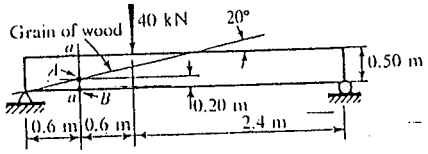
PROB. 9 – 5

Ans: At *A*, 0, −2.50 ksi; at *B*, +0.51 ksi, −2.81 ksi; at *C*, ±1.84 ksi.

9-6: קורה עץ בחתך 500/100 מ"מ.

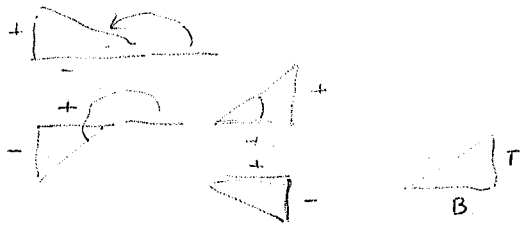
בחתך a-a הסיבים נמצאים ב- 20° לאופק.

מדוע: לחשב מאמץ גזירה בכיוון הסיבים בנקודה A ו- B.



PROB. 9 – 6

Ans: $\tau_A = 835$ kN/m².



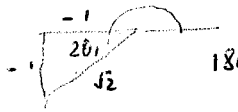
8-10

$$\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$-1 + -1\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + -2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

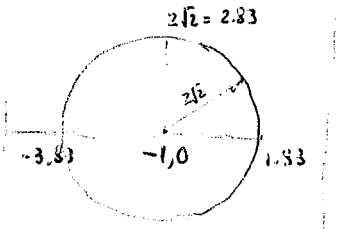
$$-1 + \frac{4}{\sqrt{2}} = -1 + 4(.707) = -1 + 2.83 = 1.83$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{2(-2)}{-3-1} = +1$$



$180+45 = 225^\circ$ $\quad \theta_1 = 112.5^\circ$

8-11

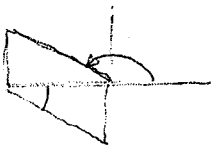


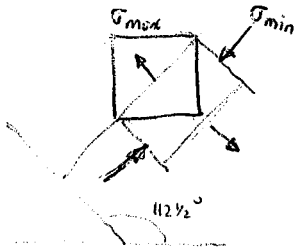
$$\sigma_x' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{-3+1}{2} = -1 \text{ ksi}$$

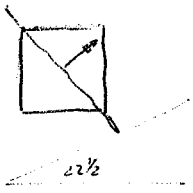
$$\tan 2\theta_1 = \frac{-(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} = \frac{-(-4)}{2(-2)} = -1$$

$$2\theta_1 = 135^\circ$$

$$\theta_1 = 67.5^\circ$$

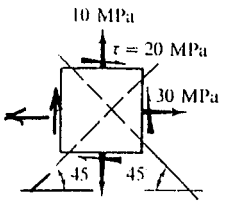






תוכן תוארים - 2 , עיון ניתוחי כתה מס' 3

8-2 : שאלתך הראשונה בתרגילים, נדרש לחשב **באופן גרפי** ובאופן **צורה** על השלדים הראשונים.



Prob. 8-2: $\sigma = +40$ MPa, $\tau = 10$ MPa; $\sigma = 0, \tau = -10$ MPa.

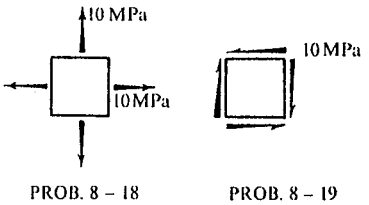
8-10 / **8-11** } נתונים הראשונים על שלדתך: $\sigma_x = -3$ ksi, $\sigma_y = +1$ ksi, $\tau = -2$ ksi

נדרש לחשב **באופן גרפי** ובאופן **אנליטי** את הנשורים שעליהם הם פועלים.

1.83 ksi, −3.83 ksi, 22½°.

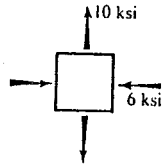
8-18 / **עד 8-21** } נתון שיעור כשעון מוכר, לחשב ולשאר **מצב** שטוחים ראשיים ואת **צד** שאנו שעליהם הם פועלים.

Ans. 2.83 ksi, −1 ksi, 67½°.

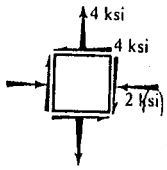


PROB. 8 – 18

PROB. 8 – 19



PROB. 8 – 20



PROB. 8 – 21

Ans: Prob. 8-21.
(a) 6 ksi, −4 ksi;
(b) 5 ksi, 1 ksi.

1-9 : מדוע בדרך כלל בתערובת 50/50 מ"מ נוהגים לפעול כמו שעשיתה.
אם מאחת הצורות הבסיסיות שנראה הוא 80 mpa, מה היה כמות העבירה

3-9 בלוח על בתוך מלבני 100/50 מ"מ. הסיבים נמשכים ב- 25° לציר האורך. אם מאחת הצורה הנראה כמקסימלי הוא $600 \frac{kN}{m^2}$, מה תכמת הכוח הפנימי (תשובה 183 kN)

המכללה האקדמית יהודה ושומרון

תורת החוזק 1

תרגיל מס' 2

1. The stress distribution on the rectangular cross-section shown in Fig. 1 is given by $\sigma_{xx}=1000y-500z+800$ kPa, $\sigma_{xy}=200z$ kPa, $\sigma_{xz}=0$. What is the net internal force system on this cross-section ?

Answer : $F=1920$ N, $V_y=V_z=0$
$M_y=-1600$ N-cm., $M_z=-7200$ N-cm., $T=-640$ N-cm.

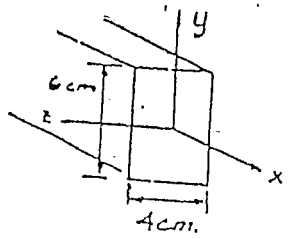


Fig. 1

2. Suppose the stress distribution on a cross-section of the circular cylinder of Fig. 2 is given by $\sigma_{xx}=\sigma_{xr}=0$, $\sigma_{x\theta}=k\sqrt{r}$, where k is unknown. What is the value of k in this case?

Answer : $k=7T_0/4\pi R^{7/2}$

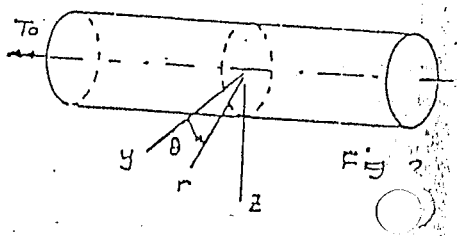


Fig. 2

6.4 For the given state of stress, determine the normal and shearing stresses exerted on the oblique face of the shaded triangular element shown. Use a method of analysis based on the equilibrium equations of that element, as was done in the derivations presented in Sec. 6.2.

6.6 For the given state of stress, determine (*a*) the principal planes, (*b*) the principal stresses.

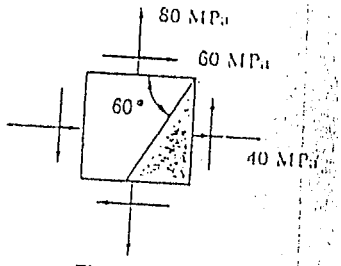


Fig. P6.4

6.12 For the given state of stress, determine (*a*) the orientation of the planes of maximum in-plane shearing stress, (*b*) the maximum in-plane shearing stress, (*c*) the corresponding normal stress.

6.14 For the given state of stress, determine the normal and shearing stresses after the element shown has been rotated through (*a*) 40° counterclockwise, (*b*) 15° clockwise.

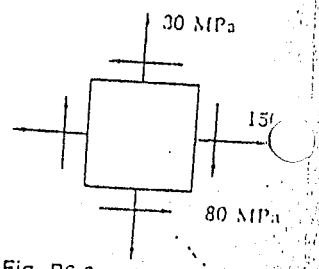
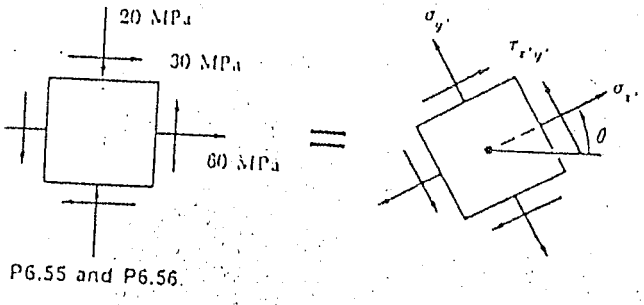


Fig. P6.6 and P6.10

6.56 For the state of plane stress shown, determine the range of values of θ for which the normal stress $\sigma_{x'}$ is equal to or less than +65 MPa.



P6.55 and P6.56

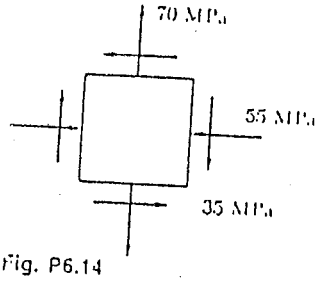


Fig. P6.14

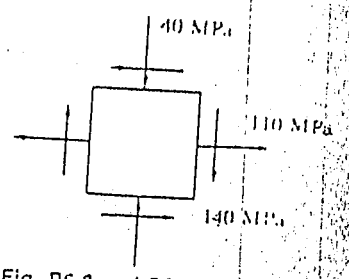
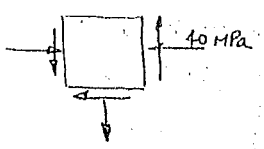
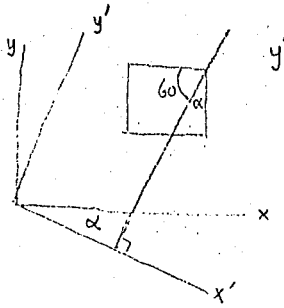


Fig. P6.8 and P6.12



$\tau_{xy} = 60$ MPa
$\sigma_y = 80$ MPa

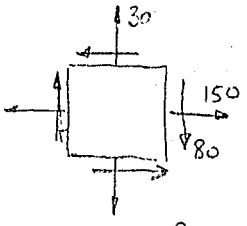
$$\sigma_x = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$



(א) לפי הפיגורה $\alpha = -30°$, כי האלכסון הוא מקביל ל-y'

$$\sigma_{x'} = \frac{-40+80}{2} + \frac{-40-80}{2}\cos(-60) + 60\sin(-60)$$
$$= 20 + (-60)\cdot\frac{1}{2} + 60(-.866) = \underline{-61.96\ \text{MPa}}$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{-40-80}{2}\sin(-60) + 60\cos 60$$
$$= +60(.866) + 60\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{-21.96\ \text{MPa}}$$

6.6



$\sigma_x = 150$ MPa
$\sigma_y = 30$ MPa
$\tau_{xy} = -80$ MPa

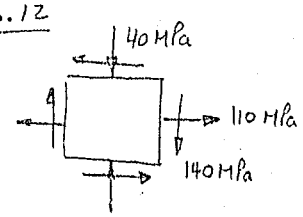
(ב) למצוא את הכיוונים העיקריים ואת המאמצים העיקריים

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$
$$\tan 2\theta_1 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

לכן
$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{150+30}{2}\right) \pm \left[\left(\frac{150-30}{2}\right)^2 + (-80)^2\right]^{1/2}$$
$$= 90 \pm 100 \Rightarrow \sigma_1 = 190.\text{-}\ \text{MPa}$$
$$\sigma_2 = -10.\text{-}\ \text{MPa}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2(-80)}{150-30} = -1.333$$
$$2\theta = -53.13 \quad \theta = \underline{-26.57°} \qquad \theta_2 = \theta + 90° = \underline{63.43°}$$

6.12



$\sigma_x = 110$MPa
$\sigma_y = -40$ MPa
$\tau_{xy} = -140$ MPa

(ב) למצוא את הכיוונים של המאמץ המקסימלי והמאמץ המקסי.

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \left[\left(\frac{110-(-40)}{2}\right)^2 + (-140)^2\right]^{1/2} = \pm 158.82\ \text{MPa}$$

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} = -\frac{[110-(-40)]}{2(-140)} = \frac{-150}{-280} = 208.18°$$

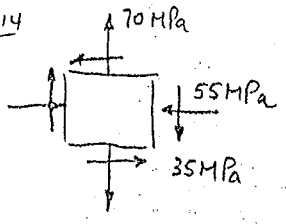
מצינו שהיתם הוא שלילי, מתקין שלילי.

$\theta = 104.09°$
$\theta + 90° = 194.09° = 14.09°$

$$\sigma' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{110-40}{2} = 35\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$
$$= \frac{110-40}{2} + \frac{(110-(-40))}{2}\cos 208.18° + (-140)\sin 208.18°$$
$$= 35 + 75\cos 208.18 - 140\sin 208.18 = 0$$

6.14



$\sigma_x = -55$MPa
$\sigma_y = 70$ MPa
$\tau_{xy} = -35.$ MPa

מסעיף א') למצוא את המאמצים בשני המלקין הזוך ומסובבה $40°$ נגד השעון (מאמצים נורמלי ושיריה).
מסעיף ב') אותו תהליך בשני המלקין הזוך ומסובבה $15°$ בכיוון השעון.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad \alpha = 40°$$
$$= \frac{-55+70}{2} + \frac{(-55-70)}{2}\cos 80 + (-35)\sin 80$$
$$= 7.5 + 62.5\cos 80 - 35\sin 80 = -37.82\ \text{MPa}.$$
$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$\sigma_{xy} = 200 z^2$

$\sigma_{xz} = 0$

$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0$

$0 + 0 + 0 + X = 0 \Rightarrow X = 0$

$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0$

$0 + ? $

$\int \sigma_{xx}\, dy\, dz = \left(\frac{1000}{2} y^2 - 500yz + 800y\right)\Big|_{-3}^{3} dz$

$= \frac{1000}{2}(9-9) - 500z(3+3) + 800(3+3)$

$= (-3000z + 4800)\, dz$

$= -\frac{3000 z^2}{2} + 4800z \Big|_{-2}^{2}$

$= -\frac{3000}{2}(4-4) + 4800(2+2) = 19200$ kPa-cm

$= 1.92 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

$= 1920$ N

$V_y = \int \sigma_{xy}\, dy\, dz = dz(200 z y)\Big|_{-3}^{3} = 200z(6) = \int 1200 z\, dz$

$= \frac{1200}{2} z^2 \Big|_{-2}^{2} = 0$

$V_z = \int \sigma_{xz}\, dy\, dz = 0$

$M_z = \int \sigma_{xx} \cdot y\, dy\, dz = \left(\frac{1000}{3} y^3 - \frac{500}{2} y^2 z + \frac{800}{2} y^2\right)\Big|_{-3}^{3} dz \Big|_{-2}^{2} = \frac{1000}{3}(27+27) - \frac{500}{2}(9-9) + \frac{800}{2}(9-9) = \frac{1000}{3} \cdot 18z \Big|_{-2}^{2} = 72$ m·kPa

$= 7.2 \times 10^{-2}$

$= 72$ N-m

$M_y = \int \sigma_{xx} \cdot z\, dy\, dz = \left(\frac{1000}{2} y^2 - 500yz + 800y\right)\Big|_{-3}^{3} \cdot z\, dz = -500 \cdot 6 \frac{z^2}{2} + 800(6)\frac{z^2}{2}\Big|_{-2}^{2} = -\frac{3000}{3}(8+8) = -16000$ kPa m^3

$= -1.6$ N·m

$T = M_x = \int \tau_{xy} \cdot z\, dy\, dz = \frac{200 z^3}{3} y \Big|_{-3}^{3} \Big|_{-2}^{2} = \frac{200}{3}(8+8)(3+3)$

$= 400(16) = 6400$ kPa-cm^3

$= 6.4 \times 10^6 \text{ Pa} - 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

$= 6.4$ N-m

2.

ג) $\alpha = -15°$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

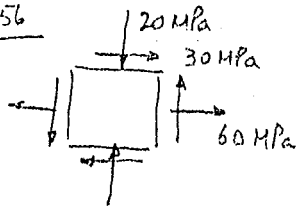
$$= 7.5 - 62.5\cos(-30) + (-35)\sin(-30) = 7.5 - 62.5(.866) - 35(-\tfrac{1}{2}) = -29.13\ MPa$$

$$\sigma_{y'} = I_{1\sigma} - \sigma_{x'} = (\sigma_x+\sigma_y) - \sigma_{x'} = 15 - (-29.13\ MPa) = 44.13\ MPa$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$= 62.5\sin(-30) + (-35)\cos(-30) = 62.5(-\tfrac{1}{2}) - 35(.866) = -61.56\ MPa$$

6.56



$\sigma_x = 60\ MPa$
$\sigma_y = -20\ MPa$
$\tau_{xy} = 30\ MPa$

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{60-20}{2} + \frac{60+20}{2}\cos 2\alpha + 30\sin 2\alpha$$

$$\sigma_{x'} = 20 + 40\cos 2\alpha + 30\sin 2\alpha$$

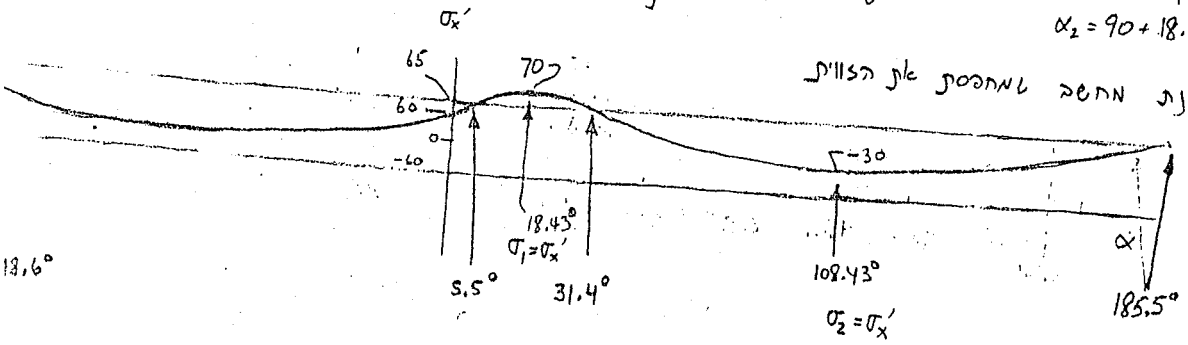
או, אפשר $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$

$$= \frac{60-20}{2} \pm \left[\left(\frac{60+20}{2}\right)^2 + 30^2\right]^{1/2} = 20 \pm \left[40^2+30^2\right]^{1/2} = 20 \pm 50 = \begin{cases} 70\ MPa \\ -30\ MPa \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{2(30)}{60+20} = \frac{60}{80} = 0.75$$

$2\alpha = 36.87°$ $\quad \alpha = 18.43°$

$\alpha_2 = 90 + 18.43° = 108.43°$



אלא נשתמש בתוכנת מחשב ונתפנק את הכוונת

$$\cos 2\alpha = \cos(360+2\alpha) = \cos(-[360-2\alpha])$$

אם $\alpha = 5.5$

ואז $360+2\alpha = 371$ מצא $185.5°$. רוצים ל- $180°$ = $185.5° - 5.5$

אם $\alpha = 31.4$

ואז $-(360-2\alpha) = -297.2$ מצא $-148.6°$. רוצים ל- $-180°$ = $-148.6° + 31.4$

הערות: הפתרון (השיפוע של הנקודה) ב- $31.4°$ ו- $-148.6°$ שווה

הפתרון של $5.5°$ ו- $185.5°$ שווה

לכן, כי $5.5 \le \alpha \le 185.5°$ $\quad \sigma_{x'} < 65$

ואילו $5.5 \le \alpha \le -148.6°$ $\quad \sigma_{x'} > 65$

3. The beam shown Fig. 3 has a rectangular cross-section and is subjected to bending couples at its end. The stress distribution on a cross-section is given by :

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -\sigma_0 & , y \geq c \\ -\sigma_0 y/c & , -c \leq y \leq c \\ \sigma_0 & , y \leq -c \end{cases}$$

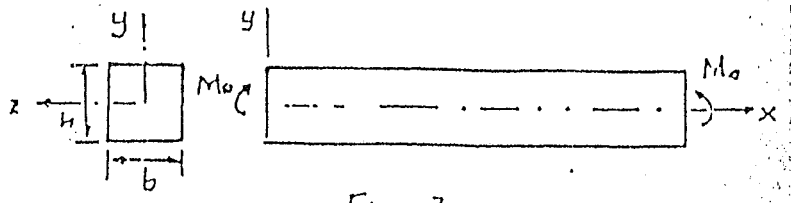


Fig. 3

where c is a constant ($0 \leq c \leq h/2$) and σ_0 is a known number.

(a) Sketch the stress distribution for a given c.
(b) For what value of c will M_0 have a maximum value? Determine $(M_0)_{max}$.
(c) Draw the stress distribution for σ_x when $M=(M_0)_{max}$.

Answer : (b) : $(M_0)_{max} = \sigma_0 bh^2/4$

answers:

6.4 $\sigma = -62.0$ MPa ; $\tau = 22.$ MPa

6.6 (a) $-26.6°$; $+63.4°$

(b) $\sigma_{max} = 190.$ MPa $(\theta = 26.6°)$

$\sigma_{min} = -10.$ MPa

6.10 (a) $18.4°$; $108.4°$

(b) 100. MPa

(c) 90. MPa

6.14 (a) -37.8 MPa ; 52.8 MPa ; 55.5 MPa

(b) -29.1 MPa ; 44.1 MPa ; -61.6 MPa

6.56 $-148.6° \leq \theta \leq 5.52°$

$31.4° \leq \theta \leq 185.5°$

$$\sigma_x' = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

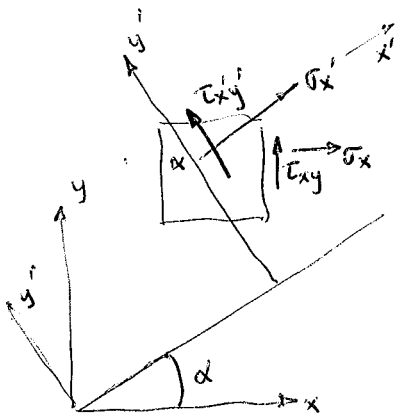
$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

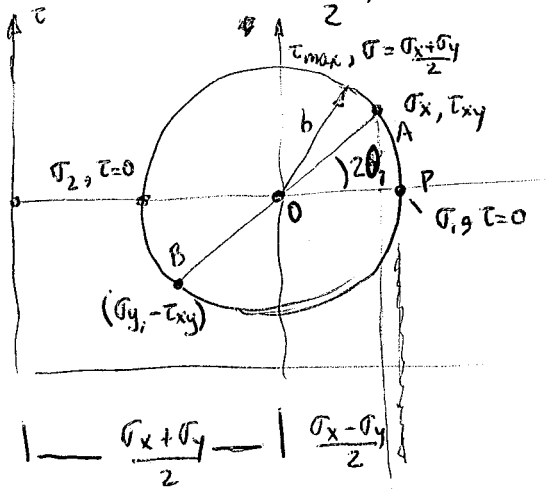
קל להיווכח שניהם ומהם

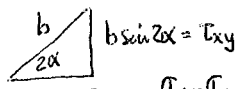
$$\left[\sigma_x' - \frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2}\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

אפי פונקציה של σ_x' ו-$\tau_{x'y'}$ כמו משוואה של מעגל $(x-a)^2+y^2=b^2$

$$a = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \qquad b = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$







$b\sin 2\alpha = \tau_{xy}$

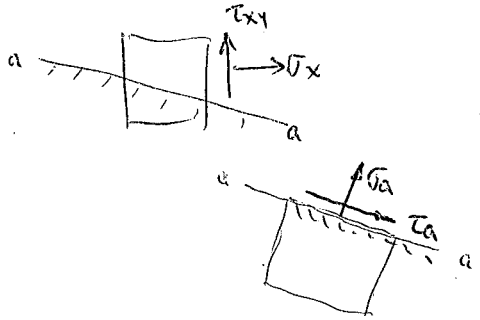
$b\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$

$A = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) = \sigma_x$

$B = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right) = \sigma_y$

כדי למצוא את המישורים בהם מסוים הפועל α
1) מוצאים את a,b לפי הנתונים ושירטטו את המעגל
2) מוצאים 2α ומוצאים את הזווית
3) בנקודה שהזווית מותחת את המרצע חותכת את המעגל (σ_x, τ_{xy}), והשני $(\sigma_y, -\tau_{xy})$
(scale) לפי קנה-מידה משרטטים את המרצע ומציינים את a,b
1) לפי קנה-מידה מציינים את $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ ← מרחק אופקי בין A למרכז מעגל $\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$
2) לפי קנה-מידה מציינים את a,b
3) לפי קנה-מידה מרחק אופקי בין A למרכז מעגל τ_{xy}
4) זווית $2\theta_1$ כאשר $\sigma_{x'}=\sigma_x$, $\tau_{x'y'}=-\tau_{xy}$ מישור מסוים
למצוא משוואות לפי משור מסוים

1) מוצאים את a,b לפי הנתונים ושירטטו את המעגל
2) מוצאים את $A(\sigma_x, \tau_{xy})$
3) שרטטו קו ישר שעובר את A ומקביל למישור המסוים עד שיחתוך את המעגל
4) קחו לכך השני מאונך לכיוון
5) קראו את $S(\sigma_a, -\tau_a)$
על התמונה משוואות שמוצאים



10-6-70

From FIG. 1 10-5 we can obtain

$$(\sigma_x')_{max\atop min} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$\tau_{xy} = 0$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

In 2-D the invariant are

10-5.A $I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y$; $I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$

In 3-D the invariants become

$I_{1\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$; $I_{2\sigma} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$

$I_{3\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$

From $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}}$ we find obtained $\frac{l\bar{\sigma}_x + m\bar{\tau}_{xy}}{l} = \frac{l\bar{\tau}_{xy} + m\bar{\sigma}_y}{m} = \frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$

or $m/l = \bar{Y}/\bar{X} = \tan\alpha$

If ratio holds then we have only $\bar{\tau}$ and no $\bar{\sigma}$



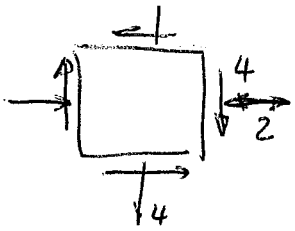
From Strain displacement we have 6 equations

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

From Stress Equilibrium Equations we got

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \bar{X} = 0$$



$\tau_{xy} = -4$

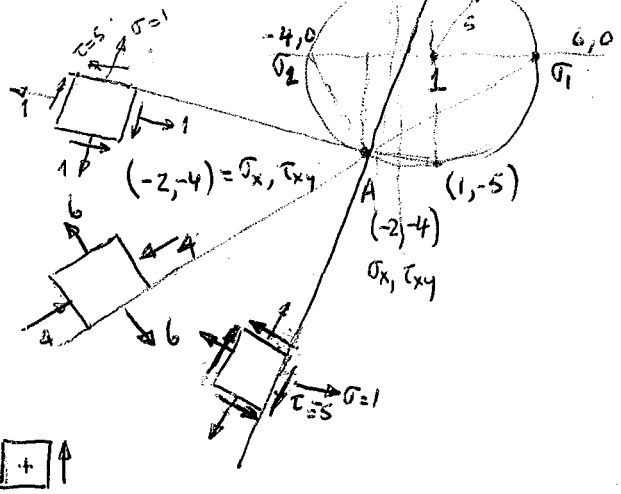
$\sigma_x = -2$

$\sigma_y = 4$

$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$

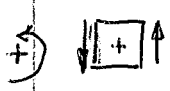
$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 5$ $\quad a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\sigma_1, \tau_{max} = (1,5)$



Draw line from σ_1 through A gives plane for σ_1

Draw line from σ_2 through A gives plane for σ_2



Direction of shear follows RH rule

- For τ_{max} Find point opposite (ie $\sigma, \tau = 1, -5$)
- Draw line between this pt & A - this gives plane
- Choose direction of shear how + shear gives + moment

זהוי שאיבדה פעם מתכנן כהכין מתכנן. יש כמה אפשרויות שצורם להתכוונות:

1. ההתכוונות קורה כשלל שיפוץ סדקים או שסדקים שנמצאים מתחילים לתחיק את שפלם
- וכולם להשתבר מתחת עומס מתמיד ומצטברות.
- לשבר פריק (BRITTLE) שאין תצוגה פלסטית (BRITTLE FRACTURE – NO PLASTICITY)
- לפריכות בלתי השלח-התנק של השבר הוא אנכי לעומס. σ ← ⊏
- לפריכות מאחת השלח-התנק של השבר הוא משופע לעומס. σ ← ⊏

2. ההתכוונות יכולה לקרות בגלל כניעת הציפוי פעמ מאחרת שהשלף הולך ומאריך את המידות שלו יותר ממה שמקובל. למשל, במאמץ יש שינוי שגרל לעומר (YIELD)

3. התכוונות יכולה לקרות בגלל קריסה. המוט וכול להתיב בתצוגה שבולה (BUCKLING)
בכיוון המנכי לעומס הצירי. σ ← ⊏ ⊐ → σ

4. בגלל טמפרטורות גבוהות יכול להיות בעיה. (CREEP) המידות יכולות להשתנות אך שהשלף מפריע לזוף קרוב לו כמו במנוע (בוכנה, טבעות בוכנה) (PISTON)

לכן צריך לדעת ומה לקבוע מתי שלף נכשל

נדון בשיטות שונות על שם TRESCA, VON MISES, קריטריון מאמץ השני מקסימלי, קריטריון עיגול השני מקסימלי, קריטריון MOHR, קריטריון NORRIS. אבל יש הרבה תיאוריות בשימוש.

1. קריטריון TRESCA: גם ידוע כ- התיאוריה של המאמץ הצירה המקסימלי, ותיאוריית COULOMB
התכוונות מתחילה כאשר שהמאמץ הצירה המקסימלי מגיע לערך מסוים
התיאוריה הטובה ביותר מפני שיש תומרים מתכתיים (נמוכים SOFT MAT) שכשלונם הוא דרך משור שהוא 45 מעלות לציר של עומס מקסימלי. מיושרים לצירה:
(FAILURE ON 45° PLANES TO TENSILE LOAD)
שניסוי הציר- $\sigma_1 = \sigma_y$ בהתחלת ההתכוונות $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_y}{2}$ מקסימלית הם 45 מעלות למישר העומס

2. קריטריון VON MISES: גם ידוע כ- התיאוריה של MAXWELL, HUBER, MISES בריטון אנרגיה.
התכוונות מתחילה כאשר המאמץ האפקטיבי (EFFECTIVE) σ_e, מסומן σ_e לערך
אבן יש יחס לצירה אוקטהדרלי (OCTOHEDRAL SHEAR) ל- σ_e
הצירה הראשיים של המאמצים.

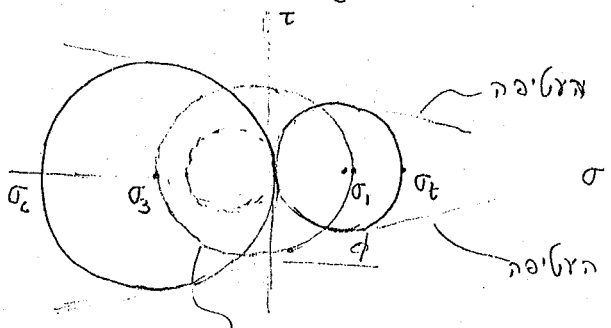
$\sigma_e = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)}$ אנרגיית התעוות $\frac{1}{12G}\sigma_1^2 = \frac{2\sigma_y^2}{12G}$

אז"א $\tau_{oct} < \tau_{max}$, ולכן מתאורת את המצב הכללי של המאמצים כאשר
הצירה מתחילה

3. קריטריון שפ המאמץ הגזירתי המקסימלי: כאשר המאמץ הגזירתי מגיע לערך מסוים, מספיק במקומות. רואים בה מתארים שְׁבִירוּת (פריכות) BRITTLE שהמישור הפנימי הוא מישור שנוצר ב

4. קריטריון מור: התנועות מתחילה כאשר עיגל מור הגדול ביותר $(\sigma_1-\sigma_3)$ נוגע לעקומת התנועות. מור עובד טוב מאוד בקירוב. (LARGEST MOHR'S CIRCLE $(\sigma_1-\sigma_3)$ TOUCHES A FAILURE ENVELOPE).

לשרטט את העקומה מהתנועות - לעשות ניסויות - אחד בעומס בירו מתות והשני מעומס בירו לתוך



קורת דרך הציר מישור מצוות על $45°+\frac{\phi}{2}$ לכיוון של σ_3.

מתנועות מתחילה <- $1 \leq \frac{\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{\tau_2}{\sigma_1}$. כש- הלחץ הוא דומיננטי (DOMINANT), התנועות

5. בתור אורתוטרופי (ORTHOTROPIC MATERIAL), בריכות או התלת ניזיה קורת כאשר שתי מהמשוואות הולה מספקת. כך הקריטריון של NORRIS

$$\frac{\sigma_x^2}{S_x^2} - \frac{\sigma_x\sigma_y}{S_xS_y} + \frac{\sigma_y^2}{S_y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{S_{xy}^2} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_y^2}{S_y^2} - \frac{\sigma_y\sigma_z}{S_yS_z} + \frac{\sigma_z^2}{S_z^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{S_{yz}^2} \leq 1$$

$$\frac{\sigma_z^2}{S_z^2} - \frac{\sigma_z\sigma_x}{S_zS_x} + \frac{\sigma_x^2}{S_x^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{S_{xz}^2} \leq 1$$

כאן x,y,z הם הצירים הראשיים של התומר.

כאן $S_x, S_y, S_{xy}, S_{yz}, S_{xz}, S_z$ הם הערכים שמקבלים מניסויות מיוחדים.

S_x is DESIGNED FROM TENSILE TEST IF σ_x IS TENSILE

S_y " " " COMPRESSION TEST IF σ_x IS COMPRESSIVE

6. תיאוריה שמישמים (apply) לתומרים מתמתים (SOFT) בדרך כלל לא עובדת בתומרים פריכים

7. היתוך מישמים לתשוריות הללו כאשר יש מצב מאמץ תד-צירי, כי התשוריות הללו עובדות, בדרך כלל, במצב מאמץ תד-צירי. HOW TO USE FOR BIAXIAL WHEN MOST THEORIES ONLY WORK FOR UNIAXIAL STATES

8. צריך לקבל את הערכים של σ_1, או τ_{max} או שם לכול המצבים ולבחון מהו/ו המצב הכי ברוע, שם לפי תיאוריות התנועות IS NO FAILURE THEORY.

לפי TRESCA

ר.ב.: המשטח הכניעה בלתי ומאוחד
אותו ערך

לפי VON MISES

לפי MOHR

המשטח המתאי- σ_{ult}

לפי המשטח הרביעי המקסימלי.

קריטריון TRESCA בדרך כלל גבוה מ VON MISES. תוצאות ניסויים מוכיחות יותר עם VON MISES.
בתיאוריות פלסטיות נסתמך עם שני התיאוריות האלו - TRESCA או VON MISES

Experimental data follow VON MISES. IN THEORY OF PLASTICITY, WE WILL CONCENTRATE ON THESE 2.

CANT CHECK ALL STRESS STATE
USE THEORY W/ UNIAXIAL TENSION TEST. ASSUME THAT FAILURE IN TENSION INDICATES FAILURE IN ALL OTHERS

COOK & YOUNG - דוגמה

- TENSION & COMPRESSION TESTS OF A BRITTLE MATERIAL GIVE $\sigma_t = 14$ MPa & $\sigma_c = 120$ MPa
- UNDER LOADING CONDITION, A CERTAIN STATE OF STRESS EXISTS $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -18$ MPa, $\tau_{xy} = 20$ MPa

IS THIS STATE OF STRESS SAFE? CONSIDER PLANE STRESS

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{0 - 18}{2} + \sqrt{\frac{(18)^2}{4} + (20)^2} = -9.0 + 21.9 = 12.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} = -9.0 - 21.9 = -30.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(0+18)^2 + (-18-0)^2 + (0-0)^2 + 6\left(20^2 + 0^2 + 0^2\right)\right]^{1/2} = 39.04 \text{ MPa}$$

קריטריון המאמץ הראשי המקסימלי

MAX STRESS SHOWS SAFE

מכיוון ש- $(\sigma_1 < \sigma_t)$ המודל מבצע טוב בקריטריון הזה.

קריטריון TRESCA

$$12.9 > 0 > -30.9 \quad \Leftarrow \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

TRESCA & VON MISES SHOW UNSAFE, BUT NORMALLY DON'T WORK FOR BRITTLE

$$\tau_{max} = \frac{12.9 + 30.9}{2} = 21.9 \text{ MPa} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

מכיוון ש- בניסוי מתח חד-צירי הגיע $\sigma_t = 14$MPa

τ_{max} - שווה ל- $\sigma_{t/2} = \sigma_{yp/2} = 7$MPa

לפי TRESCA $\tau_{max} > \sigma_{yp/2}$ לכן המודל מבצע כשל גוש

והתיכון להתמוגג.

קריטריון VON MISES

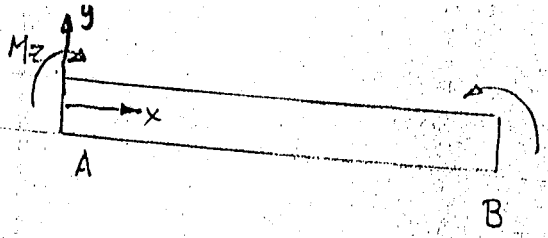
מכיוון ש- $\sigma_e = 39.04$ ובניסוי מתח חד-צירי הגיע $\sigma_t = \sigma_{yp}$

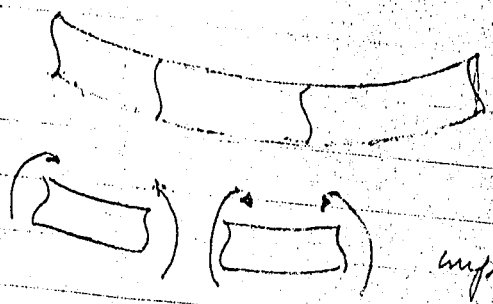
$(\sigma_{yp} < \sigma_e)$. לכן לפי VON MISES המודל מתפקד להתמוגג.

קריטריון MOHR

במצב שלנו התמוגגות $1 \geq \frac{\sigma_1}{\sigma_t} - \frac{\sigma_3}{|\sigma_c|} \Leftarrow 1.18 = \frac{12.9}{14} - \frac{(-30.9)}{120}$

לכן גם כן המודל



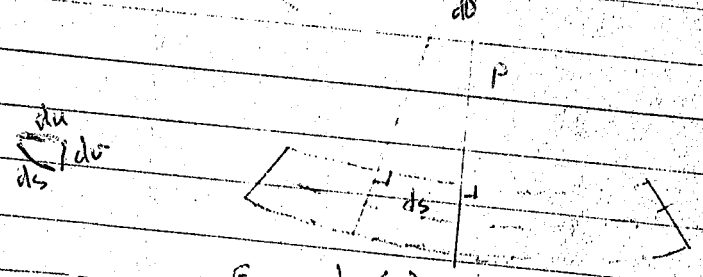


take 2 elements

impossible occurrence

Bernoulli - Navier assumptions

The only possibility is that the cross sections remain plane & normal to the deformed fiber of the beam - for pure bending.

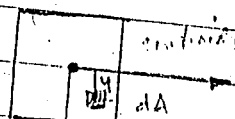


$$\epsilon_x = -k(x)\,y = \frac{\sigma_x}{E} \quad \therefore \quad \sigma_x = -E\,k(x)\,y$$

$$\int_A \sigma_x\,dA = 0 \qquad -\int_A \sigma_x\,y\,dA = M_z$$

$$\int_A \sigma_x\,dA = -E\,k(x)\int_A y\,dA = 0$$

$$-\int_A \sigma_x\,y\,dA = -E\,k(x)\int_A y^2\,dA = M_z = -E\,k(x)\,I_z$$



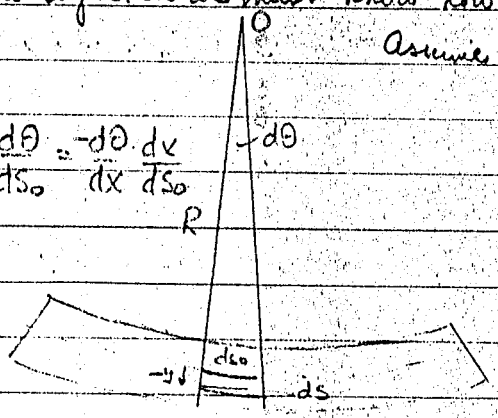
$$\boxed{k(x) = -\frac{M_z}{EI_z}}$$

$$\sigma_x = -E k(x) y = -\frac{M_z y}{I_z}$$

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z}}$$

To find deflection we must know how beam is supported.

Assume $v = f(x) \neq f(y,z)$



$$\frac{1}{R} = \frac{-d\theta}{ds_0} = \frac{-d\theta}{dx}\frac{dx}{ds_0}$$

$$ds = (R-y)\,d\theta$$

$$ds_0 = R\,d\theta$$

$$\epsilon_x = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{(R-y)d\theta - (R d\theta)}{R d\theta}$$

$$\epsilon_x = -y/R = -k(x)y$$

$$\therefore \quad \frac{1}{R} = k(x) \quad \text{curvature.}$$

Hooke's Law $\sigma_x = E\epsilon_x = -\frac{My}{I} = E\left(\frac{-y}{R}\right)$

$$\sigma_x = \frac{-Ey}{R} = -\frac{My}{I}$$

$$\int \sigma_x \cdot y\,dA = -M = \int \frac{-Ey^2\,dA}{R}$$

$$= M = +\frac{EI}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \pm\frac{M}{EI}$$

$$ds_0^2 = dx^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx^2 = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] dx^2$$

$$ds_0 = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}\, dv \qquad \frac{dv}{dx} \ll 1$$

$$\tan\theta = \frac{dv}{dx} \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \sec^2\theta \frac{d\theta}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right] \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = k(x) = \pm \frac{d^2v/dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}$$

Since $\frac{dv}{dx} \ll 1$ $\quad \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \ll \frac{dv}{dx} \ll 1$ $\quad \therefore$

but $K(x) = \frac{M_z}{I_z E} = + \frac{d^2 v}{dx^2}$

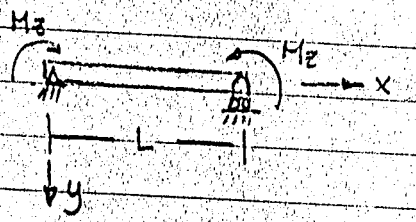
if $M_z = c$

$$\frac{dv}{dx} = + \frac{M_z}{I_z E} x + C_1$$

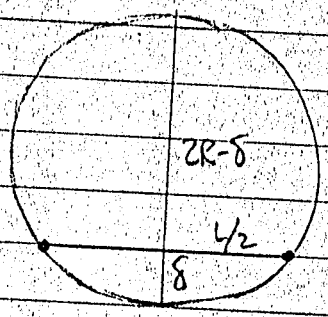
$$v = + \frac{M_z}{2 I_z E} x^2 + C_1 x + C_2$$

if $\begin{cases} v(0) = 0 , & C_2 = 0 \\ v(L) = 0 , & C_1 = \frac{-M_z L}{2 I_z E} \end{cases}$ $\therefore$

$$\boxed{v = \frac{M_z}{2 E I_z} \left(-L x + x^2 \right)}$$



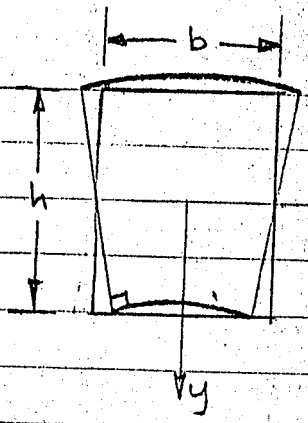
$$v(L/2) = \frac{-M_z L^2}{8 E I_z}$$



$$(2R - \delta)\delta = \frac{L^2}{4}$$

Since $\delta << 2R - \delta$ then $2R\delta = \frac{L^2}{4}$ & $\delta = \frac{L^2}{8R} = \frac{M_z L^2}{8 E I_z}$

Cross sections of Beams



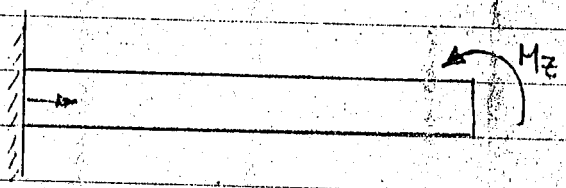
if $\epsilon_x = y/R$ then

$\epsilon_z = -\nu y/R = -y/(R/\nu)$

$\Delta b = \frac{\nu b h}{2R}$ $\quad \epsilon_y = -\frac{\nu y}{R}$

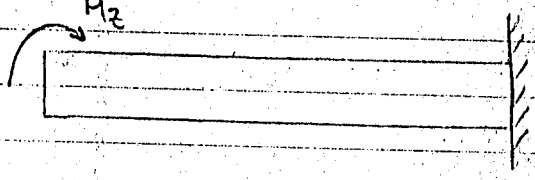
$\Delta h = \int_0^{h/2} \epsilon_y \, dy = -\frac{\nu y^2}{2R}\Big|_0^{h/2} = -\frac{\nu h^2}{8R}$

Cantilever Beam



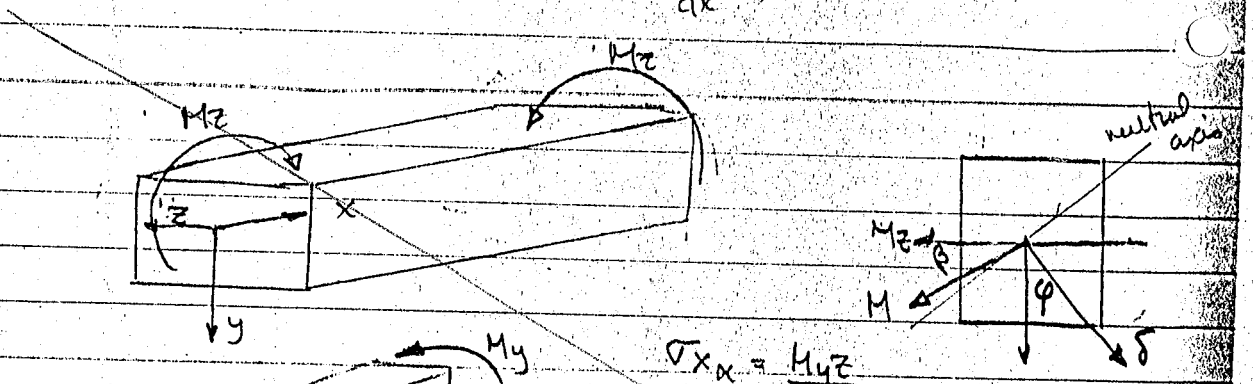
$v(0) = 0$

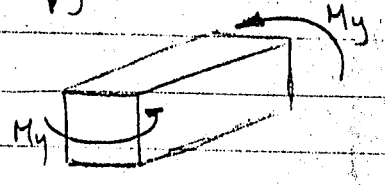
$\frac{dv}{dx}(0) = 0$



$v(L) = 0$

$\frac{dv}{dx}(L) = 0$



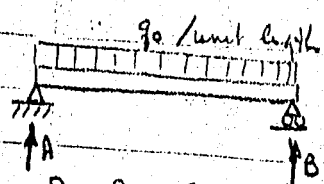


$\sigma_{xx} = \frac{M_y z}{I_y}$

$w = \frac{M_y}{2EI_y}(L-x)x$

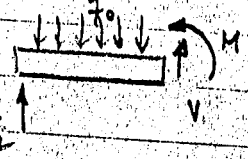
$\delta = (v^2+w^2)^{1/2} = \frac{(L-x)x}{2E}\left[\left(\frac{M_z}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{I_y}\right)^2\right]^{1/2}$

Conditions

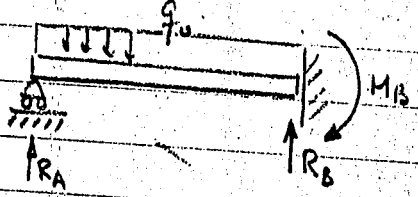


$M_A = 0$ $\quad \delta_A = \delta_B = 0$

$R_A = R_B = qL/2$



$$M(x) = \frac{qL}{2}x - q_0\frac{x^2}{2} \qquad \delta'' = +\frac{M(x)}{EI}$$



$\delta_A = \delta_B = 0 \quad \frac{d\delta}{dx} = 0$

$$\delta^{IV} = q_0 / EI$$

Simply Supp $\delta = 0$ $\qquad +EI\frac{d^2\delta}{dx^2} = M_p$

Fixed $\delta = 0$ $\qquad \frac{d\delta}{dx} = 0$

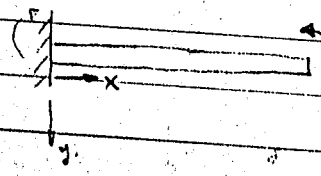
Free $\qquad -EI\frac{d^3\delta}{dx^3} = V_p$; $+EI\frac{d^2\delta}{dx^2} = M_p$

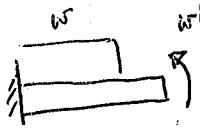


find $M(x)_{max}$, put it into $\sigma_x = \frac{M(I_y y - I_{yz} z)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$

σ_x depends on δ

11/19/70





$$EIv^{IV} = -w + w\langle x-L\rangle^0$$
$$EIv''' = -wx + w\langle x-L\rangle^1 + C_1$$
$$EIv'' = -wx^2/2 + w\langle x-L\rangle^2/2 + C_1x + C_2$$
$$EIv' = -wx^3/6 + w\langle x-L\rangle^3/6 + C_1x^2/2 + C_2x + C_3$$
$$EIv = -wx^4/24 + w\langle x-L\rangle^4/24 + C_1x^3/6 + C_2x^2/2 + C_3x + C_4$$

$v=0 \quad x=0 \implies 0 = C_4$

$v'=0 \quad x=0 \implies 0 = C_3$

$EIv'''=0 \quad x=L+a \implies -w(L+a) + wa + C_1 = 0 \qquad C_1 = wL$

$EIv''=M \quad x=L+a \implies -w\frac{(L+a)^2}{2} + \frac{wa^2}{2} + C_1(L+a) + C_2 = wL^2/6$

$$-\frac{wL^2}{2} - wLa - \frac{wa^2}{2} + \frac{wa^2}{2} + \frac{wL^2}{2} + wLa + C_2 = wL^2/6$$
$$C_2 = -wL^2/3$$

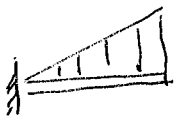
$$EIv = -\frac{wx^4}{24} + w\frac{\langle x-L\rangle^4}{24} + \frac{wLx^3}{6} - \frac{wL^2x^2}{6}$$

$0 < x < L$

$$v = -\frac{w}{EI}\left\{\frac{x^2L^2}{6} - \frac{x^3L}{6} + \frac{x^4}{24}\right\}$$

$x > L$

$$v = \frac{w}{24EI}\left\{(x-L)^4 - x^4\right\} + \frac{wL^4}{6EI}\left\{\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right\}$$



$$EIv^{IV} = -q_0(x/L)$$

$$EIv''' = -\frac{q_0}{L}\frac{x^2}{2} + C_1 = -\frac{q_0}{L}\frac{x^2}{2} + \frac{27q_0L}{120} = -\frac{33}{120}q_0L = -\frac{11}{60}q_0L$$

$$EIv'' = -\frac{q_0}{L}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

$$EIv' = -\frac{q_0}{L}\frac{x^4}{24} + C_1x^2/2 + C_2x + C_3 = -\frac{q_0}{120L}x^5 + \frac{27q_0}{120}x^3L - \frac{79q_0x^2L^2}{240}$$

$$EIv = -\frac{q_0}{L}\frac{x^5}{120} + C_1x^3/6 + C_2x^2/2 + C_3x + C_4$$

$v(x=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

$v'(x=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$v(x=L) = 0 \Rightarrow \quad -\frac{q_0L^4}{120} + \frac{C_1L^3}{6} + \frac{C_2L^2}{2} = 0$

$EIv''(x=L) = M = 0 \Rightarrow \quad -\frac{q_0L^2}{6} + C_1L + C_2 = 0$

$$C_2 = q_0L^2/6 - C_1L$$

$$C_2 = \frac{q_0L^2}{20} - \frac{27q_0L^2}{120}$$

$$-\frac{q_0L^4}{120} + \frac{C_1L^3}{6} + \frac{10q_0L^4}{120} - \frac{3C_1L^3}{6} = 0$$

$$\frac{9q_0L^4}{120} - \frac{2C_1L^3}{6} = 0$$

$$C_1 = \frac{3 \cdot 9q_0L}{120}$$

$$\tan\varphi = -I_{yz}/I_y \qquad (12.43 - 12.45)$$

$$K(x) = \frac{M_z\left(I_y^2 + I_{yz}^2\right)^{1/2}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} = \frac{M(x)}{EI}, \qquad I = \frac{\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}{\left(I_y^2 + I_{yz}^2\right)^{1/2}}$$

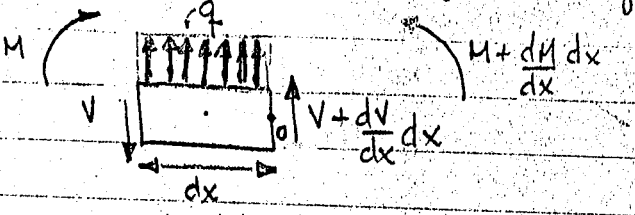
$$\sigma_x = \frac{M\left[I_y y - I_{yz} z\right]}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

Stresses normal xy plane = 0 σ_z small & neglected; cross section small; cross section retains shape $\rightarrow \tau_{yz} = 0$ $\sigma_y = -(\ )$ excluded

stresses on boundary act tangentially to boundary.

τ_{xy}, τ_{xz} } are small $\therefore$ deflect $\neq f(\tau_{xy}, \tau_{xz})$.

deflection will be taken as function of σ_x only.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad V + \frac{dV}{dx}dx + q\,dx - V = 0$$

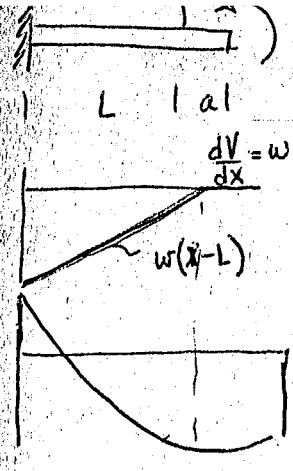
$$+\circlearrowleft \Sigma M_o = M - V\,dx + q\,dx\,\frac{dx}{2} - \left(M + \frac{dM}{dx}dx\right) = 0$$

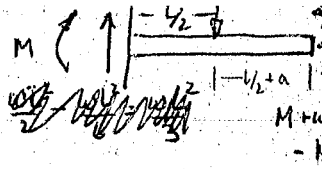
$\frac{dV}{dx} = -q$; now neglect $q\frac{dx^2}{2}$ compared $V\,dx$ & $\frac{dM}{dx}dx$

$$\frac{dM}{dx} = -V \qquad \frac{d^2\delta}{dx^2} = +K(x) = +\frac{M(x)}{EI}$$

$$\frac{d^3\delta}{dx^3} = +\frac{dM}{dx}\Big/(EI) = -\frac{V(x)}{EI} \qquad V(x) = -EI\frac{d^3\delta}{dx^3}$$

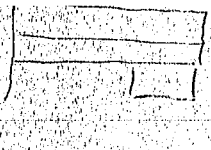
$$\frac{d^4\delta}{dx^4} = -\frac{dV/dx}{EI} = +\frac{q}{EI} \qquad q(x) = +EI\frac{d^4\delta}{dx^4}$$





$M + wL(L+a) - wL\left(\frac{L}{2}+a\right) - \frac{wL^2}{6} = 0$

$-M = wL\frac{L}{2} - \frac{wL^2}{6}$



$\frac{dV}{dx} = w = -\frac{d^2M}{dx^2}$

$\frac{dM}{dx} = -V$

$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M \Rightarrow EIv^{IV} = -w$

$EIv^{III} = -V$

$EIv^{IV} = -w + w\langle x-L\rangle^0$

$EIv^{III} = -wx + w\langle x-L\rangle^1 + C_1$

$EIv'' = -\frac{wx^2}{2} + w\langle x-L\rangle^2 + C_1x + C_2$

$EIv' = -\frac{wx^3}{6} + w\langle x-L\rangle^3 + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

$EIv = -\frac{wx^4}{24} + w\langle x-L\rangle^4 + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$

① $v(x=0) = 0$

② $v'(x=0) = 0$

③ $EIv'''(x=L^{+a}) = 0$

$EIv''(x=L) = M_L$

① $\Rightarrow C_4 = 0$

② $\Rightarrow C_3 = 0$

③ $\Rightarrow 0 = -w\frac{(L+a)^3}{6} + \frac{wa^3}{6} + C_1 = 0 \qquad C_1 = +w\frac{(L+a)^3}{6} - \frac{wa^3}{6}$

④ $\Rightarrow M_c = -\frac{w(L+a)^2}{2} + \frac{wa^2}{2} + C_1(L+a) + C_2 = -\frac{w(L+a)^2}{2} + \frac{wa^2}{2} + \frac{w(L+a)^3}{6} + \frac{wa^3}{6} + C_2 = \frac{w}{2}\left\{-L^2 - 2aL - a^2 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}L^2 + aL\right\} + C_2$

$C_2 = M_c + \frac{w(L+a)^2}{2} = \frac{wL^2}{6} + \frac{w(L+a)^2}{2}$

$M_c = \frac{w}{2}(L^2+a^2) + C_2$

$C_2 = \frac{wL^2}{6} - \frac{w}{2}(L^2+a^2)$

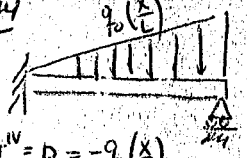
$v(x) = \frac{1}{EI}\left\{\frac{wx^4}{24} + w\langle x-L\rangle^4 + w(L+a)\left(\frac{x^3}{6}\right) + \frac{wx^2}{2}\left[\frac{L^2}{6} + \left(\frac{L^2+a^2}{2}\right)\right]\right\}$

$EIv''' = -wx + w\langle x-L\rangle^1 + w(L+a) = -V \quad \checkmark \qquad V = w(x-L)$

$EIv'' = M = -\frac{wx^2}{2} + w\langle x-L\rangle^2 + wLx + \frac{wL^2}{6} - \frac{w}{2}(L^2+a^2)$

$-\frac{w}{2}(x^2 - 2xL + L^2) + wx^2 + w(xL - L^2) + \frac{wL^2}{6} - \frac{wL^2}{2} - \frac{wa^2}{2}$

8.44



$EIv^{IV} = p = -q_0\left(\frac{x}{L}\right)$

$EIv^{IV} = -\frac{q_0}{L}x$

$EIv''' = -\frac{q_0}{L}\frac{x^2}{2} + C_1$

$EIv'' = -\frac{q_0}{L}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$

$EIv' = -\frac{q_0}{L}\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$

$EIv = -\frac{q_0}{L}\frac{x^5}{120} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$

$v(x=0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$

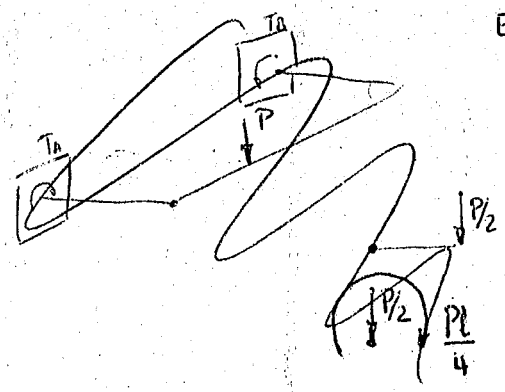
$v'(x=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$v(x=L) = 0 \qquad -\frac{q_0L^4}{120} + \frac{C_1L^3}{6} + \frac{C_2L^2}{2} = 0$

$EIv''(x=L) = 0 \qquad -\frac{q_0L^2}{6} + C_1L + C_2 = 0$

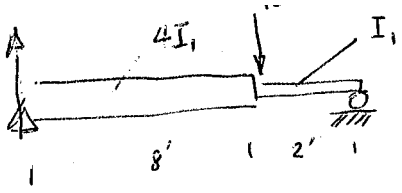
$C_2 = -C_1L + \frac{20}{120}q_0L^2 = -\frac{7q_0L^2}{120}$

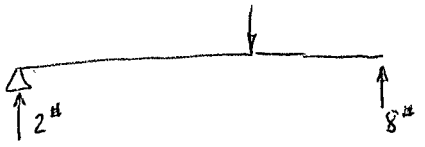
$-\frac{q_0L^4}{120} + C_1L^3 - \frac{7}{120}C_1L^3 + \frac{7}{120}q_0L^4 = 0$

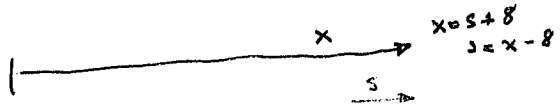


$v = \frac{1}{EI}\left\{-\frac{q_0}{120L}x^5 + \frac{27q_0L}{720}x^3 - \frac{7q_0L^2}{240}x^2\right\}$

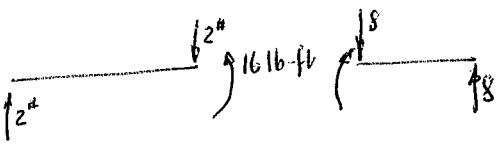
$EIv'''(x=L) = -V = -\frac{q_0}{L}\frac{L^2}{2} + \frac{27q_0L}{120} = -\frac{33}{120}q_0L$







$\Rightarrow$



$-V = 4EI_1 v''' = +2$

$M = 4EI_1 v'' = +2x + C_1$

$4EI_1 v' = +x^2 + C_1 x + C_2$

$4EI_1 v = +x^3/3 + C_1 x^2/2 + C_2 x + C_3$

$v(x=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

$M(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$EI v''' = -V = 2$

$4EI_1 v = +x^3/3 + C_2 x$

$4EI_1 v' = x^2 + C_2$

$4EI_1 v' = 64 + C_2 = \bar{C}_2$

$4EI_1 v = \frac{512}{3} + C_2 \cdot 8 = -2\bar{C}_2 - \frac{64}{3}$

$\frac{576}{3} = -2\bar{C}_2 - 8C_2$

$(64 = \bar{C}_2 - C_2)$

$\frac{576}{3} + \frac{384}{3} = -10C_2$

$-960 = C_2$

$-32 = C_2 \Rightarrow \bar{C}_2 = 32$

$C_3 = -\frac{64}{3} - 76.8 = -97.73$

-21.33

38.2

-97.73

$EI_1 v = -\frac{4}{3}s^3 + 8s^2 + \bar{C}_2 s - 2\bar{C}_2 - \frac{61}{3}$

$EI_1 v = -\frac{4}{3}s^3 + 8s^2 + 32s - 64 - 97.73$

$v = \frac{1}{EI_1}\left(-\frac{4}{3}s^3 + 8s^2 + 38.2s - 97.73\right)$

$s = x - 8$

$v = \left(\frac{x^3}{3} + 25.6x\right)\frac{1}{4EI_1}$

$v(x=8) = v(s=0)$

(1) $\frac{512}{12EI} + \frac{8C_2}{4EI} = \frac{-2\bar{C}_2}{EI} - \frac{64}{3EI}$ $\Rightarrow$ $\frac{8C_2}{4EI} + \frac{256}{12EI} = \frac{-512}{12EI}$

$v'(x=8) = v'(s=0)$

(2) $\frac{124}{4EI} + \frac{2C_2}{4EI} = \frac{2\bar{C}_2}{EI}$

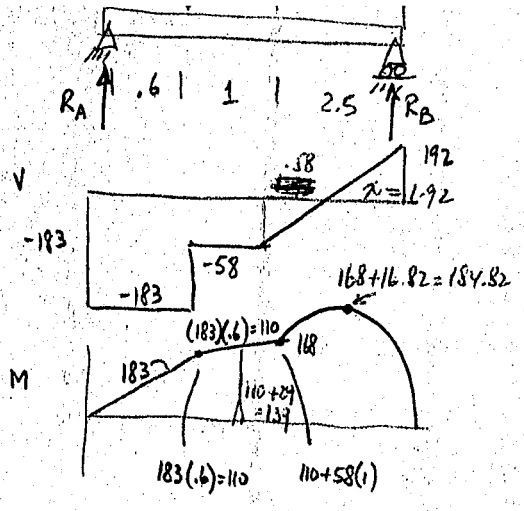
(1)+(2) $\frac{640}{4EI} + \frac{10C_2}{4EI} = -\frac{64}{3EI} = -\frac{21.33}{EI}$

$C_2 = -\frac{281.33}{2.5} = -112.53$

$\bar{C}_2 = \frac{32 - 36.26}{2} = -\frac{4.26}{2} = -2.13$

$\bar{C}_2 = -21.33 + 4.26 = -17.07$

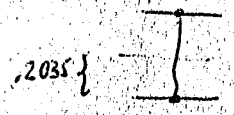
-17.07



$\Sigma M_A \circlearrowleft = 0 \quad 125(.6) + 250(2.85) - R_B(4.1) = 0$

$R_B = 192.1\ kN \quad R_A = 183\ kN$

$\frac{192}{x} = \frac{58}{2.5-x} \qquad x = 1.92$



$\frac{My}{I} = \sigma$

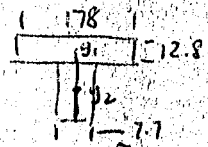
$I_{zz} = 2.16 \times 10^{-4}\ m^4$

$\frac{kN\text{-}m\ (184.82)(.2035)}{2.16 \times 10^{-4}} = 174.1\ MPa$ max

@A 130.96 MPa

$\tau = \frac{VQ}{Ib}$

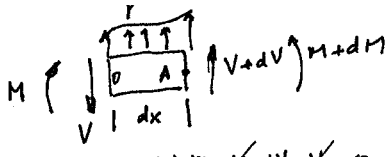
$Q = \int_A y\,dA =$



$= [178(12.8)][203.5 - 6.4] + [7.7][203.5 - 12.8][203.5 - 12.8]/2 = 589084\ mm^3$

$= 5.89 \times 10^{-4}\ m^3$

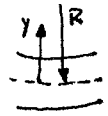
$\tau = \frac{(58\ kN)(5.89 \times 10^{-4})}{2.16 \times 10^{-4}(.0077)} = 20.543\ MPa$



$$\Sigma F_y = p(x)dx + V + dV - V = 0 \qquad \boxed{-p(x) = \frac{dV}{dx}}$$

$$\Sigma M_o = -M + p dx \cdot \frac{dx}{2} + (V+dV)dx + M + dM$$

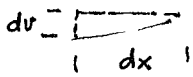
$$\Sigma M_A = -M + V dx - p dx \cdot \frac{dx}{2} + M + dM = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dM}{dx} = -V}$$



$$\epsilon_x = \frac{-y}{R} \qquad \sigma_x = E\epsilon_x = \frac{-Ey}{R} = -\frac{My}{I}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \cong \frac{d^2v}{dx^2} \quad \text{if } \left(\frac{dv}{dx}\right) << 1$$



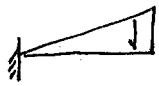
$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2}$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}} \Rightarrow \boxed{EIv'' = M}$$

$$\frac{dM}{dx} = -V \Rightarrow \boxed{(EIv'')' = \frac{dM}{dx} = -V} \Rightarrow \boxed{-(EIv'')' = V}$$

$$\frac{dV}{dx} = -p(x) \Rightarrow \left[-(EIv'')'' = \frac{dV}{dx} = -p\right] \Rightarrow \boxed{(EIv'')'' = p(x)}$$



$$w = w_0 \frac{x}{L} \Rightarrow (EIv'')'' = -w_0 \frac{x}{L} \quad \checkmark$$

המכללה האקדמית יהודה ושומרון

תורת החוזק 1

תרגיל מס' 10

8.17 and 8.18 For the cantilever beam and loading shown, determine (*a*) the equation of the elastic curve for portion *AB* of the beam, (*b*) the deflection at *B*, (*c*) the slope at *B*.

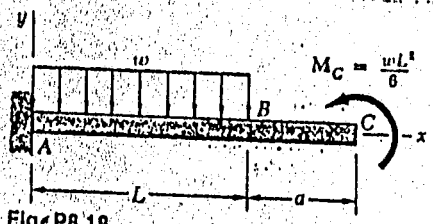


Fig. P8.18

8.25 and 8.26 For the beam and loading shown, determine (*a*) the equation of the elastic curve for portion *BD*, (*b*) the slope at *B*, (*c*) the deflection at the center *C* of the beam.

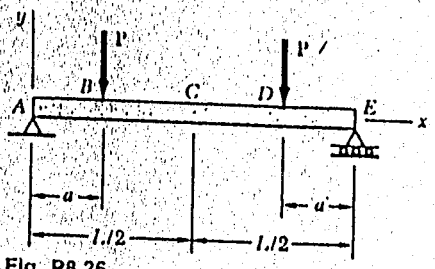


Fig. P8.26

8.41 through 8.44 For the beam and loading shown, determine the reaction at the supports, and the equation of the elastic curve.

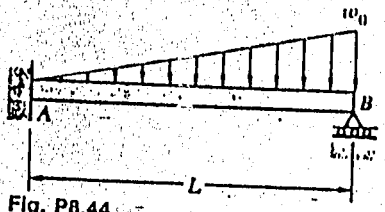


Fig. P8.44

8.45 through 8.48 Determine the reaction at the support and draw the bending-moment diagram for the beam and loading shown.

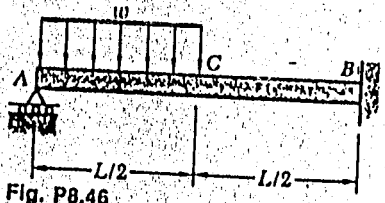


Fig. P8.46

8.55 and 8.56 Determine the reaction at *A* and draw the bending-moment diagram for the beam and loading shown. Determine the equation of the elastic curve.

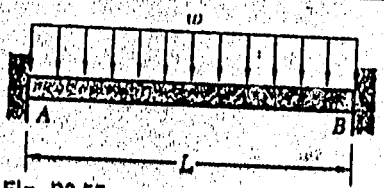
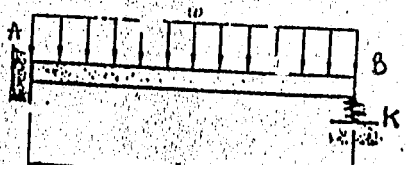


Fig. P8.55

8.42. Determine the equation of the elastic curve and draw it.



תוכן חומרים 2 – עיון תרגילי כיתה מס' 4

1. מוט אלומיניום עגול בקוטר 6 מ"מ מכופף לקשת עגולה בקוטר 3 מ'. מה הגודל המרבי בציר המכופף ומה $E = 7 \cdot 10^4 \frac{MN}{m^2}$. (עגלגה - dw 140)

2. בקורות הבאות בדוק לפחות משוואה אחת המקשרת בין האלמנטים וגודל מהכוח, כמוגב צורה מומנט, כביה, שלוש הקפ האלמנטים, והקפ האלמנטים:

א)

ב)

ג)

ד)

ה)

ו)

3. בקורות הבאות בדוק לפחות משוואה אחת המקשרת בין האלמנטים, והקפ האלמנטים, לפי סיכום שלוש מהם.

א)

ב)

ג)

1. לקורה בקצה $EI=const$ ואורך 7, משוואת הקו האלסט' היא:

$$y = \frac{M_0}{(7\cdot 7)}\left(7x^2 - x^3\right)$$

פתרון: למצוא את פונקציית הלחצון ולמצוא את מיקום המרכים.

2. בקורות הבאות פתרון לפחות משוואת הקו האלסטי ולמצוא ערכו מהכי כלפי מעלה, שנקרא הקו האלסטי, והקו הישר.

א)

ב)

ג)

ד)

ה)

ו)

תשובה: ו) $EIy = \frac{q_0 l^3 x}{96} - \frac{q_0 x^5}{360 l^2} - \frac{l x^3}{24} q_0$

ה) $EIy = \frac{1}{360 l^2}\cdot\left(5l^4 + 4x^4 l - 5x^5\right)\frac{l q_0}{2}$

ד) $EIy = q_0\left(\frac{x^4}{192 l} - \frac{5 l^3 x}{96} - \frac{5x^2}{24}\right)$

3) בקורות הבאות פתרון לפחות משוואת הקו האלסטי, כפי שנלמד בשיעור הקו האלסטי, והקו הישר, בקורות הבאות. יש לבחר בשיטת כי פתרון שנוחה.

א)

ב)

ג)

ד)

gradual or stepwise variations in the shaft diameter are made to accommodate rotors, bearings, collars, retainers, etc. Likewise, haunched or tapered beams are frequently employed in aircraft as well as in bridge construction. By interpreting semigraphically the mathematical operations of solving the governing differential equation, an effective procedure for obtaining deflections in complicated situations has been developed. Using this alternative procedure, one finds that problems with load discontinuities and arbitrary variations of inertia of the cross-sectional area of a beam cause no complications and require only a little more arithmetical work for their solution. The solution of such problems is the objective in this part of the chapter on the moment-area method.

The method to be developed usually is used to obtain only the displacement and rotation at a single point on a beam. It can be used to determine the equation of the elastic curve, but no advantage is gained in comparison with the direct solution of the differential equation. Often, however, it is the deflection or the angular rotation of the elastic curve at a particular point of a beam or both that are of greatest interest in the solution of practical problems.

The method of moment areas is just an alternative method for solving the deflection problem. It possesses the same approximations and limitations discussed earlier in connection with the solution of the differential equation of the elastic curve. By applying it, one determines only the deflection due to the flexure of the beam; deflection due to shear is neglected. Here the application of the method will be limited to statically determinate beams. Statically indeterminate situations will be considered in the next chapter.

11-15. DERIVATION OF THE MOMENT-AREA THEOREMS

The necessary theorems are based on the geometry of the elastic curve and the associated $M/(EI)$ diagram. Boundary conditions do not enter into the derivation of the theorems since the theorems are based only on the interpretation of definite integrals. As will be shown later, further geometrical considerations are necessary to solve a complete problem.

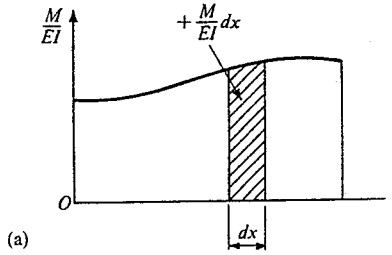
For deriving the theorems, Eq. 11-10, $d^2v/dx^2 = M/(EI)$, can be rewritten in the following alternative forms:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \text{or} \quad d\theta = \frac{M}{EI}\,dx \tag{11-36}$$

As may be seen from Fig. 11-20(a), the quantity $[M/(EI)]\,dx$ corresponds to an infinitesimal area of the $M/(EI)$ diagram. According to Eq. 11-36 this area is equal to the change in angle between two adjoining tangents. The contribution of an angle change in one element to the deformation of the elastic curve is shown in Fig. 11-20(b).

If the small angle change $d\theta$ for an element is multiplied by a distance x from an arbitrary origin to the same element, a vertical distance dt is obtained, see Fig. 11-20(b). As only small deflections are considered, no distinction between the arc AA' and the vertical distance dt need be made. Based on this geometrical reasoning, one has

$$dt = x\,d\theta = \frac{M}{EI}\,x\,dx \tag{11-37}$$



Formally integrating Eqs. 11-36 and 11-37 between any two points such as A and B on a beam, see Fig. 11-21, yields the two moment-area theorems. The first is

$$\int_A^B d\theta = \theta_B - \theta_A = \Delta\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx \tag{11-38}$$

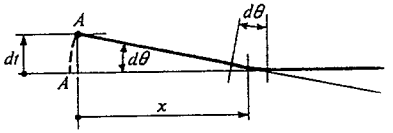


Fig. 11-20. Interpretation of a small angle change in an element.

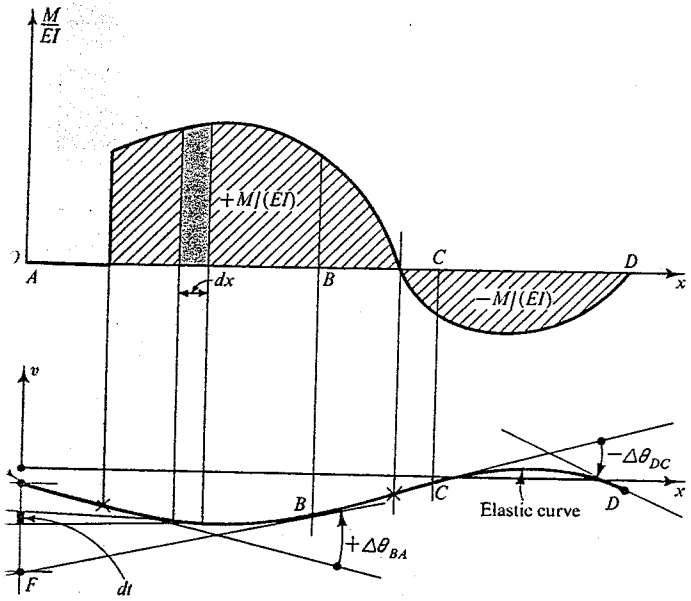
This states that the change in angle measured in radians between the two tangents at any two points A and B on the elastic curve is equal to the $M/(EI)$ area bounded by the ordinates through A and B. Therefore, if the slope of the elastic curve at one point, as at A, is known, the slope at another point on the right, as at B, can be determined:

$$\theta_B = \theta_A + \Delta\theta_{BA} \tag{11-39}$$

The first theorem shows that a numerical evaluation of the $M/(EI)$ area bounded between the ordinates through any two points on the elastic curve gives the angular rotation between the corresponding tangents. In performing this summation, areas corresponding to the positive bending moments are taken positive, and those corresponding to the negative moments are taken negative. If the sum of the areas between any two points, such as A and B, is positive, the tangent on the right rotates in the counterclockwise direction; if negative, the tangent on the right rotates in a clockwise direction (see Fig. 11-21(b)). If the net area is zero, the two tangents are parallel.

The quantity dt in Fig. 11-21(b) is due to the effect of curvature of an element. By summing this effect for all elements from A to B, the vertical distance AF is obtained. Geometrically this distance represents the displacement or deviation of a point A from a tangent to the elastic curve at B. Henceforth, it will be termed the *tangential deviation* of a point A from a tangent at B and will be designated t_{AB}. The foregoing, in mathematical form, gives the second moment-area theorem:

$$t_{AB} = \int_A^B d\theta\,x = \int_A^B \frac{M}{EI}\,x\,dx \tag{11-40}$$



1-21. Relation between the $M/(EI)$ diagram and the elastic

This states that the tangential deviation of a point A on the elastic curve from a tangent through another point B also on the elastic curve is equal to the statical (or first) moment of the bounded section of the $M/(EI)$ diagram around a vertical line through A. In most cases, the tangential deviation is not in itself the desired deflection of a beam.

Using the definition of the center of gravity of an area, one may for convenience restate Eq. 11-40 in numerical applications in a simpler form as

$$t_{AB} = \Phi \bar{x} \tag{11-41}$$

where Φ is the total area of the $M/(EI)$ diagram between the two points considered and $\bar{x}$ is the horizontal distance to the centroid of this area from A.

By analogous reasoning the deviation of a point B from a tangent through A is

$$t_{BA} = \Phi \bar{x}_1 \tag{11-42}$$

where the same $M/(EI)$ area is used, but $\bar{x}_1$ is measured from the vertical line through point B, Fig. 11-22. Note carefully the order of the subscript

Section 11-15 Derivation of the moment-area theorems

letters for t in these two equations. The point whose deviation is being determined is written first.

In the above equations, the distances $\bar{x}$ or $\bar{x}_1$ are always taken positive, and as E and I are also positive quantities, the sign of the tangential deviation depends on the sign of the bending moments. A positive value for the tangential deviation indicates that a given point lies above a tangent to the elastic curve drawn through the other point and vice versa, Fig. 11-22.

The above two theorems are applicable between any two points on a continuous elastic curve of any beam for any loading. They apply between and beyond the reactions for overhanging and continuous beams. However, it must be emphasized that only relative rotation of the tangents and only tangential deviations are obtained directly. A further consideration of the geometry of the elastic curve at the supports to include the boundary conditions is necessary in every case to determine deflections. This will be illustrated in the examples that follow.

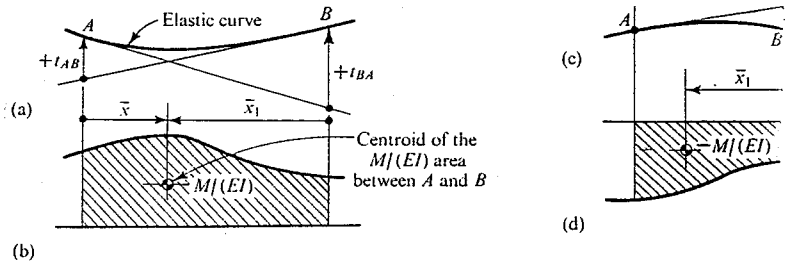


Fig. 11-22. The meaning of signs for tangential de

In applying the moment-area method a carefully prepared sketch of the elastic curve is always necessary. Since no deflection is possible at a pinned or a roller support, the elastic curve is drawn passing through such supports. At a fixed support, neither displacement nor rotation of the tangent to the elastic curve is permitted, so the elastic curve must be drawn tangent to the direction of the unloaded axis of the beam. In preparing a sketch of the elastic curve in the above manner, it is customary to exaggerate the anticipated deflections. On such a sketch the deflection of a point on a beam is usually referred to as being above or below its initial position, without much emphasis on the signs. To aid in the application of the method, useful properties of areas enclosed by curves and centroids are assembled in Table 2 of the Appendix.

EXAMPLE 11-9

Consider an aluminum cantilever beam 16 in. long with a 1,000-lb force applied 4 in. from the free end, as shown in Fig. 11-23(a). For a distance

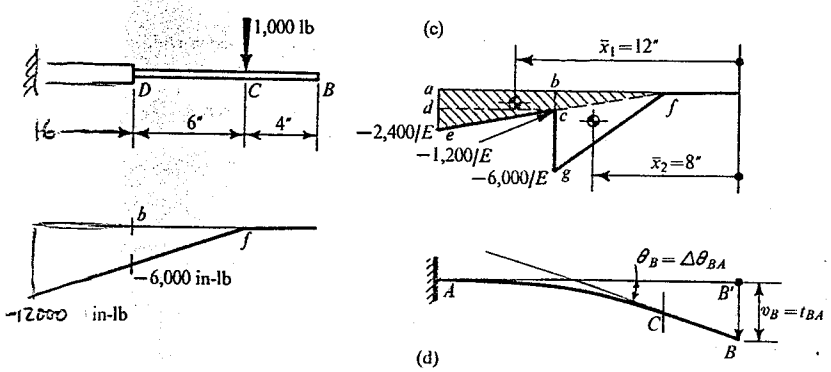


Fig. 11-23

of 6 in. from the fixed end, the beam is of greater depth than it is beyond, having $I_1 = 5$ in.^{4} For the remaining 10 in. of the beam, $I_2 = 1$ in.^{4} Find the deflection and the angular rotation of the free end. Neglect the weight of the beam, and assume E for aluminum at 10^7 psi.

SOLUTION

The bending-moment diagram is in Fig. 11-23(b). By dividing all ordinates of the M diagrams by EI, the $M/(EI)$ diagram in Fig. 11-23(c) is obtained. Two ordinates appear at point D. One, $-1{,}200/E$, is applicable just to the left of D, the other, $-6{,}000/E$, applies just to the right of D. Since the bending moment is negative from A to C, the elastic curve throughout this distance is concave down, Fig. 11-23(d). At the fixed support A, the elastic curve must start out tangent to the initial direction AB' of the unloaded beam. The unloaded straight segment CB of the beam is tangent to the elastic curve at C.

After the foregoing preparatory steps, from the geometry of the sketch of the elastic curve it may be seen that the distance BB' represents the desired deflection of the free end. However, BB' is also the tangential deviation of the point B from the tangent at A. Therefore the second moment-area theorem may be used to obtain t_{BA}, which in this special case represents the deflection of the free end. Also, from the geometry of the elastic curve it is seen that the angle included between the lines BC and AB' is the angular rotation of the segment CB. This angle is the same as the one included between the tangents to the elastic curve at the points A and B, and the first moment-area theorem may be used to compute this quantity.

It is convenient to extend the line ec in Fig. 11-23(c) to the point f for computing the area of the $M/(EI)$ diagram. This gives two triangles, the areas of which are easily calculated.*

* A little ingenuity in such cases saves arithmetical work. Of course it is perfectly correct in this example to use the two triangular areas dce and bfg, and a rectangle $abcd$.

The area of triangle afe:

$$\Phi_1 = -\tfrac{1}{2}(12)(2{,}400)/E = -14{,}400/E$$

The area of triangle fcg:

$$\Phi_2 = -\tfrac{1}{2}(6)(4{,}800)/E = -14{,}400/E$$

$$\theta_B = \Delta\theta_{BA} = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{28{,}800}{10^7} = -0.00288 \text{ radian}$$

$$v_B = t_{BA} = \Phi_1\bar{x}_1 + \Phi_2\bar{x}_2 = (-14{,}400/E)(12) + (-14{,}400/E)(8)$$

$$= -0.0288 \text{ in.}$$

Note the numerical smallness of both the above values. The negative sign of $\Delta\theta$ indicates clockwise rotation of the tangent at B in relation to the tangent at A. The negative sign of t_{BA} means that point B is below a tangent through A.

EXAMPLE 11-10

Find the deflection due to the concentrated force P applied as shown in Fig. 11-24(a) at the center of a simply supported beam. The flexural rigidity EI is constant.

SOLUTION

The bending-moment diagram is in Fig. 11-24(b), Since EI is constant, the $M/(EI)$ diagram need not be made, as the areas of the bending-

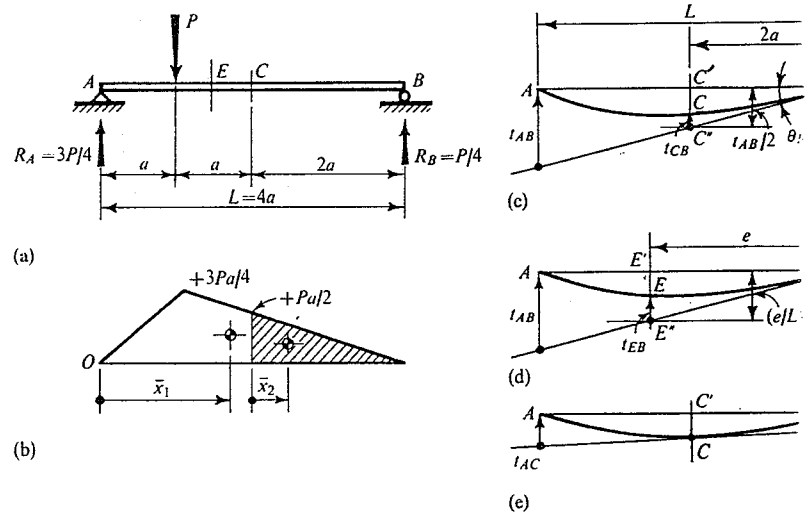


Fig. 11-24

(הקירוב) $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{d}{\rho} = \kappa$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI_{zz}}$

שיפוע בנקודות a ו-b.

עבור $\frac{d}{\rho} < 0.1$ (הקירוב)

כאשר התנועה בקורה בעיקר בכיפוף, יש צורך שקבלו שהחתך בה. השיטה זו נקראת (TAPERED) מוגדלת כאשר יש שינויים בשטח-החתך, או מסוים מסוים, קורות יתקבלו קורות (CURVATURE) כפופות בעומס גדול. נשתמש בשרטוט של הקורה לקבל את הקירוב.

או אי-שוויון של השטח-החתך.

מכאן ש- $\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ו- $\left(\frac{dy}{dx}\right) \frac{dx}{\rho} = \frac{dx}{d\theta_P}$, לכן ניתן לכתוב ש-

$$d\theta_P = \frac{M}{EI} dx$$

לכן, שינוי בזווית השיפוע של הקורה שווה לשטח תחת השרטוט של העקמומיות על הקורה.

בשיטת שטחי המומנטים אנו מחשבים את שינוי הזווית בין שתי נקודות על הקורה, θ_{BA}, שהוא שווה לשטח שבין שתי הנקודות בשרטוט העקמומיות $\frac{M}{EI}$. אם מתייחסים לשטחים שבין הנקודות כמסות, ניתן לחשב את מיקום מרכז הכובד של השטחים, $\bar{x}$, ולמצוא את המומנט הסטטי של השטחים סביב ציר המאונך לקורה ועובר דרך מרכז הכובד של השטחים. המומנט הסטטי שווה למכפלת השטח במרחק $\bar{x}$ ממרכז הכובד.

קורה בעומס מפורש על $q\ N/m$

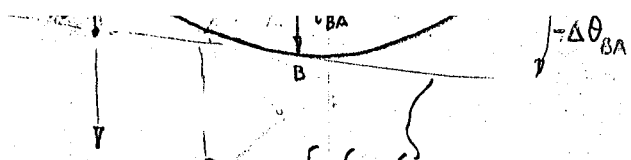
מאזן ה- M בסמך הוא $\frac{ql^2}{12}$. לכן $\frac{M}{EI} = \frac{ql^2}{12EI}$. רצף הסמך, בנקודה A, $\theta_A = 0$

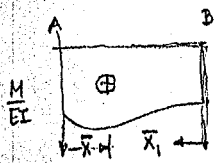
ב-נקודה B שמרחק x_B על

$$\theta_B - \theta_A = \int_A^B d\theta_P = \int_{x=0}^{x=x_B} \frac{M}{EI} dx_P$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_0^{x_B} \frac{M}{EI} dx_P$$

משפט שטחי העקמומיות של נקודה A משרטט בנקודה B שווה לשטח האנכי t_{AB} של השרטוט $\frac{M}{EI}$ ביחס לנקודה B. נקבל את המרחק האנכי t_{AB} של נקודה A משרטט בנקודה B ביחס לנקודה A. שטח נקבל את כל ההשפעות מכל השרטוטים של $\frac{M}{EI}$ הכמות dt_B היא מהעקמומיות של השרטוט dx_P. שטח השטח $\frac{M}{EI} x_P dx_P = dt_B$, או שהוא שווה לשטח תיבה, השיפוע הולך וגדל ומקטין את השטח, השיפוע הולך ומקטין את השטח.





אם נשנה בהצדדת מרכב הכובד של שטח

$$t_{AB} = \int_B^A \frac{M}{EI}\bar{x}\,dx = \left(\int_B^A \frac{M}{EI}dx\right)\bar{x} = \Phi\bar{x}$$

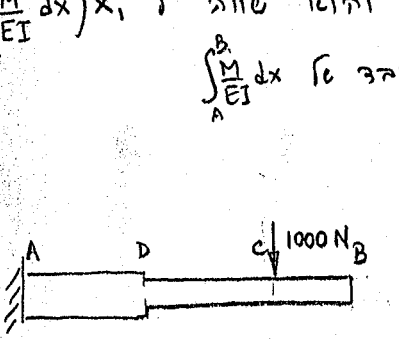
$\bar{x}$ המרחק האופקי מ-A למרכב הכובד של $\int_B^A \frac{M}{EI}dx$

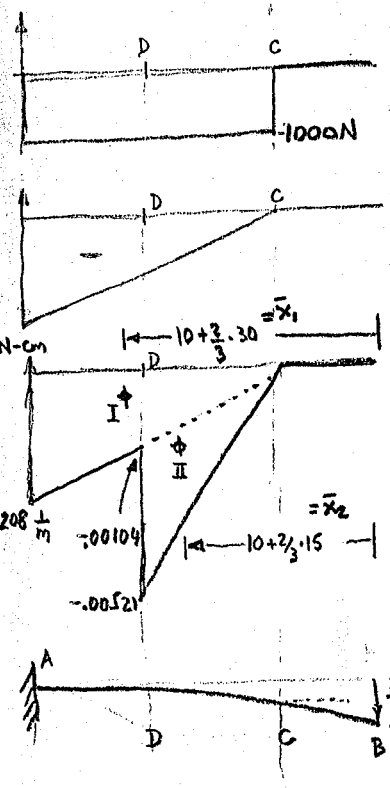
t_{BA} הוא ההסט האנכי של נקודה B מהמשיק בנקודה A והוא שווה ל $\left(\int_A^B \frac{M}{EI}dx\right)\bar{x}_1$

כאשר $\bar{x}_1$ הוא המרחק מ-קו השלכה דרך נקודה B למרכב הכובד של $\int_A^B \frac{M}{EI}dx$

בדרך כלל, ההסט האנכי שאינו התצוגה הסופית.

דוגמה קורת של אלומינום $E = 72\,GPa$ בעזרת בשיטת שטח מומנטים מכוח של 1000N, 10cm מהקצה הימני. חשב I_{zz} של AD $= 200\,cm^4$, ו- I_{zz} של DB $= 40\,cm^4$, מצא את התצוגה של קצה B ושטח הסיבוב של נקודה B. זהו לכלול משקל הקורה.





מכיוון שקצה A הוא סמך מקובע, $\theta_A = 0$

$$\theta_B = \Delta\theta_{AB} = \int_0^{40} \frac{M}{EI}dx = \text{שטחי מומנטים } I + II + 0$$

$$= \left(\frac{.15}{2}\right)\left[(-.00521) + (-.00104)\right] + \left(\frac{.30}{2}\right)(-.00208) =$$

$$= -.000625 radians$$

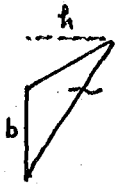
$$t_{BA} = 2\cdot 0 + \bar{x}_2 \times \text{שטח מומנט } II + \bar{x}_1 \times \text{שטח מומנט } I + 0$$

$$= 2\cdot 0 + (.20)(-.000313) + (.30)(-.000312) =$$

$$= -.000156\,m$$

t_{BA} הוא ההסט האנכי של נקודה B ביחס ל-A

וכך התצוגה $\theta_B = -0.156\,m.m.$



$$A = \frac{bh}{2}$$

$$t_{DA} = \left(\frac{.15}{2}\right)(-.00104)(.15) + (.10)\cdot(.15)\left(\frac{-.00208}{2}\right) =$$

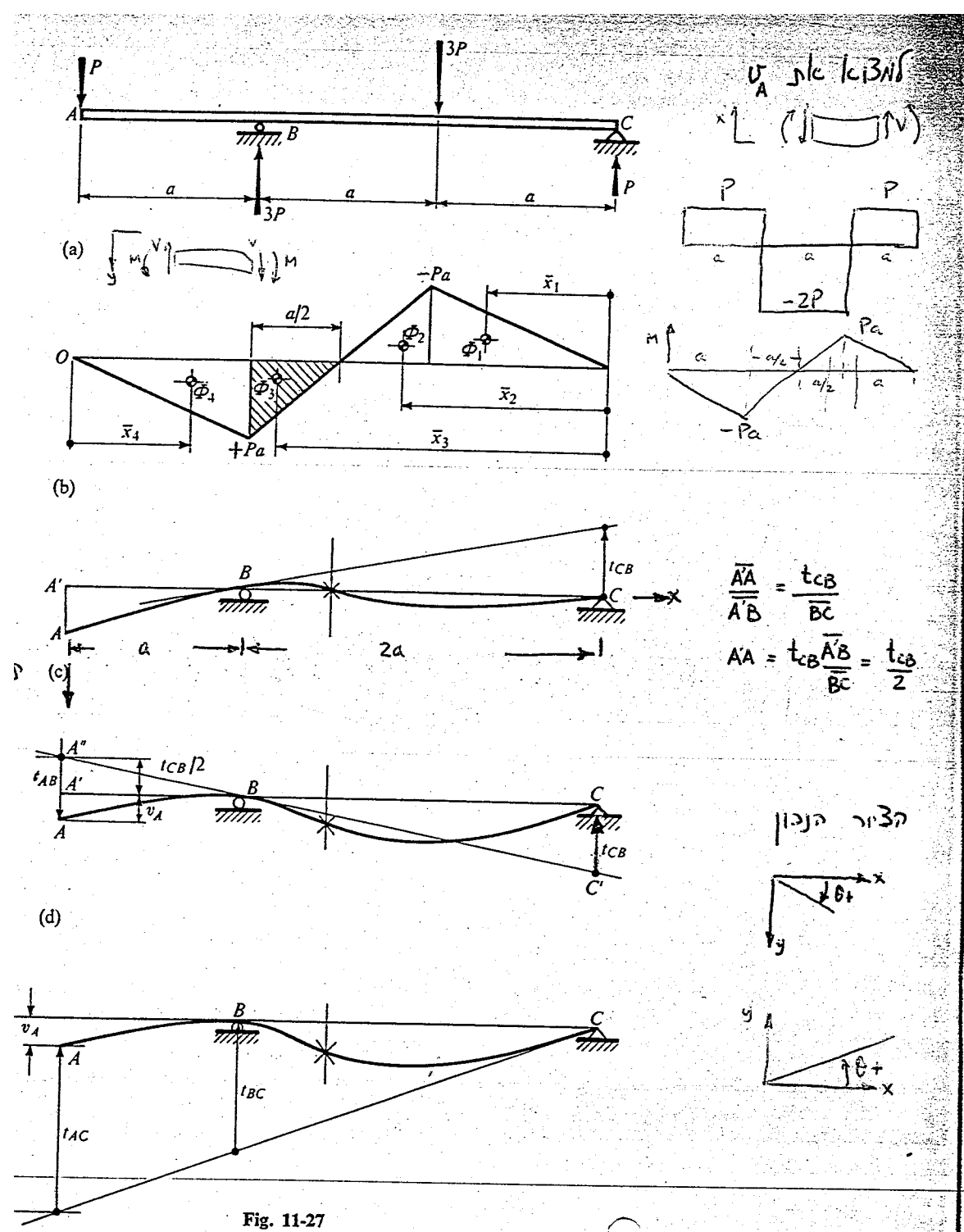


Fig. 11-27

SOLUTION

The bending-moment diagram for the applied forces is in Fig. 11-27(b) The bending moment changes sign at $a/2$ from the left support. At this point an inflection in the elastic curve takes place. Corresponding to the positive moment, the curve is concave up, and vice versa. The elastic curve is so drawn and passes over the supports at B and C, Fig. 11-27(c) To begin, the inclination of the tangent to the elastic curve at the support B is determined by finding t_{CB} as the statical moment of the areas with the proper signs of the $M/(EI)$ diagram between the verticals through C and B about C.

$$t_{CB} = \Phi_1\bar{x}_1 + \Phi_2\bar{x}_2 + \Phi_3\bar{x}_3$$

$$= \frac{1}{EI}\left[\frac{a}{2}(-Pa)\frac{2a}{3} + \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-Pa)\left(a + \frac{1}{3}\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{a}{2}(+Pa)\left(\frac{3a}{2} + \frac{2}{3}\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{Pa^3}{6EI}$$

negative positive

The positive sign of t_{CB} indicates that the point C is above the tangent through B. Hence a corrected sketch of the elastic curve is made, Fig. 11-27(d), where it is seen that the deflection sought is given by the distance AA' and is equal to $AA'' - A'A''$. Further, since the triangles $A'A''B$ and $CC'B$ are similar, the distance $A'A'' = t_{CB}/2$. On the other hand, the distance AA'' is the deviation of the point A from the tangent to the elastic curve at the support B. Hence

$$v_A = AA' = AA'' \mathbin{\overline{\Phi}} A'A'' = t_{AB} \mathbin{\overline{\Phi}} (t_{CB}/2)$$

$$t_{AB} = \frac{1}{EI}(\Phi_4\bar{x}_4) = \frac{1}{EI}\left[\frac{a}{2}(\bar{\Phi}Pa)\frac{2a}{3}\right] = \bar{\Phi}\frac{Pa^3}{3EI}$$

positive negative above below

where the negative sign means that point A is below the tangent through B. This sign is not used henceforth as the geometry of the elastic curve indicates the direction of the actual displacements. Thus the deflection of point A below the line passing through the supports is

$$v_A = \frac{Pa^3}{3EI} - \frac{1}{2}\frac{Pa^3}{6EI} = \frac{Pa^3}{4EI}$$

This example illustrates the necessity of watching the signs of the quantities computed in the applications of the moment-area method, although usually less difficulty is encountered than in the above example. For instance, if the deflection of the end A is established by first finding the rotation of the elastic curve at C, no ambiguity in the direction of tangents occurs. This scheme of analysis is shown in Fig. 11-27(e), where $v_A = \frac{3}{2}t_{BC} - t_{AC}$.

The foregoing examples illustrate the manner in which the moment-area method may be used to obtain the deflection of any statically deter-

שיטה הקורה הדמיונית

מבין שיטות הקורה הדמיונית, שיטת המומנט השטחי, שבשיטה זו מחשבים את התזוזות בסמכים, ומתלק מומנטים ופנה בקורה.

1) מחשבים את הסמכים בקורה הדמיונית (Properties) על הקורה המקורית ע"י חישוב של רומסים ותכונות

2) סמכי הקורה הדמיונית תלויים בסמכי הקורה המקורית על האופן שהקורה הדמיונית נתמכת.

3) שוויון שני הקורות שווי

4) קבלה חופשי על קורה אמיתית נהפך לסמך מקובע על קורה דמיונית

- סמך מקובע על קורה אמיתית נהפך לסמך חופשי על קורה דמיונית
- סמך ניית בקצוות נהפך לסמך ניית
- סמך נ"ד בקצוות נהפך לסמך נ"ד
- סמך ניית או נ"ד במאמצע הקורה נהפך לפרק שווה מקום
- פרק נהפך לסמך נ"ד

קורה דמיונית	קורה אמיתית

נתבים לסמך ניית ונ"ד פנימי

לפעמים התורה הבאה נראית מלחיצ, ובכל, אבל מפני העומסים מה רק אשליה (illusion)

שלא יש לנו קורת סטטיות וניכל לעבוד מהלכי מומנט וכות צורה, למשל

דוגמא

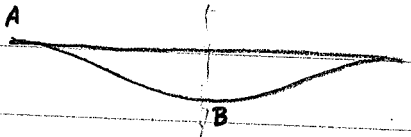
השיטה האסטומלית מתרחש בנקודה שבה כוח הגזירה בקורה הצמודה שווה לאפס. לכן,

מומנט גיבון (Balance)

קורה במופת

3.7 $V = \theta = \int \frac{M}{EI}\,dx$

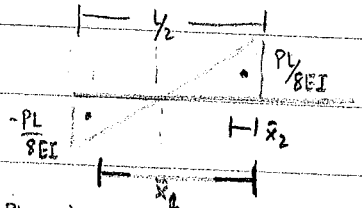
$\delta = \int \theta\,dx$



3.7 $V = \theta = \int \left(\frac{Px}{2EI} - \frac{PL}{8EI}\right)dx = \frac{Px^2}{4EI} - \frac{PLx}{8EI} + C_1$ ($C_1 = 0$ @ $x=0$) @ $x=L/2$ $\frac{PL^2}{16EI} - \frac{PL^2}{16EI} = 0$ ✓

$\delta = \int \left(\frac{Px^2}{4EI} - \frac{PLx}{8EI}\right)dx = \frac{Px^3}{12EI} - \frac{PLx^2}{16EI} + C_2$ ($C_2 = 0$ @ $x=0$) @ $x=L/2$ $\frac{PL^3}{96EI} - \frac{PL^3}{64EI} = \frac{-PL^3}{192EI}$ ✓

$2\cdot 3\cdot 32$ $3\cdot 8\cdot 32$



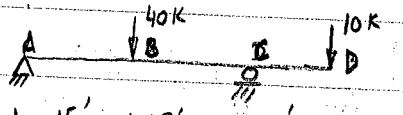
$\theta_{BA} = \theta_{\ell} = \int \frac{M}{EI}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{PL}{8EI}\cdot\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{8EI}\cdot\frac{L}{4}\right) = 0$

$\delta_{BA} = \delta_{\ell} = \bar{x}\int \frac{M}{EI}\,dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{-PL}{8EI}\cdot\frac{L}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{L}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{8EI}\cdot\frac{L}{4}\right)\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right]$

$= \frac{PL^3}{EI}\left(\frac{-5}{48.16} + \frac{1}{16\cdot 48}\right) = \frac{PL^3}{EI}\left(\frac{-4}{16\cdot 48}\right) = \frac{-PL^3}{192EI}$

מוצאים את שרטוט המבנה על כל משלוש לפחות הנקודות שבה רוצים

את התקיעה

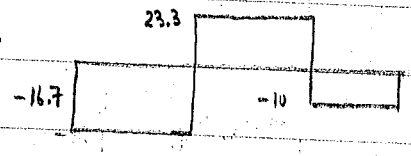


$E = 29\times10^6$ psi

$I = 1000$ in^4

מציירו את הרשו

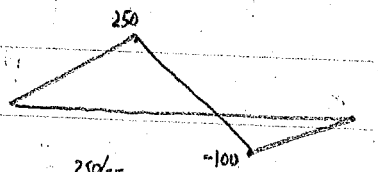
תונה את מרלק V



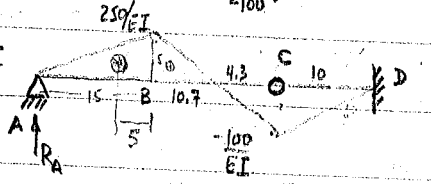
$\Sigma M_C = 0$ $R_A\cdot 30 - 40\cdot 15 + 10\cdot 10 = 0$

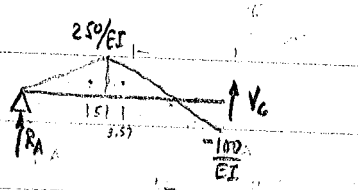
$R_A = 16.7$ K $R_B = 33.3$ K

תונה את מרלק M



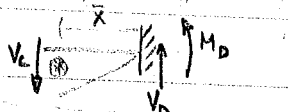
שאיפ את $\frac{M}{EI}$ על קורה באופה





$R_A = \frac{1750}{EI}$ K-ft^2

$V_C = \frac{1250}{EI}$ K-ft^2



$V_D = \frac{750}{EI}$ K-ft^2

$\Sigma M_C = 0$ $R_A(30) + \frac{250}{EI}\cdot\frac{15}{2}\cdot 20 + \frac{250}{EI}\cdot\frac{10.7}{2}(15+3.57) - \frac{100}{EI}(4.3)(14.3) = 0$

$M_D = \frac{-9167}{EI}$ K-ft^3

$\theta_B = \int \frac{M}{EI}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-100}{EI}\right)(14.3) + \left(\frac{250}{EI}\right)(10.7)\cdot\frac{1}{2} + \theta_A$

$\theta_A = \int \frac{M}{EI}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-100}{EI}\right)(\quad) + (\quad)(\quad)$



$$\bar{x}\int\frac{M}{EI}dx = \bar{x}A$$

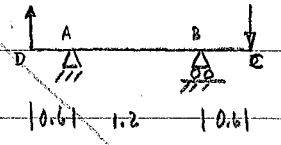
$$\delta_B = \int\theta dx = -R_A\cdot d_{BA} + \frac{250}{EI}\cdot\frac{15}{2}\cdot 5 = \frac{-1750\cdot 15}{EI} + \frac{250(15)}{2}\cdot 5 = \frac{-16875\ k\text{-}ft^3}{EI} = 1.0055\ in\downarrow$$

$$\frac{16875\cdot 1000\cdot 12^3\ lb\text{-}in^3}{29\times 10^6\ \frac{lb}{in^2}\cdot 1000\ in^4} = 1.0055\ in$$



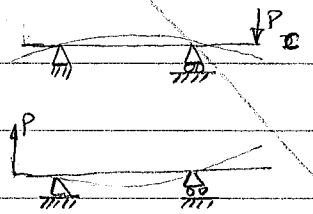
$$\delta_D = \int\theta dx + \delta_C = \frac{1250\cdot 10}{EI} + \frac{(-100)}{EI}\cdot\frac{10}{2}\cdot\bar{x}\cdot 6.67 + 0 = \frac{9167\ ft^3\text{-}k}{EI} = 0.546\ in\uparrow$$

שיטת שטחי המומנטים



$$\Sigma M_A = P(1.6) + P(1.8) - R_B(1.2) = 0 \quad R_B = 2P$$

שקול ה-c



לפי 25.

$$f_c = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$$

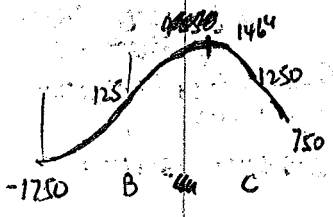
$$f_c = \varphi_c\cdot l_{BC} = -\frac{Pal}{6EI}\cdot l_{BC} = -\frac{Pa^2l}{6EI}$$

$$f_c = \frac{2Pa^2(l+a)}{6EI} + \left(-\frac{Pa^2l}{6EI}\right) = \frac{Pa^2(l+2a)}{6EI}$$

$$v_c = -f_c = -\frac{Pa^2(l+2a)}{6EI}$$

$$EIV' = -\frac{P_1}{2}\langle\ \rangle^2 - \frac{P_2}{2}\langle\ \rangle^2 + \frac{50}{6}x^2 + C_3 + \frac{R_x}{2}\langle\ \rangle^2$$

$$EIV = -\frac{P_1}{6}\langle\ \rangle^3 - \frac{P_2}{6}\langle\ \rangle^3 + \frac{50}{18}x^3 + C_3 x + C_4 + \frac{R_x}{6}\langle\ \rangle^3$$

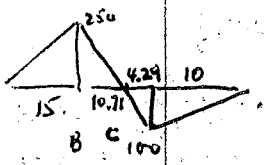


$V=0$ @ $x=0 \Rightarrow C_4 = 0$

$EI\,V=0$ @ $x=30$ $\quad +\frac{P_1}{12}(15)^3 + \frac{50}{18}(30)^3 + C_3 \cdot 30 = 0$

$$\frac{40(225) - 2500}{12} \qquad C_3 = -1750$$

750



$$EIV' = -\frac{P_1}{2}\langle\ \rangle^2 - \frac{P_2}{2}\langle\ \rangle^2 + \frac{50}{6}x^2 - 1750 \quad \checkmark$$

$$-\frac{40}{2}(25)^2 + \frac{50}{6}(40)^2 - 1750 \qquad +\frac{R_x}{6}\langle 10\rangle^3$$

1600 $\qquad$ 33.3

$-20(625) +$

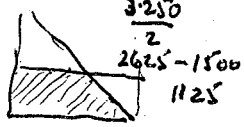
$-12500 + 13333 - 1750 =$

$-14250 + 13333 = -917$

1875

$-1750 + \frac{250 \cdot 15}{2}$

$125 + \frac{350 \cdot 15}{2} - 100 \cdot 15$



$225 \cdot 7.78$ $\qquad$ $\frac{50}{18} \cdot 15^3 - 1750 \cdot 15$ $\qquad$ $\frac{5}{6} \cdot 50 \cdot 225$

185.67 $\qquad$ 41.67

$-74(225)$

1400 / 175 / 1525 $\qquad$ 175

$V=0$ @ $x=0 \Rightarrow C_4 = 0$

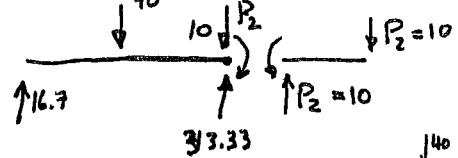
$$-\frac{P_1}{6}(15)^3 - \frac{P_1}{12}\cdot(30)^3 + C_3 \cdot 30 = 0$$

$$\frac{8P_1}{12}(15)^3$$

$$+\frac{5}{6}\frac{(15)^3}{30}\cdot P_1 = C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \frac{5}{12}(15)^2 P_1$$

$$EIV' = -\frac{P_1}{2}\langle x-15\rangle^2 - \frac{P_2}{2}\langle x-40\rangle^2 + \frac{P_1}{2}X_2^2 + \frac{5}{12}(15)^2 P_1$$

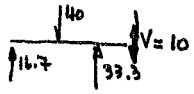
$$-V = EI\,V''' \qquad \frac{P_1}{2}$$



$$EIV^{IV} = -P_1\langle x-15\rangle^{-1} - P_2\langle x-40\rangle^{-1}$$

$$-V = EIV''' = -P_1\langle\ \rangle^0 - P_2\langle\ \rangle^0 + C_1$$

$-23.33 = -40 + C_1 \quad C_1 = 16.7$ ✓



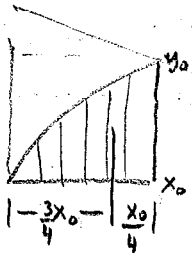
$C_1 = 16.7$

$-40 + 16.7 =$

$$EIV''' = -40\langle\ \rangle^0 - 10\langle\ \rangle^0 + 16.7$$

$$EIV'' = -40\langle\ \rangle^1 - 10\langle\ \rangle^1 + 16.7x + C_2$$

$EIV^{IV} = -P_1\langle x-15\rangle^{-1} - P_2\langle x-40\rangle^{-1}$



$y = -ax^2 + y_0$

$-a(x-x_0)^2 + y_0$

$y = ax^2$

$-ax_0^2 + y_0 = 0$

$a = \frac{y_0}{x_0^2}$

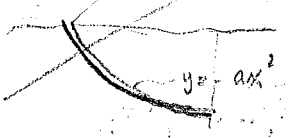
$-y_0\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + y_0$

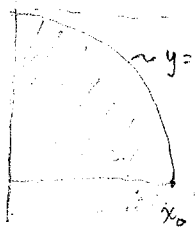
$y_0\left[1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right]$

$\int y\,dx = -\frac{ax^3}{3}\Big|_0^{x_0} = -\frac{ax_0^3}{3} = F = \frac{y_0 x_0}{3}$

$\int y\,dx \cdot x = -\frac{ax^4}{4}\Big|_0^{x_0} = -\frac{ax_0^4}{4} = M \quad \frac{y_0 x_0^2}{4}$

$\frac{M}{F} = \bar{x} = \frac{-\frac{ax_0^4}{4}}{-\frac{ax_0^3}{3}} = \frac{3}{4}x_0$





$y = ax^2$

$y = -ax^2$

$a = \frac{y_0}{x_0^2}$ $\quad F = \int y\,dx = y_0 x - \frac{ax^3}{3}\Big|_0^{x_0} = y_0 x_0 - \frac{ax_0^3}{3} = y_0 x_0 - \frac{y_0 x_0}{3} = \frac{2}{3} y_0 x_0$

$M = \int yx\,dx = y_0\frac{x^2}{2} - \frac{ax^4}{4}\Big|_0^{x_0} = y_0\frac{x_0^2}{2} - \frac{ax_0^4}{4} = y_0\frac{x_0^2}{2} - y_0\frac{x_0^2}{4} = \frac{y_0 x_0^2}{4}$

$\frac{M}{F} = \bar{x} = \frac{3x_0}{8}$



$y_0(x_0 - x_1) - \frac{y_0}{3x_0^2}\left(x_0^3 - x_1^3\right) = F$

$y_0(x_0 - x_1)\left\{1 - \frac{1}{3x_0^2}\left(x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2\right)\right\}$

$\frac{y_0}{2}\left(x_0^2 - x_1^2\right) - \frac{y_0}{4x_0^2}\left(x_0^4 - x_1^4\right) = M$

$y_0(x_0^2 - x_1^2)\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4x_0^2}\left(x_0^2 + x_1^2\right)\right\}$

$\bar{x} = (x_0 + x_1)\left[\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4x_0^2}\left(x_0^2 + x_1^2\right)}{1 - \frac{1}{3x_0^2}\left(x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2\right)}\right]$ $\quad \frac{x_0^2 - x_1^2}{4x_0^2} = \frac{(x_0 + x_1)(x_0 - x_1)}{2x_0^2 - x_0 x_1 + x_1^2}$

$\frac{3x_0^2}{3(x_0 + x_1)^2} = \frac{(2x_0 + x_1)(x_0 - x_1)}{4(2x_0 + x_1)}$

$EI v''' = 16.7\langle x\rangle^0 - 40\langle x-15\rangle^0 + 33.3\langle x-30\rangle^0 - 10\langle x-40\rangle^0$

$EI v'' = 16.7\langle x\rangle^1 - 40\langle x-15\rangle^1 + 33.3\langle x-30\rangle^1 - 10\langle x-40\rangle^1 + C_2$

$EI v' = \frac{16.7}{2}\langle x\rangle^2 - 20\langle x-15\rangle^2 + \frac{40}{2}\langle x-30\rangle^2 - 5\langle x-40\rangle^2 + C_3$

$= 8.33\langle x\rangle^2 - 20\langle x-15\rangle^2 + 16.67\langle x-30\rangle^2 - \langle x-40\rangle^2$

$EI v = 2.78\langle x\rangle^3 - 6.67\langle x\rangle^3 + 5.56\langle x\rangle^3 - 1.67\langle x\rangle^3 + C_3 x + C_4$

$= 2.78\cdot 30^3 - 6.67(15)^3 + C_3\cdot 30$

$-2.78(40b) + \frac{6.67}{2}(22b) = C_3$

$EI v''' = -P_1\langle x-15\rangle^0 - P_2\langle x-40\rangle^0 + C_1$

$M = EI v'' = -P_1\langle x-15\rangle^1 - P_2\langle x-40\rangle^1 + C_1 x + C_2$

$M = 0$ @ $x = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$M = 0$ @ $x = 30 \Rightarrow -P_1\cdot 15 + C_1\cdot 30 = 0 \quad C_1 = P_1/2$

$EI v' = -\frac{P_1}{2}\langle x-15\rangle^2 - \frac{P_2}{2}\langle x-40\rangle^2 + P_1/2\,\frac{x^2}{2} + C_3$

$EI v = -\frac{P_1}{6}\langle x-15\rangle^3 - \frac{P_2}{6}\langle x-40\rangle^3 + P_1/2\,\frac{x^3}{6} + C_3 x + C_4$

$8.33\cdot 900 - 20(225) = 1750$

$7500 - 4500 - 1750 = +1250$ @ C ✓

$R_A\cdot 30 - 40\cdot 15 + 20\cdot 10$

$+600 = 200 = \frac{500}{30} = P_A$

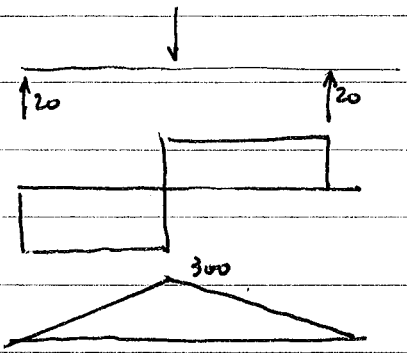
$8.33(40)^2 - 20(25)^2 + 16.61(10)^2 = 18.7$

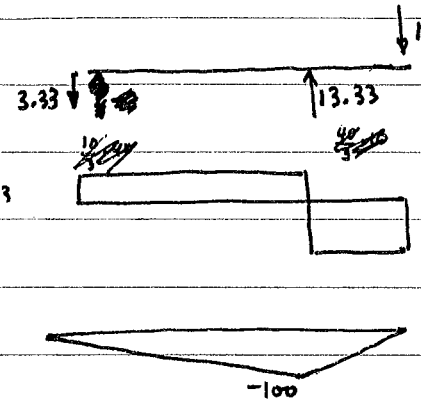
$8\frac{1}{3}\,1600 - 12500 + 1667 - 1750$

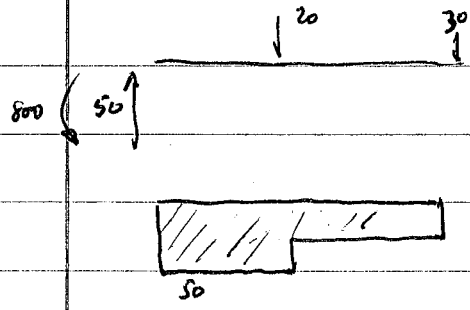
$13333 - 833 - 83 = -917$

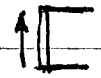
-1750

-1000









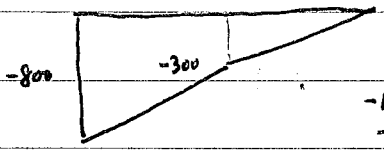
$EIv^{IV} = -20\langle x-10\rangle^{-1} - 30\langle x-20\rangle^{-1}$

$EIv''' = -20\langle x-10\rangle^{0} - 30\langle x-20\rangle^{0} + 50$

$EIv'' = -20\langle x-10\rangle^{1} - 30\langle x-20\rangle^{1} + 50x + C_2$

$= -20(10) - 0 + 1000 + C_2 = 0$

$C_2 = -800$



$-10\langle x-10\rangle^{1} - 15\langle x-20\rangle^{2} + 25x^2 - 800x$

$-1000 + 10000 - 16000 = -7000$

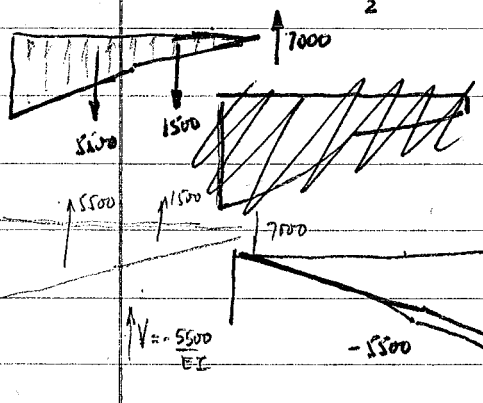
$A = \frac{-1100 \cdot 10}{2} = -5500$ $\quad A = \frac{-300 \cdot 10}{2} = -1500$

$EIv'' = -20\langle\ \rangle^{1} - 30\langle\ \rangle^{1} + 50x - 800$

$EIv' = -10\langle\ \rangle^{2} - 15\langle\ \rangle^{2} + 25x^2 - 800x + C_3$

$EIv = -3.33\langle\ \rangle^{3} - 5\langle\ \rangle^{3} + 8.33x^3 - 400x^2 + C_3 x + C_4$

$2500 - 8000 = -5500$



$\int_0 \frac{M}{EI}\,dx$ $\quad -800 + \frac{500}{10}x$ $\quad -300 + 30(x-10)$ $\quad x > 10$

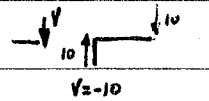
$-800x + 25x^2$ $\quad -300(x-10) + \frac{15}{2}(x-10)^2$

$-300 \cdot 10 + 1500 = -1500$

$EIv = -3.33\langle\ \rangle^{3} - 5\langle\ \rangle^{3} + 8333 - 40000 = -31667$

$EIv''' = 16.7\langle x\rangle^{0} - 40\langle x-15\rangle^{0} + 33.3\langle x-30\rangle^{0} - 10\langle x-40\rangle^{0}$

$@\ x=31 \quad 16.7 - 40 + 33.3 = 10 = EIv''' = -V \quad V = -10$



$EIv'' = 16.7\langle\ \rangle^{1} - 40\langle x-15\rangle^{1} + 33.33\langle x-30\rangle^{1} - 10\langle x-40\rangle^{1} + C_2$ $\quad @\ x=0 \quad M=0 \quad C_2 = 0$

$EIv' = 8.33\langle\ \rangle^{2} - 20\langle x-15\rangle^{2} + 16.67\langle x-30\rangle^{2} - 5\langle x-40\rangle^{2} + C_3$

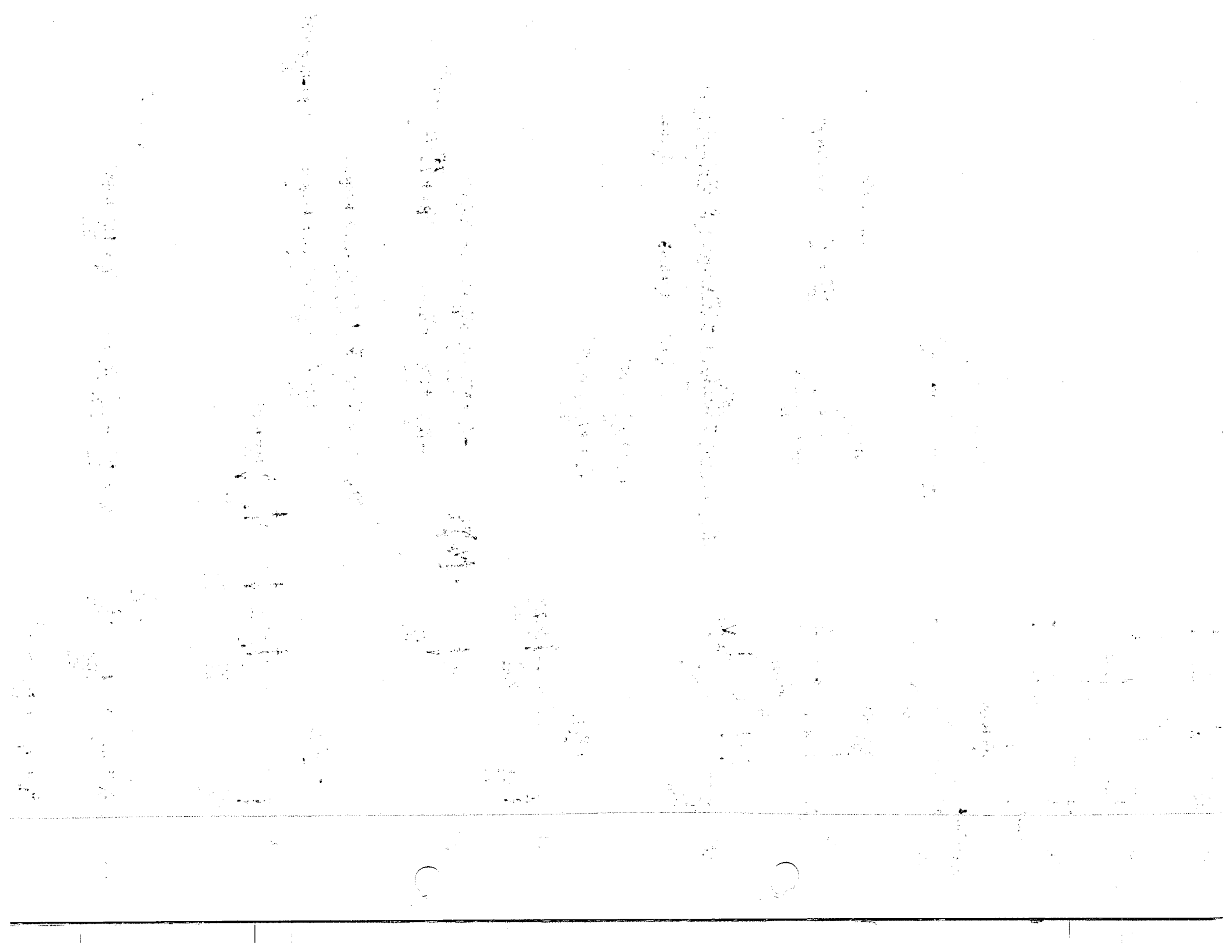
$EIv = 2.78\langle\ \rangle^{3} - 6.67\langle\ \rangle^{3} + 5.56\langle x-30\rangle^{3} - 1.67\langle x-40\rangle^{3} + C_3 x + C_4$ $\quad @\ x=0 \quad v=0$

$= 2.78\langle 30\rangle^{3} - 6.67\langle 15\rangle^{3} + C_3 \cdot 30 = 0$ $\quad C_3 = -1750$ $\quad @\ x=30 \quad v=0$

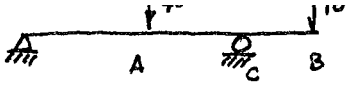
$EIv' = 8.33x^2 - 20\langle x-15\rangle^{2} + 16.67\langle x-30\rangle^{2} - 5\langle x-40\rangle^{2} - 1750$

$@\ x=0 \quad v' = \frac{-1750}{EI}$

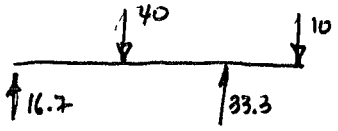
$@\ x=15 \quad v' = 8.33(15)^2 - 1750 = 125/EI$ $\quad @\ x = 25.71 \quad v' = 8.33(25.71)^2 - 20(10.71)^2 - 1750 = 1464$



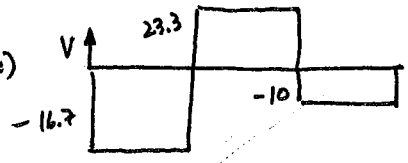
(a)



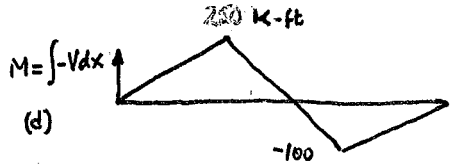
(b)

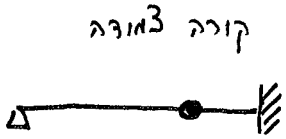


(c)

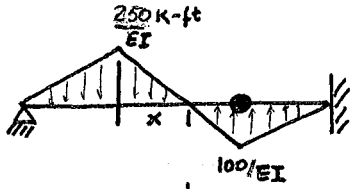


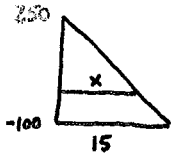
(d) $M = \int -V dx$





(e)

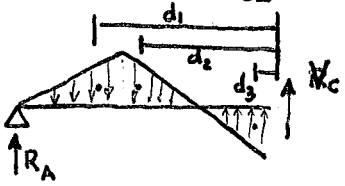




: x לחשב

$\frac{350}{250} = \frac{15}{x}$ $\quad x = 10.71$ ft

(f)



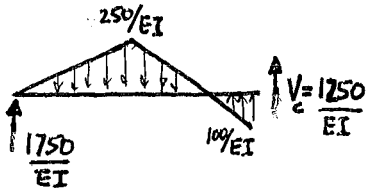
$$\Sigma M_c = R_A(30) - \left(\frac{250}{EI}\right)\left(\frac{15}{2}\right) d_1 - \left(\frac{250}{EI}\right)\left(\frac{10.71}{2}\right) d_2 + \left(\frac{100}{EI}\right)\left(\frac{4.29}{2}\right) d_3 = 0$$

$d_1 = 20 \quad d_2 = 11.43 \quad d_3 = 1.33$

$$R_A = +\frac{1750}{EI} \text{ K-ft}^2$$

$$V_c = +\frac{1250}{EI} \text{ K-ft}^2$$

(g)



(h)



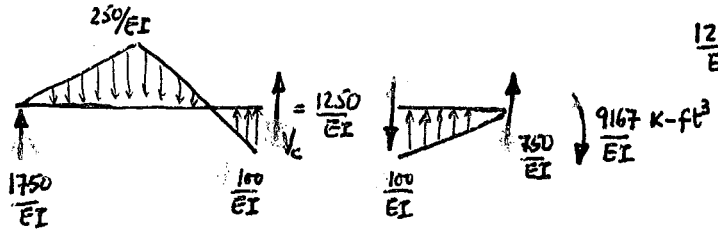
$$-V_c + \left(\frac{+100}{EI}\right)\cdot\frac{10}{2} + V_B = 0 \quad \Leftarrow \Sigma F_y = 0$$

$$-\frac{1250}{EI} + \frac{500}{EI} + V_B = 0 \qquad V_B = +\frac{750}{EI} \text{ K-ft}^2$$

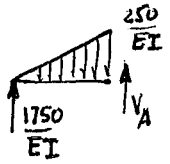
$$\Sigma M_D = 0 \Rightarrow V_c \cdot 10 - \left(\frac{+100}{EI}\right)\left(\frac{10}{2}\right)\cdot 6.67 + M_B = 0$$

$$\frac{1250}{EI}\cdot 10 - \frac{100}{EI}\left(\frac{10}{2}\right)\cdot 6.67 + M_B = 0 \qquad M_B = -\frac{9167}{EI} \text{ K-ft}$$

(i)



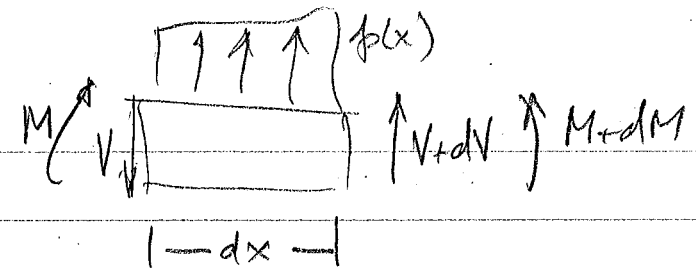
(j) $\theta_A = .3.\uparrow V =$

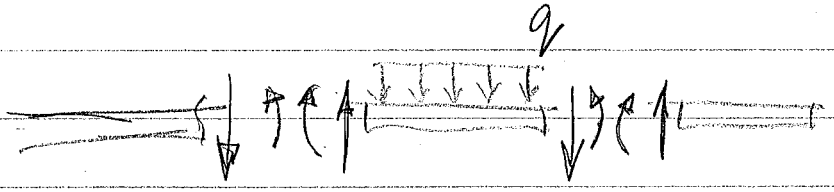


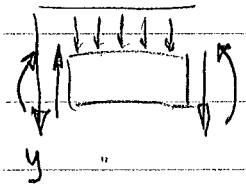
$$V_A + \frac{1750}{EI} - \frac{1}{2}\frac{250}{EI}(15) = 0 \qquad V_A = \frac{125}{EI} \text{ K-ft}^2$$

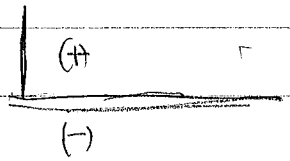
$$\theta_B = V_B = \frac{750}{EI} \text{ K-ft}^2$$

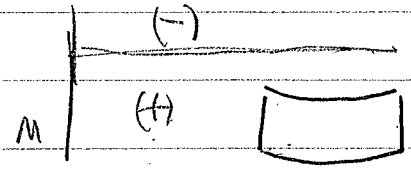
Change the direction of the forces — sign convention

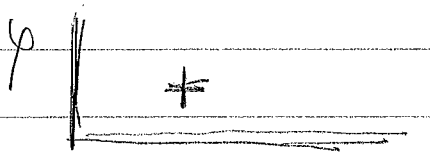










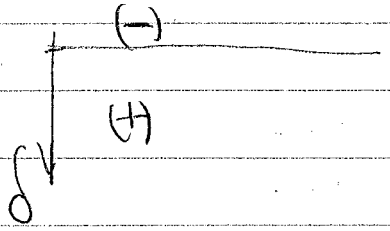


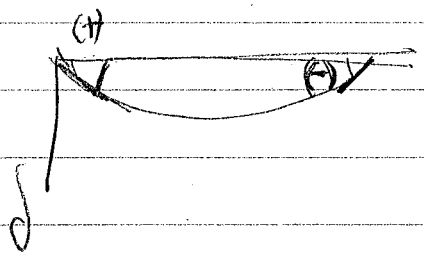
$$V = -\int q\,dx \qquad V = -\int p\,dx$$

$$M = \int V\,dx \qquad M = -\int V\,dx$$

$$\varphi = -\int \frac{M}{EI}\,dx \qquad \varphi = \int \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\delta = \int \varphi\,dx \qquad \delta = \int \varphi\,dx$$



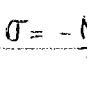


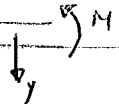
$$-EI\frac{d^2\delta}{dx^2} = M \qquad EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$$

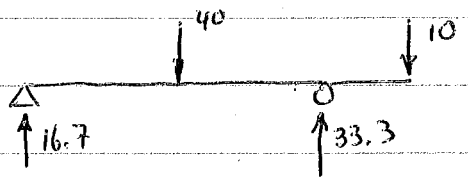
$$-EI\frac{d^3\delta}{dx^3} = V \qquad -EI\frac{d^3v}{dx^3} = V$$

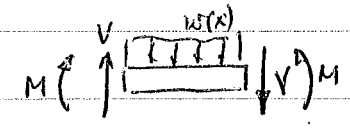
$$EI\frac{d^4\delta}{dx^4} = q(x) \qquad EI\frac{d^4v}{dx^4} = -p(x)$$

$$\sigma = -\frac{My}{I} \qquad \sigma = \frac{My}{I}$$

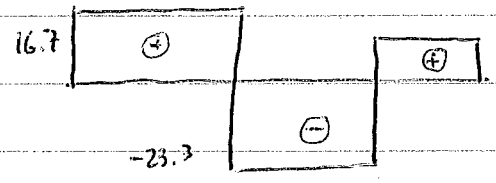




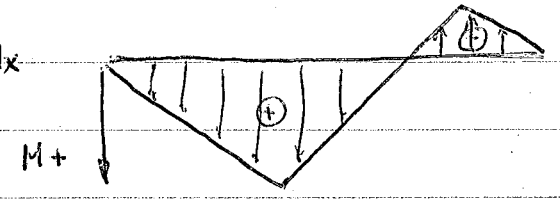




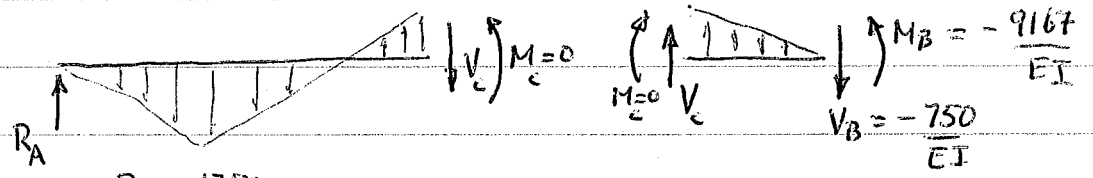
V



$M = \int V dx$

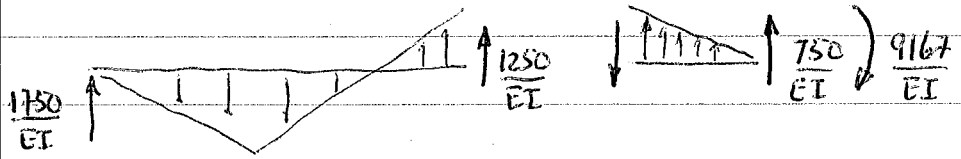


Put load on as it appears

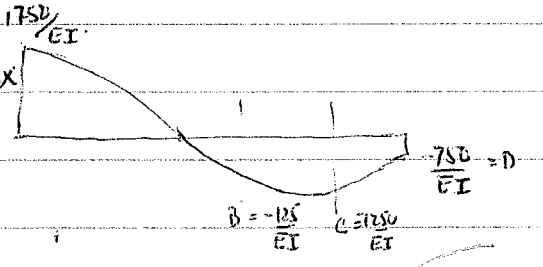


$R_A = 1750/EI$

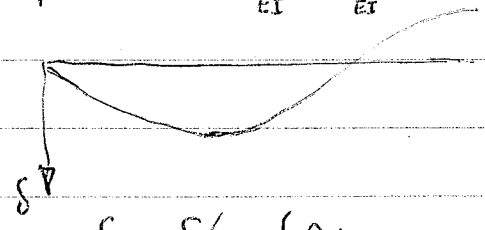
$V_c = -1250/EI$



$\theta = \int V = \int M dx$

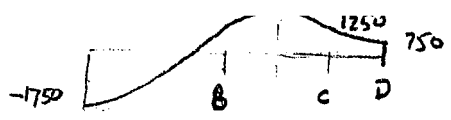


$\delta = \int M = \int \theta dx$



$$\delta_D = \delta_C + \int \theta dx$$

$$0 + \left(-\frac{1250}{EI}\right)(10) + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{100}{EI}\right)\cdot 10\right](6.67) = -\frac{9167}{EI}$$



$$\bar{x}\int\frac{M}{EI}dx = \bar{x}A$$

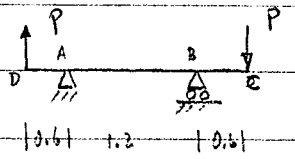
$$\delta_B = \int\theta dx = -R_A\cdot a_{BA} + \frac{250}{EI}\cdot\frac{15}{2}\cdot 5 = \frac{-1750\cdot 15}{EI} + \frac{250(15)}{2}\cdot 5 = \frac{-16875\ k\text{-}ft^3}{EI} = 1.0055\ in\downarrow$$

$$\frac{16875\cdot 1000\cdot 12^3\ lb\text{-}in^3}{29\times 10^6\ \frac{lb}{in^2}\cdot 1000\ in^4} = 1.0055\ in$$

$$\delta_D = \int\theta dx + \delta_C = \frac{1250\cdot 10}{EI} + \frac{(-100)}{EI}\cdot\frac{10}{2}\cdot\bar{x}\cdot 6.67 + 0 = \frac{9167\ ft^3\text{-}k}{EI} = 0.546\ in\uparrow$$

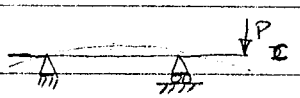


11-42

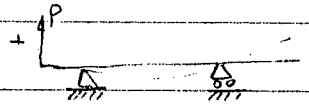


$$\Sigma M_A = P(.6) + P(1.8) - R_B(1.2) = 0 \quad R_B = 2P$$

שקיעה ב-C



$$f_c = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$$



$$f_c = \varphi_c\cdot l_{BC} = -\frac{Pal}{6EI}\cdot l_{BC} = -\frac{Pa^2l}{6EI}$$

$$f_c = 2\frac{Pa^2(l+a)}{6EI} + \left(-\frac{Pa^2l}{6EI}\right) = \frac{Pa^2(l+2a)}{6EI}$$

$$v_c = -f_c = -\frac{Pa^2(l+2a)}{6EI}$$

חומר תרגיל 2 עיון לשיעור מס' 5

1) בקורות הבאות חרוג לתוך שקיעת נקודה A ושיעור הקורה המתאים.

11-45

תשובה: $\left(\frac{744\,P}{EI}\right)$

11-51

החומר בו הוא $E=3\cdot10^4$ ksi

תשובה: (986)

2) בקורה הבאה חרוג לתוך שקיעת מרכז הקורה ושיעור הקורה המתאים.

11-72

תשובה: $\left(\frac{5611}{EI}\right)$

3) בקורות הבאות חרוג לתוך שקיעת קצה הצידי ושקיעת אמצע הקורה בעזרת שיטת העומס הצמוד. שים לב שהצירים הינם כלפי מטה.

11-42

EI=const.

11-45

עפ' התרגיל הקודם T.

11-82

חומר למבחן 2 - שרטוט עקומות מסי 5 (ב"ר)

1) בקורות הבאות נדרש למצוא את שקיעת נקודה A בשיטת הקורה המצמדת

11-48

תשובה: $\left(\frac{23P\ell^3}{2560EI}\right)$

11-55

תשובה: $\left(\frac{M_0\ell^2}{32EI}\right)$

11-46

נתון: $I = 10^{-3}\ m^4$

$E = 200\ GPa$

(תשובה 4.15)

2) בקורות הבאות יש למצוא את שקיעת הנקודה המסומנת בשיטת הקורה המצמדת.

11-67

תשובה: $\left(\frac{23\ell^4 q}{18432EI}\right)$

11-80

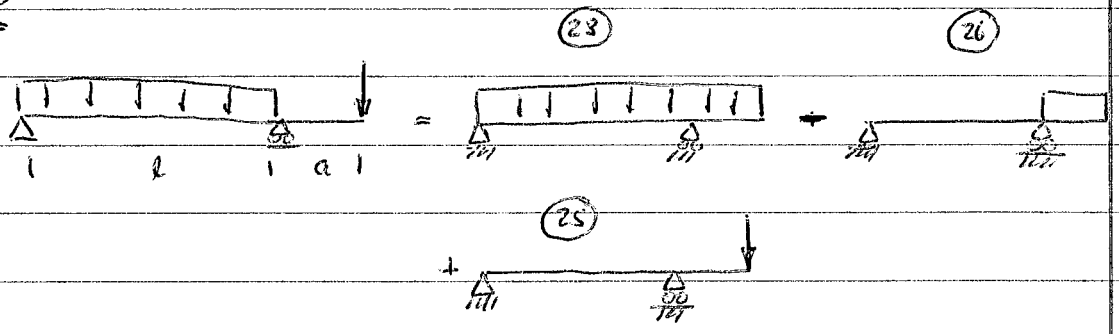
תשובה: $\left(\frac{4qa^4}{3EI}\right)$

3) בקורות הבאות נדרש למצוא את שקיעת הקצה הימני תוך שימוש בפונקציות סינגולריות.

11-80

הדרכה לפי שאלה 2

11-82



שקיעת הקצה

$$V_{(23)} = \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^3l}{6EI} - \frac{qal^3}{24EI} = \frac{3qa^4}{24EI} + \frac{4qa^3l}{24EI} - \frac{qal^3}{24EI}$$

$$V_{(26)} = \frac{qa^3(4l+3a)}{24EI} = \frac{3qa^4}{24EI} + \frac{4qa^3l}{24EI}$$

$$V_{28} - V_{26} = -\frac{qal^3}{24EI}$$

$$V_{(25)} = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$$

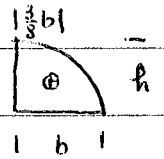
$$v = -[V_{25} + V_{28} - V_{26}]$$

$$v = -\left[\frac{Pa^2(l+a)}{3EI} - \frac{qal^3}{24EI}\right]$$

סוף.

שקיעת האמצע

לפי שיטת השטחים

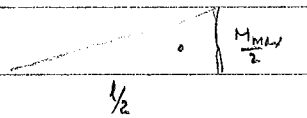


$A = \frac{2}{3}bh$

Don't

$$V_{28}\Big|_{x=l/2} = \frac{ql}{48EI}\left[l^3 - 4l\frac{l^2}{4} + \frac{l^3}{8}\right] - \frac{qa^2l^2}{24EI}\cdot\frac{3}{4} = \frac{5}{8}\frac{ql^4}{48EI} - \frac{3qa^2l^2}{96EI}$$

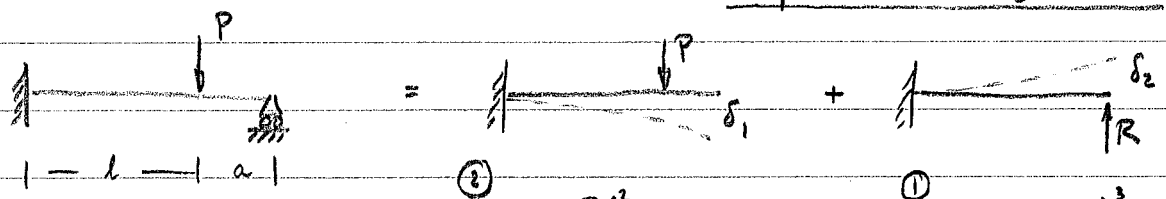
$$V_{26} = \int_0^{l/2}\frac{M}{EI}x\,dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{M_{max}}{2EI}\cdot\frac{l}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{l}{2} = \frac{l^2 M_{max}}{48EI} = \frac{qa^2}{2}\left[\frac{l^2}{48EI}\right] = \frac{qa^2l^2}{96EI}$$



$$V_{25}\Big|_{x=l/2} \quad \frac{Pl^3}{6EI}\cdot\frac{q}{l}\cdot\frac{\frac{1}{2}x}{l}\left(1 - \left(\frac{\frac{1}{2}x}{l}\right)^2\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{Pl^2a}{6EI} = \frac{3}{48}\frac{Pl^2a}{EI}$$

$$\frac{5}{8}\frac{ql^4}{48EI} - \frac{3qa^2l^2}{96EI} + \frac{3}{48}\frac{Pl^2a}{EI}$$

דוגמא שניה. למציאת הקפיציות



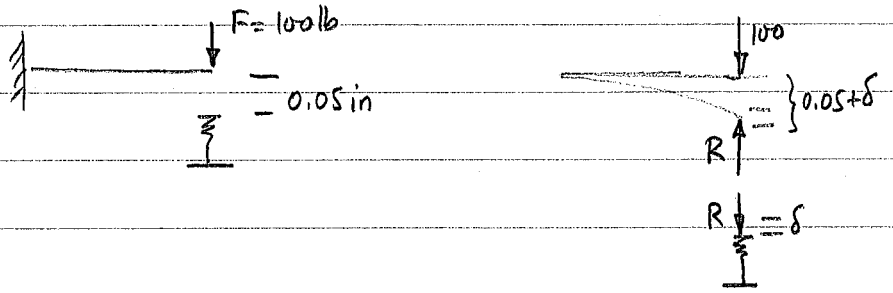
$$\delta_1 = f_A = \frac{Pl^2}{6EI}(2l+3a) \qquad \delta_2 = f_A = \frac{-R(l+a)^3}{3EI}$$

$$\delta_1+\delta_2=0 \qquad \frac{Pl^2(2l+3a)}{6EI} - \frac{R(l+a)^3}{3EI} = 0$$

$$R = P\,\frac{l^2(2l+3a)}{2(l+a)^3}$$

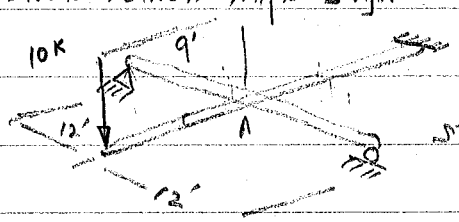
$$R = P\left(\frac{l^2\cdot 5l}{2\cdot 8l^3}\right) = \frac{5}{16}P \qquad \text{אם } a=l$$

12-14



$$\left.\begin{aligned} \frac{(100-R)L^3}{3EI} &= 0.05+\delta \\ R &= k\delta \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} R &= 40lb \\ \delta &= 0.004in \end{aligned}$$

15-12 הנקודה המאונכית של הקורה המקורית על 18' שנתת בקורה המסומנת במסבים

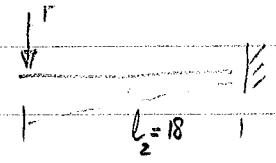


פשוטים בשאלה מיצגו את הקיצוח ב A

שבאמצע מפשי יצום כות 10k בקצה הקורה המקורית



$$\delta = \frac{Rl^3}{3EI}$$



①

$$y = \frac{Pl_2^3}{6EI}\left(2 - \frac{3x}{l_2} + \frac{x^3}{l_2^3}\right)$$

$$y\Big|_{x=l/2} = \frac{5Pl_2^3}{48EI}$$

②



$$y\Big|_{l/2} \frac{Rl^3}{3EI} = \frac{R(l^3/8)}{3EI} = \frac{Rl_2^3}{24EI}$$

$$\delta = \frac{5Pl_2^3}{48EI} - \frac{Rl_2^3}{24EI} = \frac{Rl_1^3}{48EI}$$

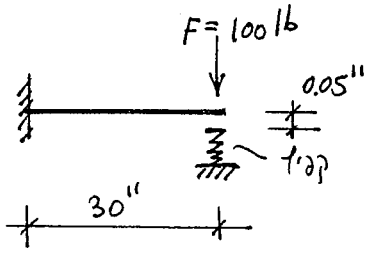
$$\frac{5Pl_2^3}{48EI} = \frac{R}{48EI}\left(2l_2^3 + l_1^3\right)$$

$$1.1441P \cdot \frac{5P(18)^3}{2\cdot 18^3 + 24^3} = \frac{5Pl_2^3}{2l_2^3 + l_1^3} = R$$

$$\delta = \frac{5P(18)^3}{2\cdot 18^3 + 24^3} \cdot \frac{24^3}{48\cdot EI} = \frac{3295}{EI}\ k\text{-}ft^3$$

12-65

12-14

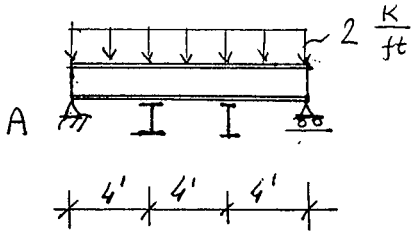


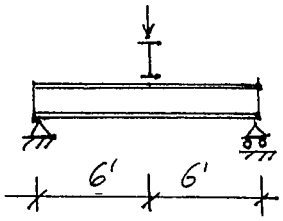
נתון קורה שרירותית: $EI = 10^7 \frac{lb}{in^2}$

נתון קפיץ קבוע קפיץ: $K = 10 \frac{kips}{in}$

דרוש: למצוא את הכח בקפיץ כתלות בכח F. (תשובה: $\frac{2}{3}F$)

12-15

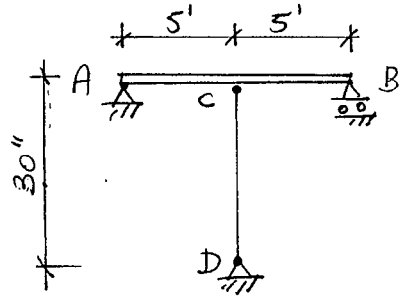




נתונה רשת של קורות מאלכסון $W200 I$.

דרוש: למצוא ריאקציה בסמך A. (תשובה 6.74 kips)

12-27



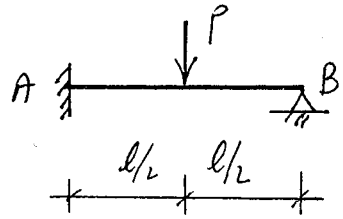
נתון: קורה AB: $EI = 1040 \ lb\text{-}in^2$

מוט CD: $\alpha = 6.5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{°F}$, $E = 30 \cdot 10^6 psi$, $A = 10^{-4} in^2$

דרוש: למצוא תוספת הכח במוט CD עקב הטמפרטורה

יורדת ב- $100°F$.

12-44

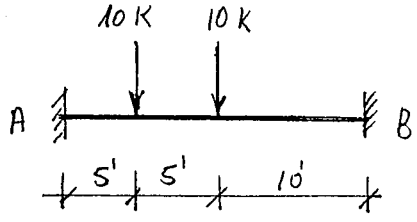


בקורה שבתרשים דרוש: למצוא ריאקציות

לצאר מהכי כוחות צורה ומומנט כפיפה

תשובה: $M_A = -\frac{3PL}{16}$

12-45



בקורה הסטטית בתרשים דרוש: למצוא ריאקציות.

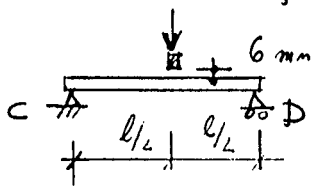
לצאר מהכי כוחות צורה ומומנט כפיפה

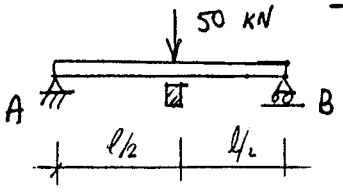
למצוא שקיעת מרכז הקורה ומומנט כפיפה מכסימלי.

נתון: $E = 29 \cdot 10^6 psi$, $I = 719 \ in^4$, $W = 126 \ in^3$

(תשובה: $13,9 \ ksi$, $0,133 \ in$)

12-16



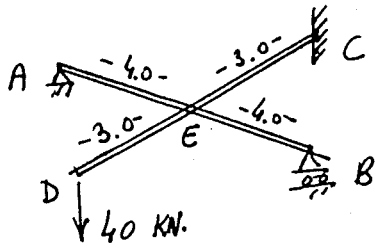


נתונה שני קורות כנות

$EI = 6000\ kN\cdot m^2$, $l = 3.6\ m$

דרוש: לתאר את הדיאגרמות הפנימיות A, B, C, D.

12-17

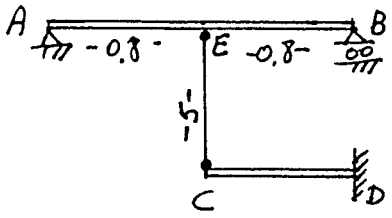


נתונה שני קורות רציפות. הפתיחה AB ברקע.

סמן C כנתון. $EI = const$.

דרוש: לתאר שקיעת נקודה A (כפונקציה של EI)

12-18



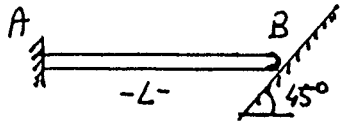
נתון: CD - מוט , $A = 1.6\ cm^2$, $E = 200\ Gpa$

$\alpha = 12\cdot 10^{-6}\ 1/^\circ C$

AB, CD קורות: $I = 10^{-5}\ m^4$, $E = 10\ Gpa$

דרוש: לתאר תצוגה נקודה G אם הטמפרטורה של מוט CD יורדת ב- $50^\circ C$

12-31



נתונה קורה AB. סמך A כתלוי. בנקודה B נשענת הקורה על משטח משופע חלק.

נתון: שטח חתך הקורה A, מומנט אינרציה I, מודול אלסטיות E, מקדם הצפיפות הטרמית α.

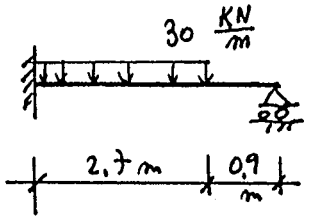
דרוש: כפיית טמפרטורה ΔT לתאר מומנט מכוון בקורה

(תשובה: $\frac{3EI\alpha}{\frac{l^2}{A} + \frac{3E}{A}}$)

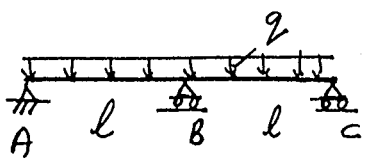
12-45, 12-46, 12-66

בקורות הבאות דרוש לתאר דיאגרמות כשמכוח ולאחר מהלכי כוחות צורה המתקבל נפיפה

12-45

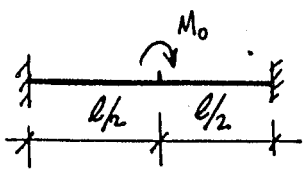


12-46

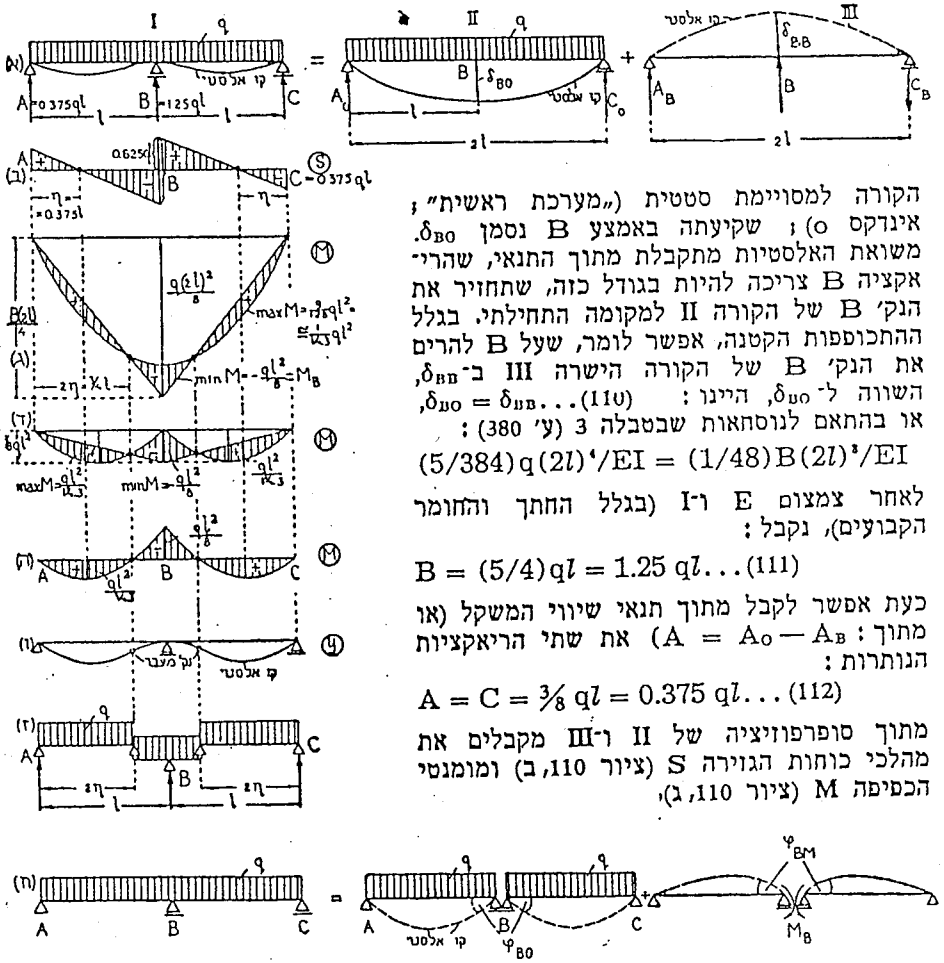


(תשובה: $M_B = \frac{9}{8}ql^2$)

12-66



(תשובה: $\pm \frac{M_0}{4}$)



ציור 110.

הקורה למסויימת סטטית („מערכת ראשית"; אינדקס o); שקיעתה באמצע B נסמן δ_{BO}. משואת האלסטיות מתקבלת מתוך התנאי, שהרי־אקציה B צריכה להיות בגודל כזה, שתחזיר את הנק' B של הקורה II למקומה התחילתי. בגלל ההתכוספות הקטנה, אפשר לומר, שעל B להרים את הנק' B של הקורה הישרה III ב־δ_{BB}, השווה ל־δ_{BO}, היינו: $\delta_{BO} = \delta_{BB} \ldots$ (110), או בהתאם לנוסחאות שבטבלה 3 (ע' 380):

$$(5/384)\,q(2l)^4/EI = (1/48)\,B(2l)^3/EI$$

לאחר צמצום E ו־I (בגלל החתך והחומר הקבועים), נקבל:

$$B = (5/4)\,ql = 1.25\,ql \ldots (111)$$

כעת אפשר לקבל מתוך תנאי שיווי המשקל (או מתוך: $A = A_O - A_B$) את שתי הריאקציות הנותרות:

$$A = C = 3/8\,ql = 0.375\,ql \ldots (112)$$

מתוך סופרפוזיציה של II ו־III מקבלים את מהלכי כוחות הגזירה S (ציור 110, ב) ומומנטי הכפיפה M (ציור 110, ג),

המומנט מעל לסמך B שווה:

$$M_{min} = M_B = +\,q(2l)^2/8 - B(2l)/4 = -\,ql^2/8 \ldots (113)$$

המומנט המכסימלי בשדה יהיה בחתך, שבו $S = 0$, ז"א ברוחק $\eta = 3/8\,l$, היינו:

$$M_{max} = q(2\eta)^2/8 (= \tfrac{1}{2}\,A\eta) = q(3/4\,l)^2/8 = (9/128)\,ql^2 \cong ql^2/14.3 \ldots (114)$$

אפשר להגיע לאותן התוצאות, אם בוחרים בתור מערכת ראשית שתי קורות נפרדות בעלי שדה l לפי ציור 110, ח; במקרה זה יהיה הנעלם המומנט M_B מעל לסמך B (במקום הריאקציה B), על M_B לבטל את נטיית הקו האלסטי φ_{BO} של המערכת הראשית:

$$\varphi_{BO} = \varphi_{BM} \ldots (a)$$

או בהתאם לנוסחאות שבטבלה 3 (ע' 380):

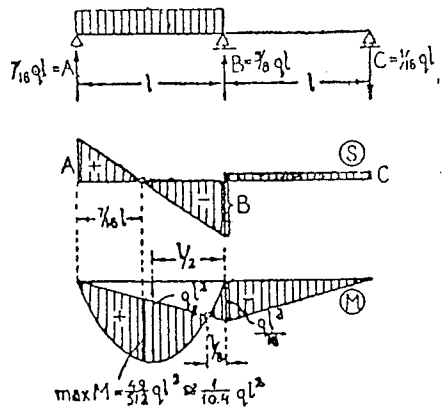
$$(1/24)\,ql^3/EI = {}^1/_4\,M_B\,l/EI$$

מכאן: $M_B = ql^2/8$. מהלך M בשיטה זו נוח יותר לשרטוט (ציור 110, ד). בציור 110, ו מתואר הקו האלסטי (שגם אותו אפשר לקבל ע"י סופרפוזיציה של II ו־III). נקודות המעבר נמצאות במקומות, שבהם $M = 0$, ז"א ברוחק $2\eta = {}^3/_4\,l$ מן הסמכים הקיצוניים, ואפשר לתאר את הקורה על 3 סמכים, מחולקת בהתאם לציור 110, ז.

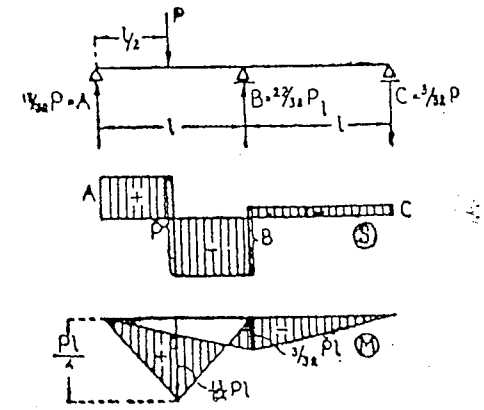
אנו רואים, אפוא, שהמומנט המכסימלי (באופן מוחלט) בקורה על 3 סמכים שווה למומנט של 2 הקורות הנפרדות על 2 סמכים (ציור 110, ח); אולם איזור המומנטים הגדולים בקורה על 3 סמכים קטן יותר. (השווה גם חישוב הקורה לפי השיטה הפלסטית, ע' 351). בגלל הסימטריה מודהה מחצית אחת של הקורה הנדונה עם קורה על 2 סמכים רתומה בצד אחד (מס' 31, ע' 400).

מקרים אחרים של קורות בנות שדה אחד בלתי מסויימות סטטית ראה טבלה בע' 391. מקרים אלה ניתנים להשלמה לקורות על 3 סמכים עבור שדות שווים והעמסה סימטרית כנ"ל. קורות נמשכות נדונות בהרחבה בסטטיקת הבניה (כרך ב').

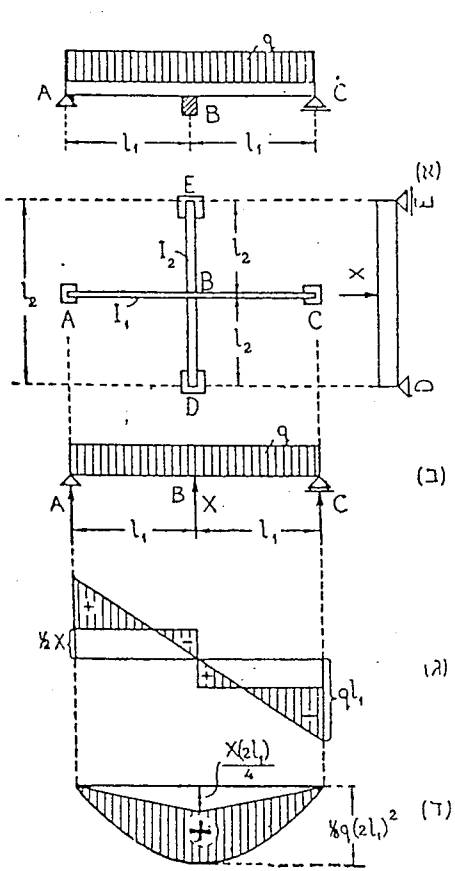
בציורים 111 ו־112 מתוארים מהלכי S ו־M עבור קורה על 3 סמכים, עמוסה בשדה אחד בלבד. דוגמה של פתרון לפי קסטיליאנו — עיין ציור 236 (ע' 479).



ציור 111.



ציור 112.



ציור 113.

בציור 113 מתוארות 2 קורות מצטלבות. הקורה ABC היא קורה על 3 סמכים עם
מך אלסטי ב־B. אם X הוא כוח הלחץ ההדדי ב־B, נקבל מתוך התנאי של שקיעה
שותפת ב־B (ציורים 113, א–ב).

$$(5/384\,E_1I_1)q(2l_1)^4 - (1/48\,E_1I_1)X(2l_1)^3 = (1/48\,E_2I_2)X(2l_2)^3 \ldots (a)$$

הנחה שהחומר שווה, נקבל:

$$X = 5/8\,q(2l_1)^4/[(2l_1)^3 + (2l_2)^3 I_1/I_2] \ldots (b)$$

הלך S ו־M עבור הקורה ABC (כאשר $I_1 = I_2$) נתונים בציור 113, ג–ד; שטח
מומנטים חיובי והקו האלסטי יהיה קמור לכל אורך הקורה ABC (השווה ציור 110).
אשר $I_2 = \infty$ (או $l_2 = 0$), הוסף הסמך B עבור הקורה ABC לסמך קבוע והמשוואה
ו) תזדהה עם משוואה (111): $X = (5/4)ql_1$.

חישוב מסגרת ראה ע' 481.

ז) השפעת מאמצי הגזירה על הקו האלסטי.

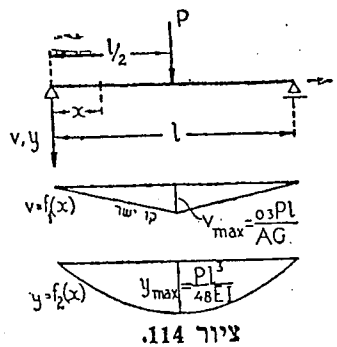
השוואת המשוואות (89) ו־(90) נותנת (לאחר החלפת z ב־x עבור מערכת הצירים
ודשה):

$$dv = \varkappa S\,dx/GA = f(x) \ldots (115)$$

זואה זו — היא המשוואה חדיפרנציאלית של הקו האלסטי הנגרם ע"י כוחות הגזירה
בה. כדי להבדיל קו אלסטי זה מן הקו האלסטי $y = f(x)$, הנגרם ע"י מאמצי הכפיפה,
מנו כאן האורדינטות על־ידי אות v. לאחר אינטגרציה ובהתחשב ב־$S = dM/dx$
$A = \text{cons}$, נקבל:

$$v = \int \frac{\varkappa S}{GA}\,dx + C = \frac{\varkappa}{GA}\int dM + C = \frac{\varkappa}{GA}M + C \ldots (116)$$

ו האלסטי $v = f(x)$ נתון, אפוא, גם כאן, כדוגמת
$y = f$, ע"י מהלך מומנטי הכפיפה M; הקבוע
נקבע מתוך תנאי התחומים. מקדם חלוקת הגזירה
(ע' 372) גדול מאחד; עבור חתכי I — $\varkappa \cong 2.2$,
ר מלבן — $\varkappa = 1.2$.



ציור 114.

דוגמה. בציור 114 נתונה קורה על 2 סמכים
סה כוח P באמצע; חתך הקורה — מלבן
b ×

הקו האלסטי $v = f(x)$ מתקבל מתוך (116);
$C = 0$, הואיל ו־$M = 0$ ו־$v = 0$, כאשר $x = 0$:

$$v = (\varkappa/GA)M = (1.2/Gbh)(\tfrac{1}{2}Px) = (0.6P/Gbh)x \ldots$$

גו קו ישר עבור שני חצאי הקורה $l/2$; קו זה יש לסכם עם הקו $y = f(x)$ (ע' 380),
$x = l/2$, נקבל:

$$v_{max} = 0.3\,Pl/GA \ldots (b)$$

בהשוואה עם השקיעה המכסימלית $y_{max} = Pl^3/48\,EI$, הנגרמת ע"י מאמצי
יסה, יש לראות, שהיחס y/v גדול מאוד עבור קורות ארוכות (ואפשר להזניח את v):

$$y_{max}/v_{max} \cong (l/h)^2(G/E) \ldots (c)$$

טבלה 4. קורות בנות שדה אחד.

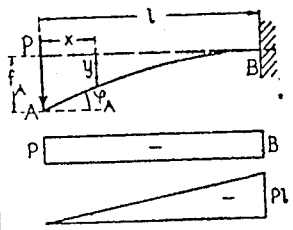
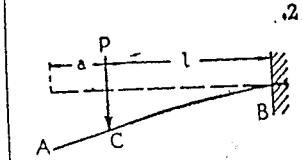
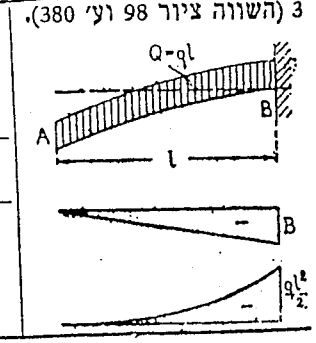
1) הנוסחאות הנתונות בטבלה נכונות רק עבור קורות בנות חתך קבוע ובתחום
האלסטיות. בקורות המסויימות מבחינה סטטית (מקרים 28–1) נכונים המומנטים והרי־
אקציות גם עבור חתך משתנה (גם בתחום הפלסטיות).

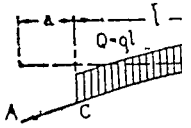
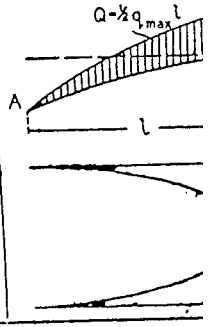
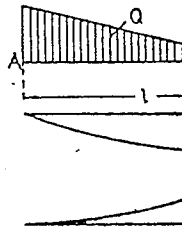
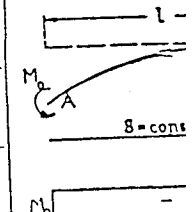
2) מערכת הצירים (אם לא צוין אחרת) —
היא בהתאם לציור. f_m — השקיעה באמצע השדה,
M_m — מומנט הכפיפה באמצע השדה.



3) הנוסחאות, בהן השקיעה f מבוטאת ע"י מותרσ, נכונות רק עבור חתכים הומוגניים
בעלי ציר סימטריה אופקי (h — גובה הקורה; מותרσ — מאמץ הכפיפה המכסימלי המותר).

4) פרטים על היחס בין מהלכי Q, S, M והקו האלסטי ראה ע' 314 וע' 379;
סימנים ראה ע' 310.

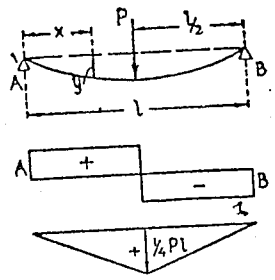
קורה, עמיסה, קו אלסטי; מהלך כוחות הגזירה S; מהלך מומנטי הכפיפה M.	מש' הקו האלסטי: $y = f(x)$; נטיית הקו האלסטי φ; שקיעות אלסטיות f.	ריאקציות A, B; מומנטי כפיפה.
1 (השווה ציור 102 וטבלה ע' 380). 	$y = \frac{1}{6}\frac{Pl^3}{EI} \times \left(3\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3}\right)$	$B = P$
	$\varphi_A = \frac{Pl^2}{2EI} = \frac{3f}{2l}$	$M = -Px$ $M_{min} = -Pl$
	$f_A = \frac{1}{3}\frac{Pl^3}{EI}$ $\left(= \frac{2}{3}\frac{\text{מותר}\,\sigma}{E}\frac{l^2}{h}\right)$	
2. 	הקו האלסטי בתחום l — כמו במקרה 1, בתחום a — קו ישר משיק. $f_A = \frac{Pl^2}{6EI}(2l + 3a)$	$B = P$ $M_{min} = -Pl$
3 (השווה ציור 98 וע' 380). 	$y = \frac{ql^4}{24EI} \times \left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x}{l} + 3\right)$	$B = Q = ql$
	$\varphi_A = \frac{ql^3}{6EI} = \frac{4}{3}\frac{f}{e}$	
	$f_A = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}$ $\left(= \frac{1}{2}\frac{\text{מותר}\,\sigma}{E}\frac{l^2}{h}\right)$	$M = -\frac{qx^2}{2}$ $M_{min} = -\frac{ql^2}{2}$

בקו האלסטי בתחום l — כמו במקרה 2; בתחום a — קו ישר משיק.	$B = Q = ql$ $M_{min} = -\frac{ql^2}{2}$	
$f_A = \frac{ql^3}{24EI}(3l + 4a)$		
$y = \frac{Ql^3}{60EI} \times \left(4 - 5\frac{x}{l} + \frac{x^5}{l^5}\right)$	$B = Q$	
$\varphi_A = \frac{Ql^2}{12EI}$	$M = -\frac{Q}{3}\frac{x^3}{l^2}$	
$f_A = \frac{Ql^3}{15EI}$ $\left(= \frac{2}{5}\frac{\sigma\ \text{מותר}}{E}\frac{l^2}{h}\right)$	$M_{min} = -\frac{1}{3}Ql$	
מקרה זה הוא הפרש המקרים 3 ו־5.	$B = Q$	
$y = \frac{Ql^3}{60} \times \left(-\frac{x^5}{l^5} - 5\frac{x^4}{l^4} + 15\frac{x}{l} + 11\right)$		
$\varphi_A = \frac{Ql^2}{4EI}$	$M = -\frac{Qx^2}{3l}\left(3 - \frac{x}{l}\right)$	
$f_A = \frac{11Ql^3}{60EI}$	$M_{min} = -\frac{2}{3}Ql$	
$y = \frac{\lvert M_0\rvert}{2EI}(l-x)^2$ *	$B = 0$	
$\varphi_A = \frac{M_0 l}{EI}$	$M = \text{const} = M_0$	
$f_A = \frac{M_0 l^2}{2EI}$ $\left(= \frac{\sigma\ \text{מותר}}{E}\frac{l^2}{h}\right)$		

* המשוואה — משוואת פרבולה; הפתרון המדויק נותן: $\rho = EI/M = \text{const}$, ז"א מעגל. הסתירה נובעת מהזנחת "y במשוואה (100), בשביל y קטנים — ההפרשים זעירים (עיין מקרה 26).

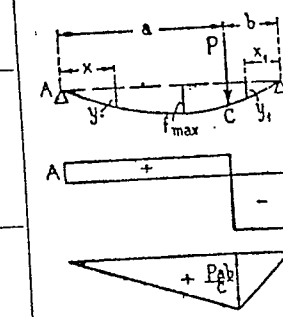
8.

$A = B = \frac{1}{2}P$	$y_{AC} = \frac{Pl^3}{16EI} \times \left(\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$
$M_{max} = \frac{Pl}{4}$	$\varphi_A = \varphi_B = \frac{Pl^2}{16EI}$
	$f_m = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI}$ $\left(= \frac{1}{6}\frac{\sigma\ \text{מותר}}{E}\frac{l^2}{h}\right)$



9.

$A = \frac{Pb}{l}$ $B = \frac{Pa}{l}$	$y_{AC} = y = \frac{Pa^2b^3}{6EIl} \times \left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b}\right)$ $y_{BC} = y_1 = \frac{Pb^2a^3}{6EIl} \times \left(2\frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{a} + \frac{x_1^3}{b^2a}\right)$
$M_{AC} = Ax$ $M_{BC} = Bx_1$ $M_{max} = \frac{Pab}{l}$	$\varphi_A = \frac{Pab(a+2b)}{6lEI}$ $\varphi_B = \varphi_{max} = \frac{Pab(b+2a)}{6lEI}$
	$f_C = \frac{Pa^2b^3}{3EIl}$; $(x = a)$ $f_{max} = \frac{Pb(l^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,lEI}$; $[x = \sqrt{(l^2-b^2)/3}]$ $f_m = \frac{Pb(3l^2-4b^2)}{48EI}$; $\left(x = \frac{l}{2}\right)$



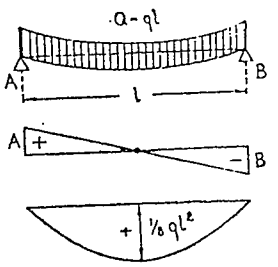
(ראה ציורים 94, 99).

.10

$$A = B = \frac{1}{2}\,Q \qquad y = \frac{ql^4}{24EI} \times \left(\frac{x}{l} - 2\,\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$M = \frac{qx}{2}\,(l-x) \qquad \varphi_A = \varphi_B = \frac{Ql^3}{24EI} = 3.2\,f_m/l$$

$$M_{max} = \frac{ql^2}{8} \qquad f_m = \frac{5}{384}\,\frac{ql^4}{EI} \left(= \frac{5}{24}\,\frac{\sigma_{\text{מותר}}}{E}\,\frac{l^2}{h}\right)$$



(ראה ע' 312).

.11

$$A = \frac{1}{3}\,Q \qquad y = \frac{Ql^3}{180\,EI} \times \left(7\,\frac{x}{l} - 10\,\frac{x^3}{l^3} + 3\,\frac{x^5}{l^5}\right)$$

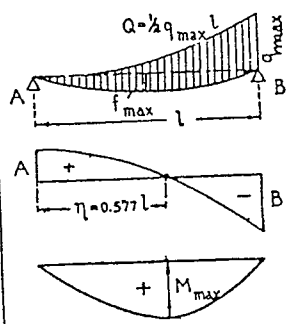
$$B = \frac{2}{3}\,Q$$

$$M = \frac{Qx}{3}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \qquad \varphi_{max} = \varphi_B = \frac{8}{180}\,\frac{Ql^2}{EI}$$

$$M_{max} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\,Ql = 0.128\,Ql \qquad f_{max} \cong 0.013\,\frac{Ql^3}{EI}\ ; \quad (x \cong 0.519\,l)$$

$$\eta = l/\sqrt{3} \quad (M_{max}\text{ שווה כמעט ל-}M_{max}\text{ של קורה 10}) \qquad \varphi_A = \frac{3}{180}\,\frac{Ql^2}{EI}$$

(גודלו ומקומו של f_{max} כמעט כמו במקרה 10).

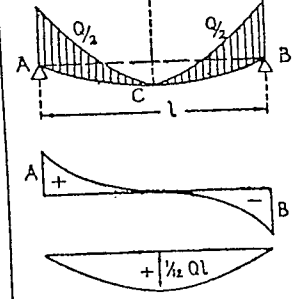


.12

$$A = B = \frac{1}{2}\,Q \qquad y_{AC} = \frac{Ql^3}{12\,EI}\left(\frac{3}{8}\,\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5}\,\frac{x^5}{l^5}\right)$$

$$M_{AC} = Qx \times \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2x^2}{3l^2}\right) \qquad f_m = \frac{3}{320}\,\frac{Ql^3}{EI}$$

$$M_{max} = \frac{Ql}{12} \qquad \left(= \frac{9}{40}\,\frac{\sigma_{\text{מותר}}}{E}\,\frac{l^2}{h}\right)$$

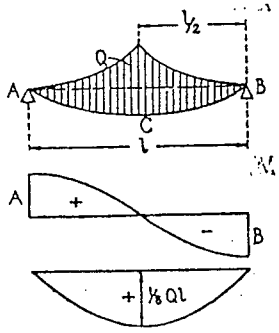


.13

$$A - B = \frac{1}{2}\,Q \qquad y_{AC} = \frac{Ql^3}{12\,EI} \times \left(\frac{5}{8}\,\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5}\,\frac{x^5}{l^5}\right)$$

$$M_{AC} = Qx \times \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\,\frac{x^2}{l^2}\right) \qquad f_m = \frac{Ql^3}{60\,EI} \left(= \frac{1}{5}\,\frac{\sigma_{\text{מותר}}}{E}\,\frac{l^2}{h}\right)$$

$$M_{max} = \frac{Ql}{6}$$



.14

$$A = B = P \qquad y_{AC} = \frac{Pa^2l}{6\,EI} \times \left(3\,\frac{x}{a} - 3\,\frac{x}{l} - \frac{x^3}{a^2l}\right)$$

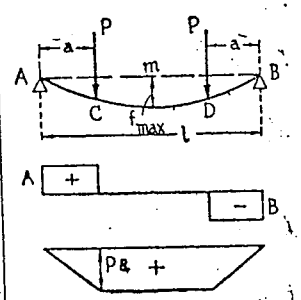
$$y_{CD} = \frac{Pal^2}{6\,EI} \times \left(3\,\frac{x}{l} - 3\,\frac{x^2}{l^2} - \frac{a^2}{l^2}\right)$$

(ביחס ל-CD — ראה הערה במס' 6).

$$M_{max} = Pa \qquad \varphi_A = \varphi_B = \frac{Pa(l-a)}{2\,EI}$$

$$f_C = \frac{Pa^2l}{6\,EI}\left(3 - 4\,\frac{a}{l}\right)$$

$$f_{max} = \frac{Pal^2}{24\,EI}\left(3 - 4\,\frac{a^2}{l^2}\right)$$



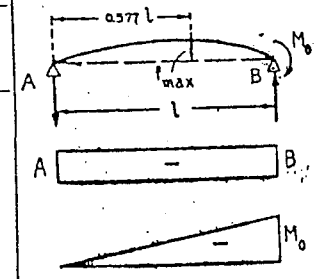
.15

$$-A = B = \frac{|M_0|}{l} \qquad y = -\frac{|M_0|lx}{6\,EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

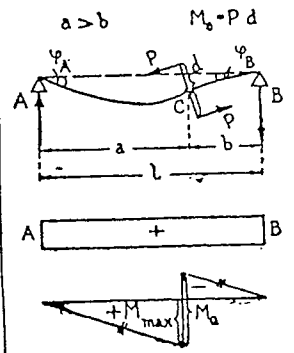
$$M = M_0\,\frac{x}{l} \qquad \varphi_B = \frac{M_0 l}{3\,EI}\ ; \quad \varphi_A = \frac{1}{2}\,\varphi_B$$

$$M_{min} = M_0 \qquad f_{max} \cong -\frac{1}{15.6}\,\frac{|M_0|l^2}{EI}\ ; \quad \left(x = \frac{l}{\sqrt{3}}\right)$$

$$f_m = -\frac{1}{16}\,\frac{|M_0|l^2}{EI}$$



16.



$$A = -B = \frac{M_o}{l}$$

$$y_{AC} = \frac{M_o x}{2\,EIl^2}\left[a^2\left(b+\frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^3\right] - \frac{M_o x^3}{6\,EIl}$$

C — נק' מעבר.

$$M_{max} = \frac{M_o a}{l}$$

$$\varphi_A = \frac{M_o}{2l^2} \times \left[a^2\left(b+\frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^2\right]$$

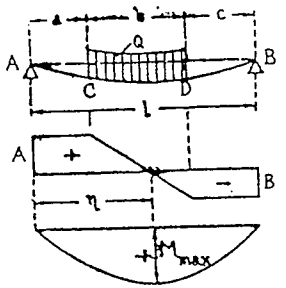
$$\varphi_B = \frac{M_o}{2l^2} \times \left[\frac{2}{3}a^2 - b^2\left(a+\frac{b}{3}\right)\right]$$

כאשר $a = b$:

$$f_{max} = f_{x=l/4} = \frac{M_o l^2}{128\,EI};$$

$$f_m = 0$$

17.



$$A = Q\frac{2c+b}{2l};\quad B = Q\frac{2a+b}{2l};$$

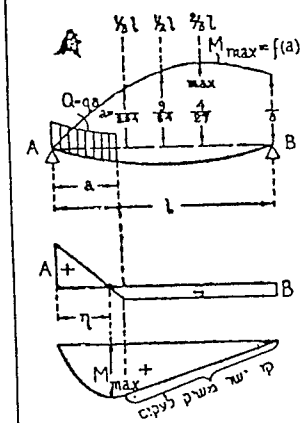
$$M_{max} = A\eta - \frac{Q(\eta-a)^2}{2l};\quad \eta = a + \frac{Ab}{Q}$$

כאשר $a = c$:

$$A = B = \frac{1}{2}Q;\quad M_{max} = Q/4(l - b/2)$$

$$f_{max} = f_m = \frac{Ql^3}{384\,EI}\left(8 - 4\frac{b^2}{l^2} + \frac{b^4}{l^4}\right)$$

18.



$$A = Q\frac{2l-a}{2l};\quad B = Q\frac{a}{2l}$$

$$M_{max} = \frac{A^2}{2q} = \frac{Qa}{2}\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2 = \alpha\,Ql;$$

$$\eta = \frac{A}{q} = a\left(1-\frac{a}{2l}\right) < a$$

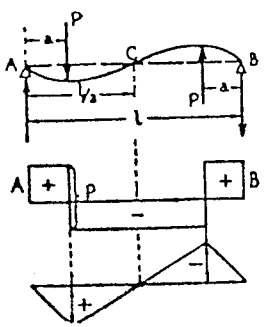
כאשר $a = \frac{2}{3}l$, $\left(\eta = \frac{4}{9}l\right)$, מתקבל α_{max}, וז"א $M_{max\,max}$.

כאשר $a = \frac{1}{2}l$: $\varphi_A = \frac{3\,Ql^2}{64\,EI}$; $\varphi_B = \frac{7\,Ql^2}{192\,EI}$

$$f_m = \frac{5}{768}\frac{ql^4}{EI}$$

(המקרה $a = \frac{1}{2}l$ מתקבל גם מתוך סיכום מס' 10 ו־20).

19.



$$A = P\left(1-\frac{2a}{l}\right) = -B$$

$$M_{max} = -M_{min} = Pa\left(1-\frac{2a}{l}\right)$$

הערות:

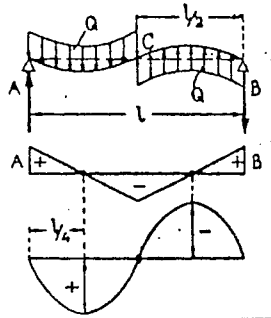
מצב העמיסה — אנטיסימטרי,

מהלך M — "

קו אלסטי — "

וז"א החלק AC (ו־BC) פועל כמו קורה על 2 סמכים.

20.

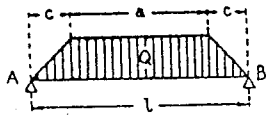


$$A = -B = \frac{1}{2}Q$$

$$M_{max} = -M_{min} = \frac{Ql}{16}$$

ראה הערות במקרה הקודם, מס' 19.

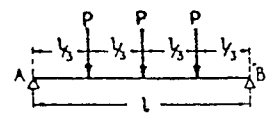
21.



$$A = B = \frac{1}{2}Q$$

$$M_{max} = Q\frac{8c^2+3a(4c+a)}{24(c+a)}$$

22.

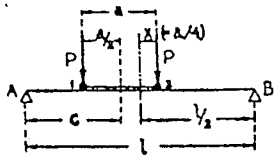


$$A = B = \frac{2}{3}P;\quad M_{max} = M_m = \frac{3}{5}Pl$$

$$f_{max} = f_m = \frac{63}{1000}\frac{Pl^3}{EI}$$

23.

קורת עגורן.



שני עומסים שווים P ניידים.

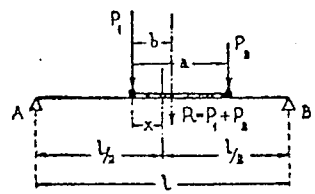
א) $a \leqq 0.586\,l$; $M_{max\,max}$ מתקבל מתחת ל־2, כאשר $x = \frac{1}{2}a$:

$$M_{max} = \frac{Pl}{2}\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2 = \frac{2Pc^2}{l};\quad c = \frac{l}{2} - \frac{a}{4}$$

ב) $a \geqq 0.586\,l$; $M_{max\,max}$, כאשר P באמצע הקורה (הגלגל השני מחוץ לקורה):

$$M_{max} = \frac{1}{4}Pl$$

24. קורת עגורן.



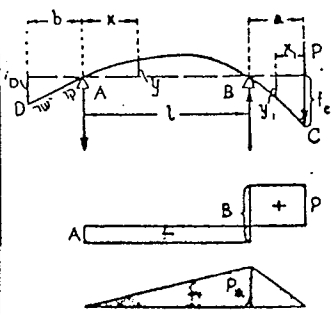
שני עומסים P_1 ו־P_2 ניידים ($P_1 > P_2$),
א) $M_{max\,max}$ מתקבל מתחת ל־P_1, כאשר $x = \frac{1}{2}b$,
(בהנחה $x > 0$):

$$M_{max} = \frac{R}{4}\,\frac{(l-b)^2}{l}\;;\quad b = \frac{P_2 a}{R}$$

ב) אם אפשרי ש־P_1 יעמוד לבדו באמצע הקורה, יהיה:
$M_{max} = \frac{1}{4} P_1 l$

קובע הגדול בין שני המומנטים (א) ו־(ב).

25.



שדה AB — כמו במס' 15,
כאשר: $M_0 = Pa$

$$y_1 = \frac{Pla^2}{6EI}\left(\frac{2l+3a}{l}\,\frac{x_1}{a} - \frac{x_1^3}{la^2} - \frac{2(l+a)}{l}\right)$$

$$\varphi_0 = \frac{Pa}{6EI}\,(2l + 3a^2)$$

$$f_0 = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$$

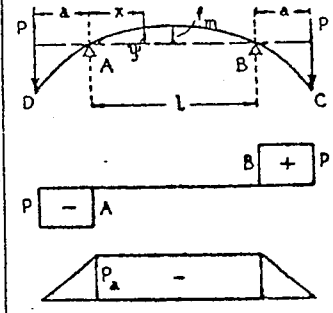
$$f_D = \frac{Pabl}{6EI}$$

$$A = -\frac{Pa}{l}\;;$$

$$B = \frac{P(l+a)}{b}$$

$$M_{min} = -Pa$$

26.



עבור השדה AB:

$$y = \frac{M_0 x(l-x)}{2}\;;\quad M_0 = -Pa$$

מדויק יותר (ראה הסבר במס' 6):

$$y = f_m - [\rho - \sqrt{\rho^2 - (l/2 - x)^2}\,];$$

$$\rho = EI/M_0$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{Pal}{2EI} = \frac{M_0 l}{2EI}$$

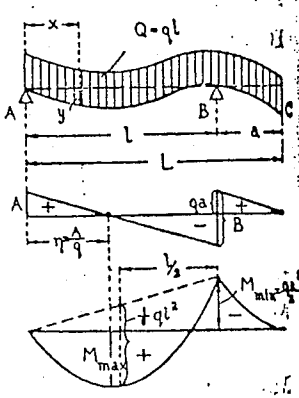
$$f_m = -\frac{Pl^2 a}{8EI} = -\frac{|M_0| l^2}{8EI}$$

$$f_0 = f_D = \frac{Pa^2}{3EI}\left(a + \frac{3}{2}\,l\right)$$

$$A = B = P$$

$$M_{min} = -Pa$$

27.



מקרה זה מורכב מן המקרים מס' 10, מס' 15 ומס' 3.

$$y_{AB} = \frac{qx}{24EI}\,(l^3 - 2lx^2 + x^3) - \frac{qa^2 lx}{12EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\varphi_B = \frac{qa^2 l}{6EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

$$f_0 = \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^2 l}{6EI} - \frac{qal^3}{24EI}$$

$$A = \frac{(l^2 - a^2)}{2l}$$

$$B = \frac{q(l+a)^2}{2l}$$

$$M_{max} = \frac{A^2}{2q}$$

$$\eta = \frac{A}{q} = \frac{l^2 - a^2}{2l}$$

כאשר: $l = L/\sqrt{2}$ ($a \cong 0.414\,l$)

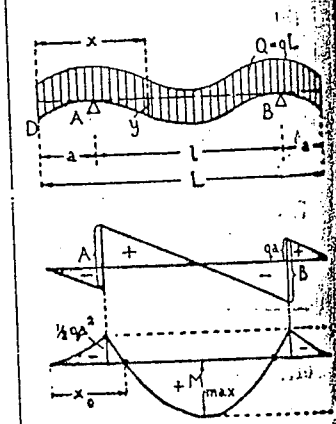
מקבלים:

$$M_{max} = |M_B| = \frac{qa^2}{2} \cong \frac{qL^2}{23}$$

(השווה עם $qL^2/8$ במקרה מס' 10).

(ראה ציור 103).

28.



$$A = B = \frac{1}{2}\,Q$$

$$M_{AB} = \frac{Qx}{2}\left(1 - \frac{a}{x} - \frac{x}{L}\right);\quad M_m = \frac{Q}{2}\left(\frac{L}{4} - a\right)$$

כאשר $a = l/\sqrt{8} = 0.207\,L$, מקבלים (השווה $QL/8$ במס' 10):

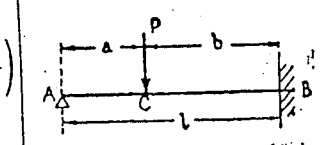
$$|M_A| = |M_B| = M_m \cong \frac{QL}{47}$$

$$x_0 = \frac{L}{2} \pm \sqrt{\frac{L^2}{4} - aL}$$

$$f_m = \frac{5\,ql^2}{384EI} - \frac{qa^2 l^2}{16EI}$$

$$f_0 = f_D = -\frac{qa}{24EI}\,(l^3 - 6a^2 l - 3a^3)$$

29.

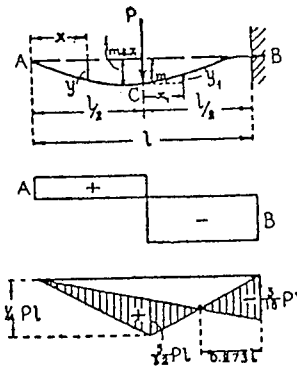


$$A = \frac{P}{2}\,\frac{b^2}{l^3}\,(a + 2l);\quad B = \frac{P}{2}\left(\frac{3a}{l} - \frac{a^3}{l^3}\right)$$

$$M_B = -\frac{Pa}{2}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right);\quad M_0 = \frac{Pa}{2}\left(2 - \frac{3a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right)$$

$$f_0 = \frac{Pb^3 a^2 (4l - b)}{12EIl^3}$$

.30



(השווה ציור 236).

$y_{AO} = y = \frac{Pl^3}{32\,EI} \times \left(\frac{x}{l} - \frac{5x^3}{3l^3}\right)$

$y_{OB} = y_1 = \frac{Pl^3}{32\,EI} \times \left(\frac{x_1}{4l} + \frac{5x_1^3}{2l^3} - \frac{11}{3}\,\frac{x^3}{l^3}\right)$

$A = {}^5/_{16}\,P$

$B = {}^{11}/_{16}\,P$

$M_{AO} = \frac{5}{16}\,Px$

$M_{OB} = Pl \times \left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\,\frac{x_1}{l}\right)$

$M_O = \frac{5}{32}\,Pl$

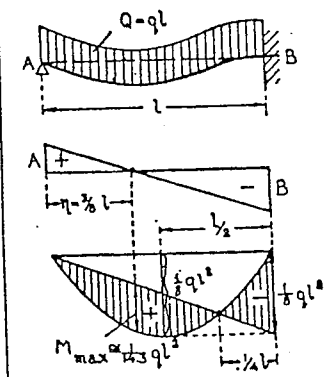
$|M|_{max} = M_B = -\frac{3}{16}\,Pl$

$\varphi_A = \frac{Pl^2}{32\,EI}$

$f_O = \frac{7Pl^3}{768\,EI}$

$f_{max} = \frac{\sqrt{5}Pl^3}{240\,EI}$; $(x = 0.477\,l)$

.31



(השווה ציור 111).

$y = \frac{ql^4}{48\,EI} \times \left(\frac{x}{l} - 3\,\frac{x^3}{l^3} + 2\,\frac{x^4}{l^4}\right)$

$A = \frac{3}{8}\,ql$

$B = \frac{5}{8}\,ql$

$M_{max} = \frac{9}{128}\,ql^2$; $\left(\eta = \frac{3}{8}\,l\right)$

$|M|_{max} = M_B = -\frac{1}{8}\,ql^2$

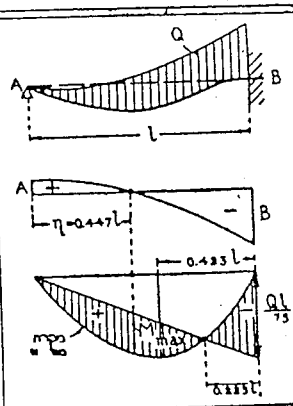
$|M|_{max}$ כמו במקרה 0 (בתחום האלסטיות).

$\varphi_A = \frac{ql^3}{48\,EI}$

$f_m = \frac{ql^4}{192\,EI}$

$f_{max} = \frac{ql^4}{185\,EI}$; $(x = 0.422l)$

.32



$y = \frac{Ql^3}{60\,EI} \times \left(-\frac{x}{l} + 2\,\frac{x^3}{l^3} - \frac{x^5}{l^5}\right)$

$M = Qx\left(\frac{1}{5} - \frac{x^2}{3l^2}\right)$

$M_{max} \cong 0.06\,Ql$; $(\eta = l/\sqrt{5} = 0.477l)$

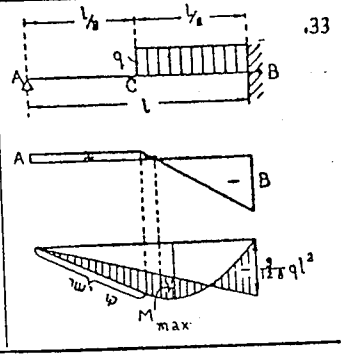
$f_{max} \cong \frac{Ql^3}{210\,EI}$; $(x = l/\sqrt{5} = \eta)$

$A = \frac{1}{5}\,Q$

$B = \frac{4}{5}\,Q$

$|M|_{max} = M_B = -Ql/7.5$

.33

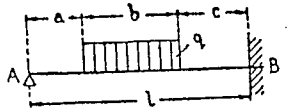


$A = \frac{7}{128}\,ql$; $B = \frac{57}{128}\,ql$

$M_{max} \cong 0.029\,ql^2$

$|M_1|_{max} = M_B = -\frac{9}{128}\,ql^2$

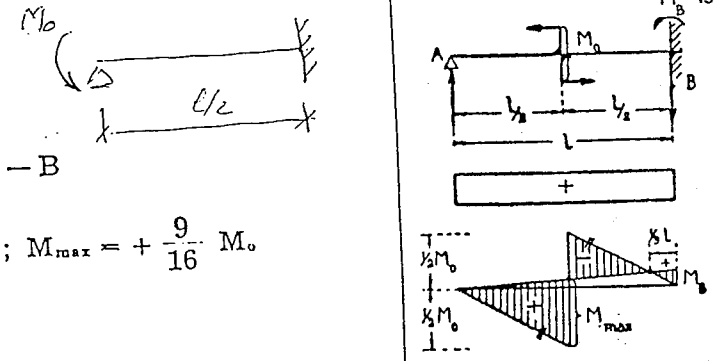
.34



$A = \frac{qb(2c+b)}{2l} - D = \frac{qb(2c+b)}{2l} - \frac{q}{2l^3}\left[l^2\,\frac{(a+b)^2-a^2}{2} - \frac{(a+b)^4-a^4}{4}\right]$

$B = qb - A$; $M_B = -Dl$

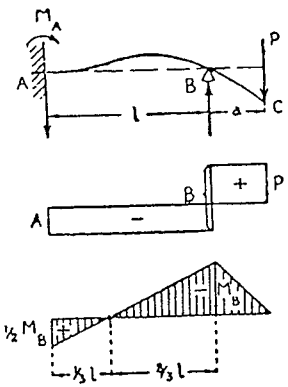
.35



$A = \frac{9}{8}\,\frac{M_0}{l} = -B$

$M_B = \pm\frac{1}{8}\,M_0$; $M_{max} = +\frac{9}{16}\,M_0$

.36



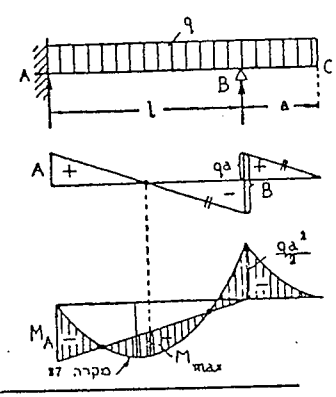
$$M_B = -Pa$$

$$A = -\frac{3}{2}\frac{|M_B|}{l}\ ;\ B = P + \frac{3}{2}\frac{|M_B|}{l}$$

$$M_A = -\frac{1}{2}M_B$$

$$f_0 = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2 l}{4EI}$$

.37

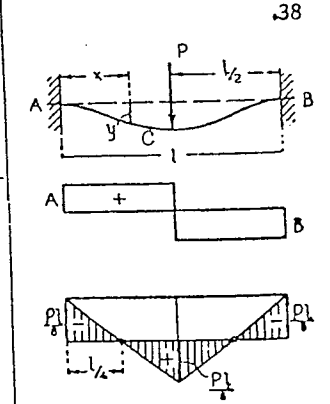


$$A = q(l+a) - B;\ B = \frac{q}{8l}(6a^2 + 8al + 3l^2)$$

$$M_A = -\frac{1}{2}q(a+l)^2 + Bl$$

$$M_B = -\frac{1}{2}qa^2$$

.38



$$A = B = \frac{1}{2}P$$

$$M_{A0} = \frac{Pl}{2} \times \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$$

$$M_{0B} = \frac{Pl}{2} \times \left(\frac{4}{3} - \frac{x}{l}\right)$$

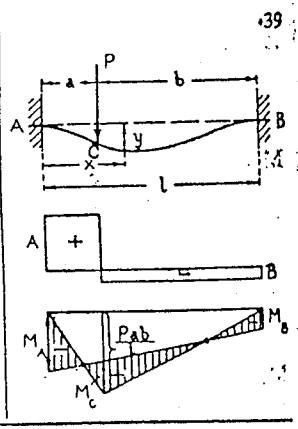
$$M_0 = |M_A| = |M_B| = \frac{1}{8}Pl$$

$$y = \frac{Pl^3}{16EI} \times \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right)$$

$$f_0 = f_m = f_{max} = \frac{Pl^3}{192EI}$$

$$\left(= \frac{1}{12}\frac{\sigma\ \text{מותר}}{E}\frac{l^2}{h}\right)$$

.39



$$A = P\frac{b}{l^3} \times (l^2 - a^2 + ab)$$

$$B = P\frac{a}{l^3} \times (l^2 - b^2 + ab)$$

$$M_A = -P\frac{ab^2}{l^2}$$

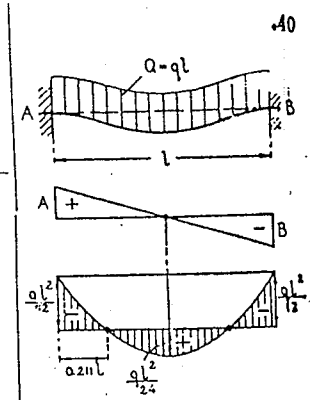
$$M_B = -P\frac{ba^2}{l^2}$$

$$M_0 = 2P\frac{a^2b^2}{l^3}$$

$$f_0 = \frac{Pa^3b^3}{3EIl^3}$$

$$f_{max} = \frac{2P}{3EI}\frac{a^2b^2}{(3l-2a)^2}\ ;\quad \left(x = \frac{l^2}{3l-2a}\right)$$

.40



$$A = B = \frac{1}{2}ql$$

$$M = -\frac{ql^2}{2} \times \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}$$

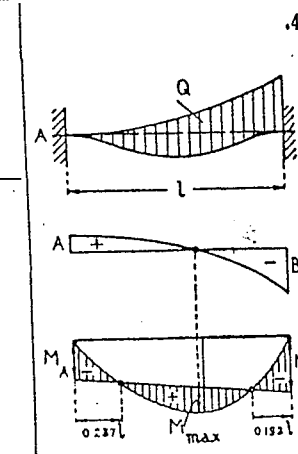
$$M_m = \frac{ql^2}{24}$$

$$y = \frac{ql^4}{24EI} \times \left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$f_m = \frac{ql^4}{384EI}$$

$$\left(= \frac{1}{16}\frac{\sigma\ \text{מותר}}{E}\frac{l^2}{h}\right)$$

.41



$$A = \frac{3}{10}Q$$

$$B = \frac{7}{10}Q$$

$$M = -\frac{Ql}{30} \times \left(10\frac{x^3}{l^3} - 9\frac{x}{l} + 2\right)$$

$$M_{max} = -\frac{Ql}{23.3}\ ;\quad (\eta = 0.548l)$$

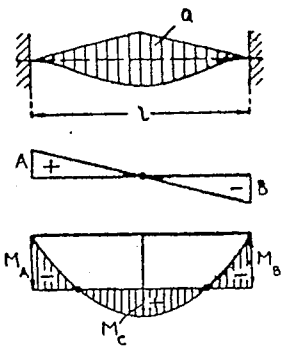
$$M_A = -Ql/15$$

$$|M|_{max} = M_B = -Ql/10$$

$$y = \frac{Ql^3}{24EI} \times \left(\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right)$$

$$f_{max} = \frac{Ql^3}{382EI}\ ;\quad (x = 0.525l)$$

.42



$A = B = \frac{1}{2} Q$

$y = \frac{Ql^3}{6\,EI} \times \left(\frac{5x^2}{16l^2} - \frac{x^3}{2l^3} + \frac{x^5}{5l^5}\right)$

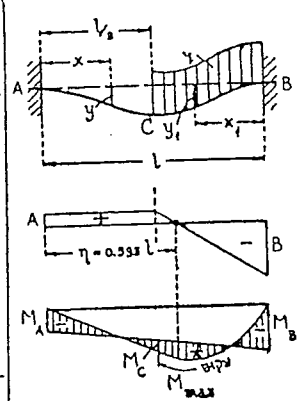
$M = -Ql\left(\frac{5}{48} - \frac{x}{2l} + \frac{2x^2}{3l^2}\right)$

$|M|_{max} = M_A = M_B = -\frac{5}{48} Ql$

$M_C = \frac{Ql}{16}$

$f_m = \frac{7Ql^3}{1920\,EI}$

.43



$A = \frac{3}{32} ql$

$B = \frac{13}{32} ql$

$y_{AC} = \frac{ql^4}{64\,EI}\left(\frac{5x^2}{6l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right)$

$y_{BC} = y_1 = \frac{ql^4}{384\,EI} \times \left(11\frac{x_1^2}{l^2} - 26\frac{x_1^3}{l^3} + 16\frac{x_1^4}{l^4}\right)$

$M_{AC} = \frac{3}{32} qlx - \frac{5}{192} ql^2$

$M_{BC} = \frac{13}{32} qlx_1 - \frac{1}{2} qlx_1^2 - \frac{11}{192} ql^2$

$f_C = \frac{ql^4}{768\,EI}$

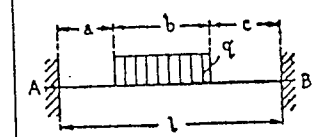
$f_{max} = \frac{ql^4}{666\,EI}$;

$(x = 0.445l)$

$M_A = -\frac{5}{192} ql^2$; $M_{max} \cong \frac{1}{39.6} ql^2$

$M_C = \frac{ql^2}{48}$; $|M|_{max} = M_B = -\frac{11}{192} ql^2$

.44



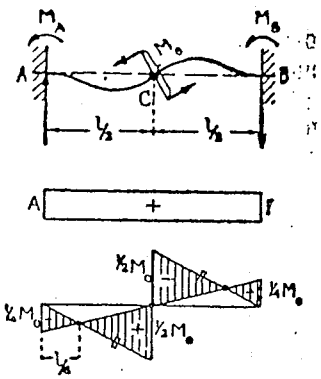
$A = \frac{qb(2c+b)}{2l} - \frac{M_A - M_B}{l}$

$B = \frac{qb(2a+b)}{2l} - \frac{M_B - M_A}{l}$

$M_A = -\frac{q}{l^2}\left[l^2\frac{(a+b)^2-a^2}{2} - 2l\frac{(a+b)^3-a^3}{3} + \frac{(a+b)^4-a^4}{4}\right]$

$M_B = -\frac{q}{l^2}\left[l\frac{(a+b)^2-a^2}{3} - \frac{(a+b)^4-a^4}{4}\right]$

.45



$A = -B = \frac{3}{2}\frac{M_0}{l}$

$M_A = -M_B = -\frac{1}{4} M_0$;

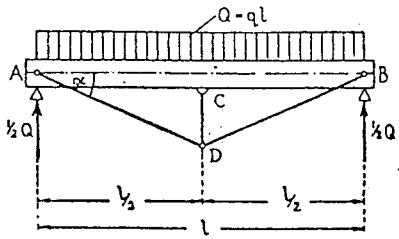
$M_{max} = M_C = \frac{1}{2} M_0$

במקרה ש־M_0 אינו תוקף באמצע $(a = AC)$:

$M_A = \frac{2M_0}{l}\left[b\left(1 - \frac{b}{2l} - \frac{l}{3b}\right) + 2a\left(1 - \frac{a}{2l} - \frac{l}{3a}\right)\right]$

$M_B = \frac{2M_0}{l}\left[a\left(1 - \frac{a}{2l} - \frac{l}{3a}\right) + 2b\left(1 - \frac{b}{2l} - \frac{l}{3b}\right)\right]$

.46 קורה עם מתלה פשוט.



בהזנחת שינויי האורך מקבלים (חישוב מדויק ראה ע' 483):

א) הכוחות הצירים במוטות —

$N_{AD} = N_{BD} = +(5/16 \sin\alpha)Q$

$N_{CD} = -(5/8)Q$

ב) עבור הקורה AB:

הכוח הנורמלי הצירי —

$N_{AB} = -(5/16 \tan\alpha)Q$

הריאקציות —

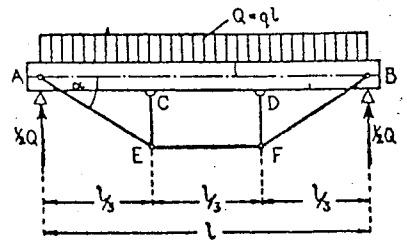
$A' = B' = (3/16)Q$; $C = (5/8)Q$

המומנט המכסימלי — $|M|_{max} = M_C = -Ql/32$

מכאן, המאמץ הנורמלי המכסימלי (A — חתך הערב, Z — מומנט ההתנגדות):

$\sigma_{max} = 5Q/16\,A \tan\alpha + Ql/32Z$

.47 קורה עם מתלה כפול.



בהזנחת שינויי האורך מקבלים:

א) הכוחות הצירים במוטות —

$N_{CE} = N_{DF} = -(11/30)Q$

$N_{AE} = N_{BF} = (11/30 \sin\alpha)Q$

$N_{EF} = +(11/30 \tan\alpha)Q$

ב) עבור הקורה AB:

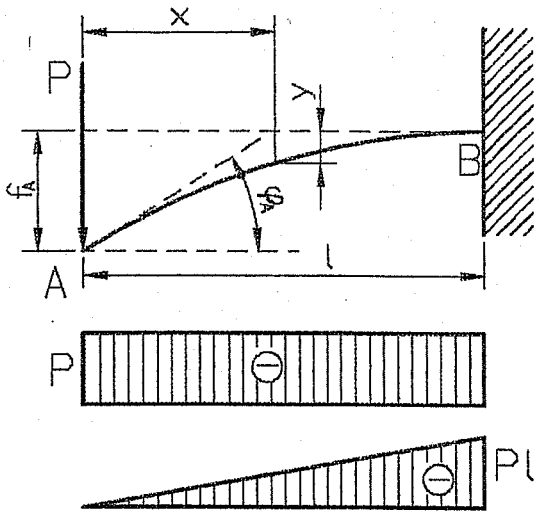
הכוח הנורמלי הצירי —

$N_{AB} = -(11/30 \tan\alpha)Q$

הריאקציות — $A' = B' = (4/30)Q$; $C = D = (11/30)Q$

המומנט המכסימלי — $|M|_{max} = -Ql/90$

מכאן, המאמץ הנורמלי המכסימלי שווה: $\sigma_{max} = 11Q/30\,A \tan\alpha + Ql/90Z$



1 השקיעה של נקודה A: (ראה תרשים)

$$f_A = \frac{Pl^3}{3EI}$$

משוואת קו האלסטי:

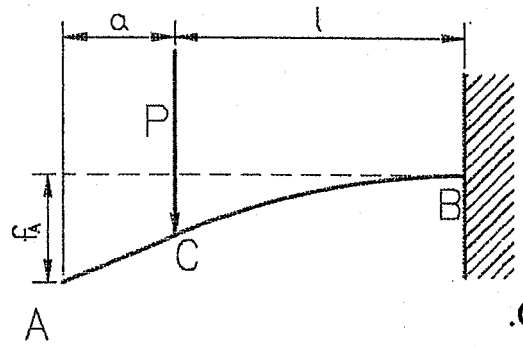
$$y = \frac{Pl^3}{6EI}\left(2 - 3\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right)$$

הזווית בנקודה A: (ראה תרשים)

$$\varphi_A = \frac{Pl^2}{2EI}$$

ריאקציה בנקודה B: $V_B = P$; מומנט מקסימלי: $M_{max} = -P.\ell$

משוואת המומנט: $M_x = -Px$

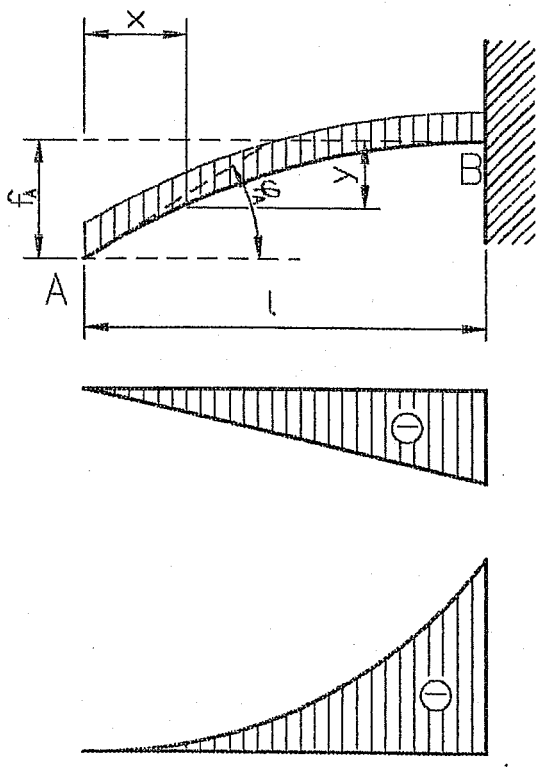


2 השקיעה של נקודה A: (ראה תרשים)

$$f_A = \frac{Pl^2}{6EI}(2l + 3a)$$

משוואת קו האלסטי בתחום l כמו במקרה 1.

בתחום a – קו ישר משיק לקו האלסטי בנקודה C.



3 השקיעה של נקודה A: (ראה תרשים)

$$f_A = \frac{ql^4}{8EI}$$

משוואת קו האלסטי:

$$y = \frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x}{l} + 3\right)$$

הזווית בנקודה A:

$$\varphi_A = \frac{ql^3}{6EI}$$

ריאקציה בנקודה B:

$$V_B = ql$$

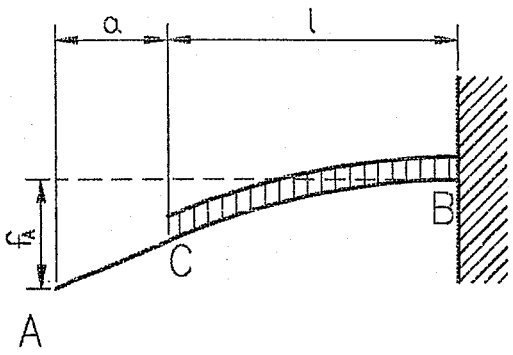
המומנט המקסימלי:

$$M_{max} = -\frac{ql^2}{2}$$

משוואת מומנט כפיפה:

$$M_x = -\frac{qx^2}{2}$$

4 משוואת קו האלסטי בתחום l - כמו במקרה 3.
בתחום a - קו ישר משיק.



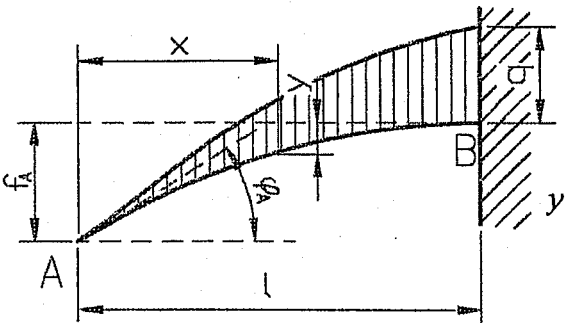
השקיעה של הנקודה A:

$$f_A = \frac{ql^3(3l+4a)}{24EI}$$

ריאקציה בנקודה B: $V_B = ql$

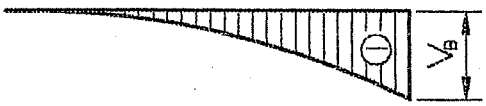
המומנט המקסימלי: $M_{\max} = -\frac{ql^2}{2}$

5. משוואת קו האלסטי: $y = \frac{ql^4}{120EI}\left(4 - 5\frac{x}{l} + \frac{x^3}{l^3}\right)$



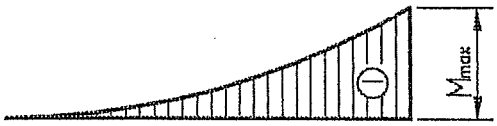
הזווית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{ql^3}{24EI}$

השקיע של הנקודה A: $f_A = \frac{ql^4}{30EI}$



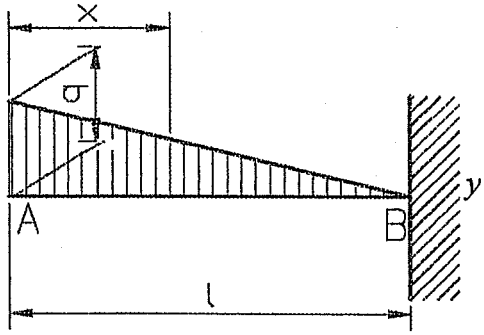
ריאקציה בנקודה B: $V_B = \frac{1}{2}ql$

משוואת מומנט הכפיפה: $M_x = -\frac{qx^3}{6l}$



מומנט המקסימלי: $M_{\max} = -\frac{ql^2}{6}$

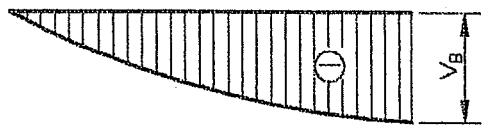
6 מקרה זה הוא הפרש המקרים 3 ו-5.



משוואת קו האלסטי: $y = \frac{ql^4}{120}\left(-\frac{x^5}{l^5} - 5\frac{x^4}{l^4} + 15\frac{x}{l} + 11\right)$

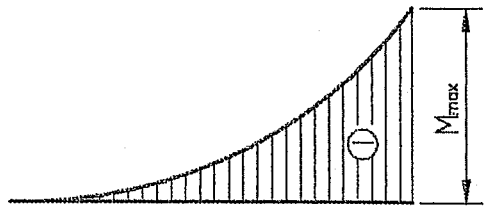
הזווית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{ql^3}{8EI}$

השקיעה של הנקודה A: $f_A = \frac{11ql^4}{120EI}$

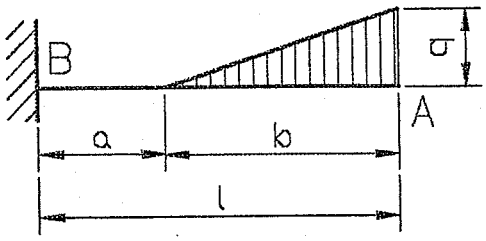


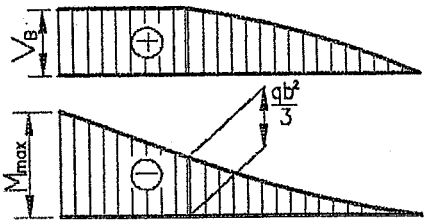
ריאקציה בנקודה B: $V_B = \frac{1}{2}ql$

משוואת מומנט הכפיפה: $M_x = -\frac{qx^2}{6}\left(3 - \frac{x}{l}\right)$



מומנט המקסימלי: $M_{\max} = -\frac{ql^2}{3}$



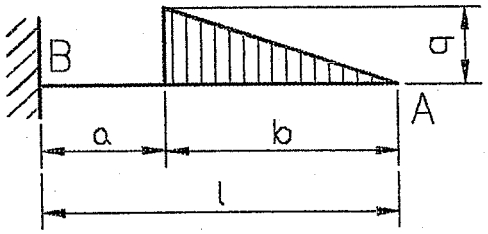


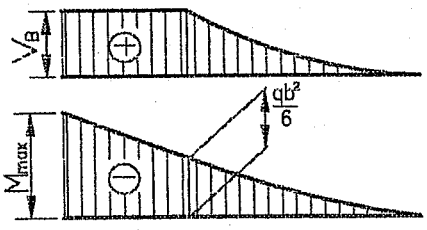
7 ריאקציה בנקודה B: $V_B = \frac{qb}{2}$

מומנט המקסימלי: $M_{\max} = -\frac{qb}{6}(2l + a)$

הזווית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{qb}{24EI}\left(6l^2 - 4lb + b^2\right)$

השקיעה של הנקודה A: $f_A = \frac{qbl^3}{120EI}\left(20 - 10\frac{b}{l} + \frac{b^3}{l^3}\right)$



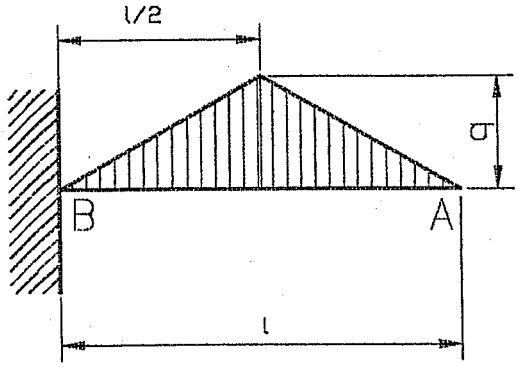


8 ריאקציה בנקודה B: $V_B = \frac{qb}{2}$

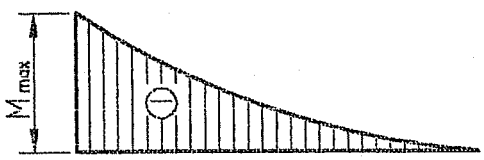
מומנט המקסימלי: $M_{\max} = -\frac{qb}{6}(l + 2a)$

הזווית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{qb}{24EI}\left(6l^2 - 8lb + 3b^2\right)$

השקיעה של הנקודה A: $f_A = \frac{ql^3 b}{30EI}\left(5 - 5\frac{b}{l} + \frac{b^3}{l^3}\right)$







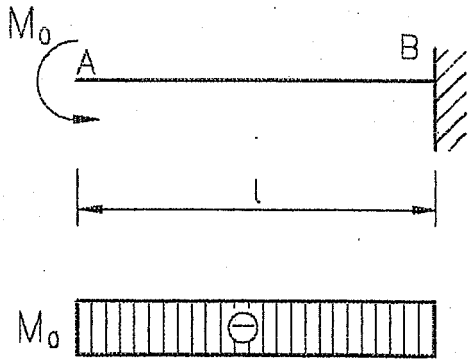
9 ריאקציה בנקודה B: $V_B = \frac{ql}{2}$

מומנט המקסימלי: $M_{\max} = -\frac{ql^2}{4}$

הזווית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{7ql^3}{96EI}$

השקיעה של הנקודה A: $f_A = \frac{11ql^4}{192EI}$

10. ריאקציה בנקודה B: $V_B = 0$



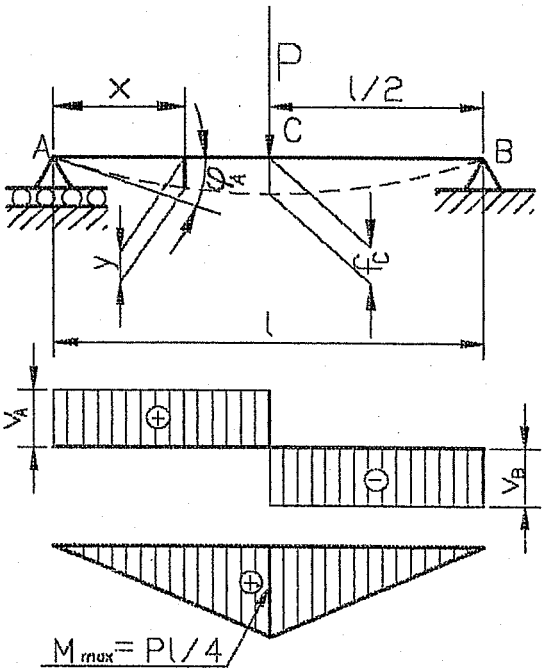
מומנט המקסימלי: $M_{\max} = M_0$

הזווית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{M_0 l}{EI}$

השקיעה של הנקודה A: $f_A = \frac{M_0 l^2}{2EI}$

משוואת קו האלסטי: $y = \frac{|M_0|}{2EI}(l-x)^2$

11. הריאקציות בנקודות A; B: $V_A = V_B = \frac{P}{2}$



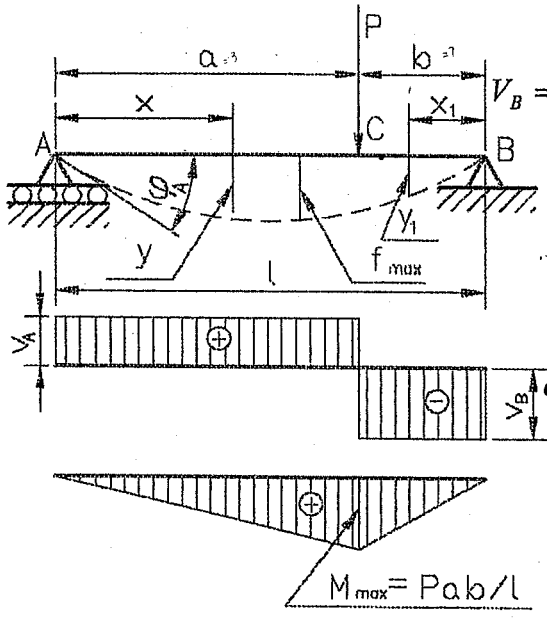
מומנט המקסימלי: $M_{\max} = \frac{Pl}{4}$

הזוויות בנקודות A; B: $\varphi_A = \varphi_B = \frac{Pl^2}{16EI}$

השקיעה בנקודה C: $f_C = \frac{Pl^3}{48EI}$

משוואת קו האלסטי: $y = \frac{Pl^3}{16EI}\left(\frac{x}{l} - \frac{4x^3}{3l^3}\right)$

12. הריאקציות בנקודות A; B: $V_A = \frac{Pb}{l}$; $V_B = \frac{Pa}{l}$



משוואת המומנט: $M_{AC} = V_A x$; $M_{BC} = V_B x_1$

מומנט המקסימלי: $M_{\max} = \frac{Pab}{l}$

הזוויות בנקודות A; B: $\varphi_A = \frac{Pab(a+2b)}{6lEI}$

$\varphi_B = \varphi_{\max} = \frac{Pab(b+2a)}{6lEI}$

השקיעה בנקודה C: $(x=a) \quad f_C = \frac{Pa^2b^2}{3lEI}$

השקיעה מקסימלית: $f_{\max} = \frac{Pb(l^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}lEI}$

ראה המשך בדף הבאה.

$y = \frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(2\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x^3}{a^2b}\right) \quad x \le a$

$y_1 = Pb^2a^2\left(2\frac{x_1}{b} + \frac{x_1}{a} + \frac{x_1^3}{b^2a}\right)/6EIl \quad x_1 \le b$

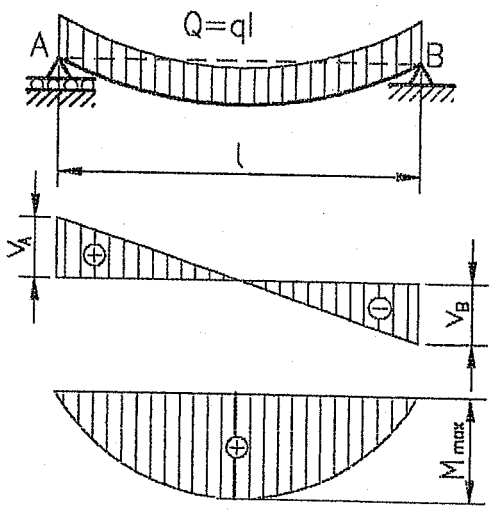
12 המשך:

השקיעה מקסימלית כאשר : $x=\sqrt{\frac{\left(l^2-b^2\right)}{3}}$;

השקיעה באמצע קורה : $f_m=\frac{Pb\left(3l^2-4b^2\right)}{48EI}$ (כאשר $x=\frac{l}{2}$)

משוואת הקו האלסטי: $y_{AC}=y=\frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(2\frac{x}{a}+\frac{x}{b}-\frac{x^3}{a^2b}\right)$

$y_{BC}=y_1=\frac{Pa^2b^2}{6EIl}\left(2\frac{x_1}{b}+\frac{x_1}{a}+\frac{x_1{}^3}{b^2a}\right)$



13.הריאקציות בנקודות A ; B: $V_A=V_B=\frac{Q}{2}$

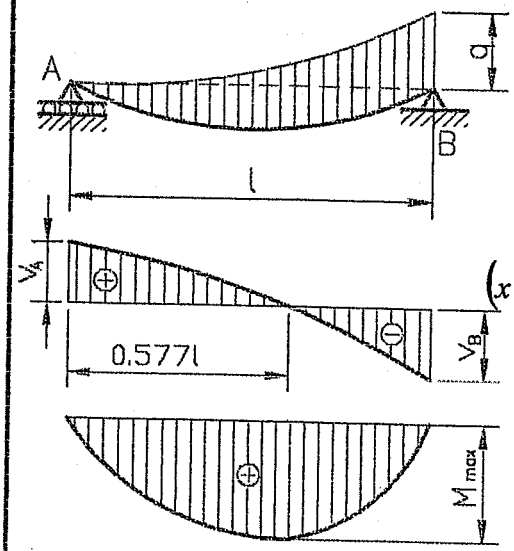
משוואת המומנט: $M=\frac{qx}{2}(l-x)$

מומנט המקסימלי: $M_{\max}=\frac{ql^2}{8}$

הזוויות בנקודות A ; B: $\varphi_A=\varphi_B=\frac{ql^3}{24EI}$

השקיעה באמצע קורה : $f_m=f_{\max}=\frac{5ql^4}{384EI}$

משוואת הקו האלסטי: $y=\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{x}{l}-2\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}\right)$



14. הריאקציות בנקודות A ; B:

$V_A=\frac{ql}{6}$; $V_B=\frac{ql}{3}$

משוואת המומנט: $M=\frac{qlx}{6}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$

מומנט המקסימלי: $M_{\max}=\frac{ql^2}{9\sqrt{3}}=0.064ql^2$ $\left(x=l/\sqrt{3}\right)$

הזוויות בנקודות A ; B:

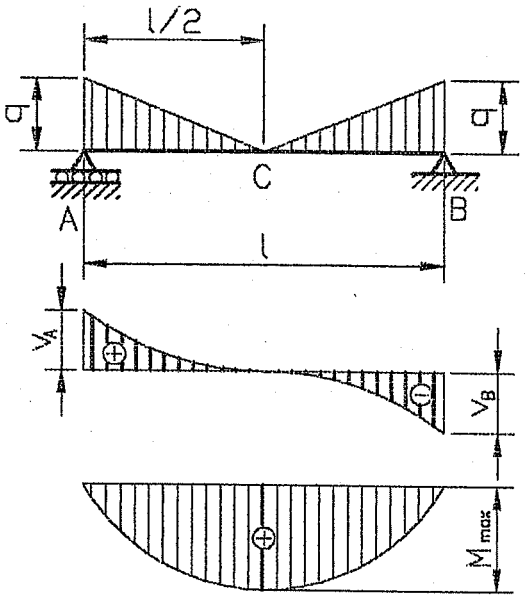
$\varphi_A=\frac{7ql^3}{360EI}$; $\varphi_B=\varphi_{\max}=\frac{ql^3}{45EI}$

ראה המשך בדף הבא:

(מיקרה 14 המשך מדף קודם.)

משוואת הקו האלסטי: $y=\frac{ql^4}{360EI}\left(7\frac{x}{l}-10\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^5}{l^5}\right)$

שקיעה מקסימלית: $f_{\max}\cong 0.0065\frac{ql^4}{EI}$



15. הריאקציות בנקודות A ; B: $V_A=V_B=\frac{ql}{4}$

משוואת המומנט: $M_{AC}=\frac{qlx}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}+\frac{2x^2}{3l^2}\right)$

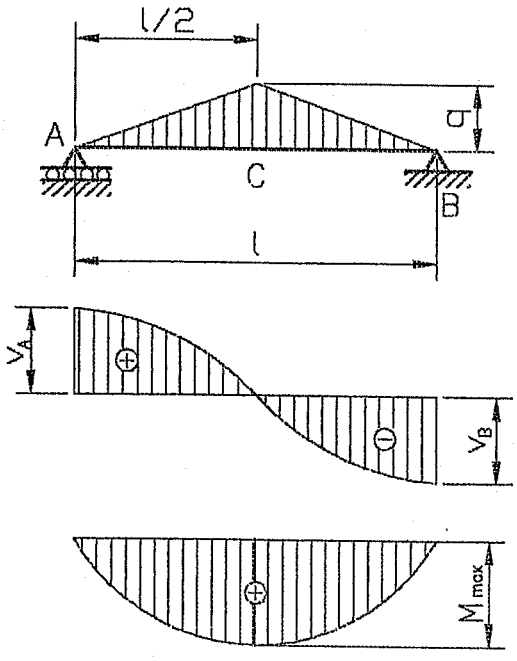
מומנט המקסימלי: $M_{\max}=\frac{ql^2}{24}$

שקיעה מקסימלית: $f_{\max}=\frac{3ql^4}{640EI}$

משוואת הקו האלסטי:

$$y_{AC}=\frac{ql^4}{24EI}\left(\frac{3}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\frac{x^4}{l^4}-\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$$

הזוויות בנקודות A ; B: $\varphi_A=\varphi_B=\frac{ql^3}{192EI}$



16. הריאקציות בנקודות A ; B: $V_A=V_B=\frac{ql}{4}$

מומנט המקסימלי: $M_{\max}=\frac{ql^2}{12}$

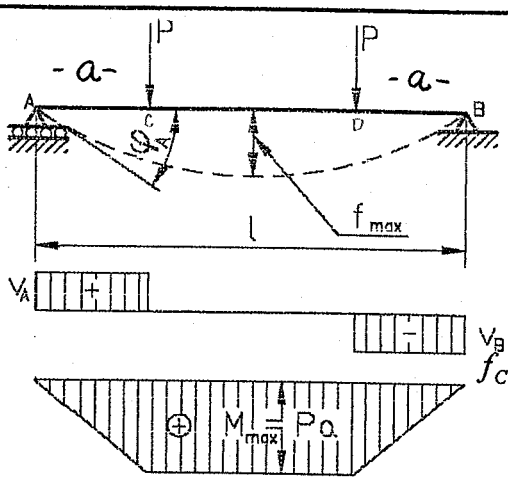
משוואת המומנט: $M_{AC}=\frac{qlx}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$

הזוויות בנקודות A ; B: $\varphi_A=\varphi_B=\frac{5ql^3}{192EI}$

שקיע מקסימלית: $f_{\max}=\frac{ql^4}{120EI}$

משוואת הקו האלסטי:

$$y_{AC}=\frac{ql^4}{12EI}\left(\frac{5}{8}\frac{x}{l}-\frac{x^3}{l^3}+\frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right)$$



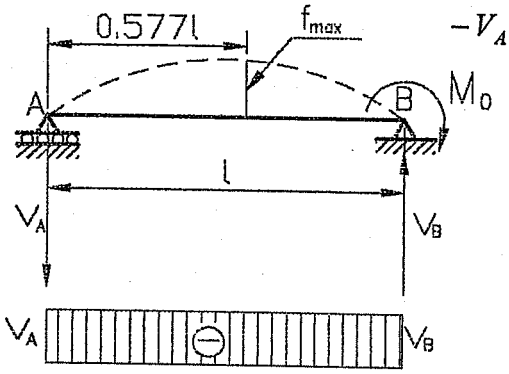
17. הריאקציות בנקודות A ; B: $V_A = V_B = P$

מומנט המקסימלי: $M_{max} = Pa$

הזויות בנקודות A ; B: $\varphi_A = \varphi_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$

השקיעות בנקודות A ; B: $f_C = f_D = \frac{Pa^2 l}{6EI}\left(3 - 4\frac{a}{l}\right)$

שקיע מקסימלית: $f_{max} = \frac{Pal^2}{24EI}\left(3 - 4\frac{a^2}{l^2}\right)$



18. הריאקציות בנקודות A ; B: $-V_A = V_B = \frac{|M_0 l|}{l}$

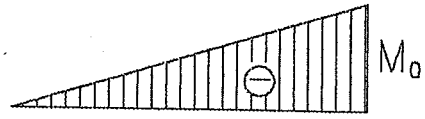
משוואת המומנט: $M = M_0 \frac{x}{l}$

הזוית בנקודה A: $\varphi_A = -\frac{M_0 l}{6EI}$

הזוית בנקודה B: $\varphi_B = \frac{M_0 l}{3EI}$

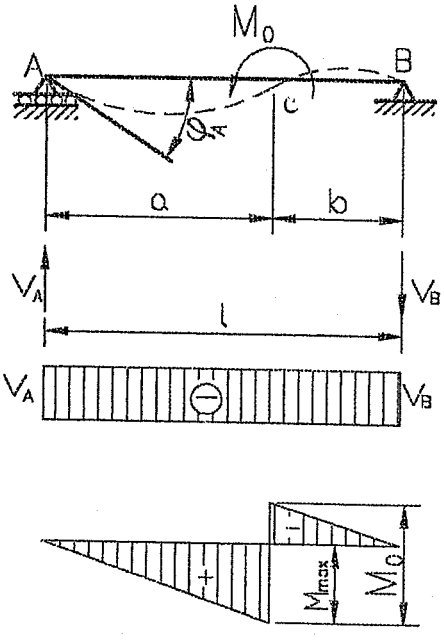
שקיעה מקסימלית: $f_{max} \cong -\frac{1}{15.6}\frac{|M_0| l^2}{EI}$

שקיעה מקסימלית כאשר: $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$



משוואת הקו האלסטי: $y = -\frac{|M_0| lx}{6EI}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$

השקיעה באמצעה קורה: $f_m = -\frac{1}{16}\frac{|M_0| l^2}{EI}$



19. הריאקציות בנקודות A ; B: $V_A = -V_B = \frac{M_0}{l}$

מומנט המקסימלי: $M_{max} = \frac{M_0 a}{l}$

הזוית בנקודה A: $\varphi_A = \frac{M_0}{2l^2 EI}\left[a^2\left(b + \frac{a}{3}\right) - \frac{2}{3}b^3\right]$

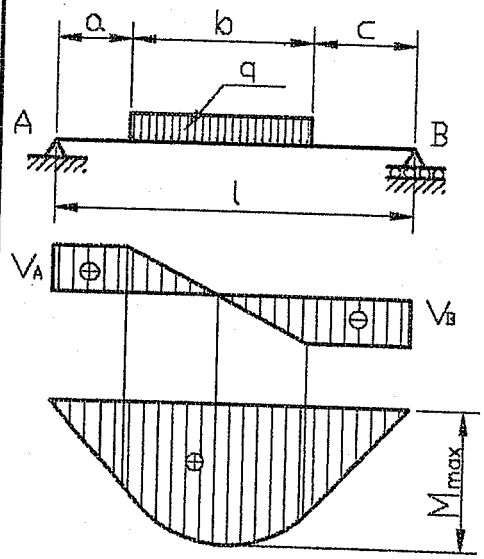
הזוית בנקודה B: $\varphi_B = \frac{M_0}{2l^2 EI}\left[\frac{2}{3}a^3 - b^2\left(a + \frac{b}{3}\right)\right]$

כאשר: $a = b$; $f_{max} = f_{x=\frac{l}{4}} = \frac{M_0 l^2}{128EI}$

המשך מיקרה 19:

משוואת קו האלסטי: $y_{AC}=\frac{M_0 x}{2l^2 EI}\left[a^2\left(b+\frac{a}{3}\right)-\frac{2}{3}b^2\right]-\frac{M_0 x^3}{6lEI}$

C- נקודת מעבר.



20. הריאקציות בנקודות A ; B:

$$V_A=\frac{qb(b+2c)}{2l} \qquad V_B=\frac{qb(2a+b)}{2l}$$

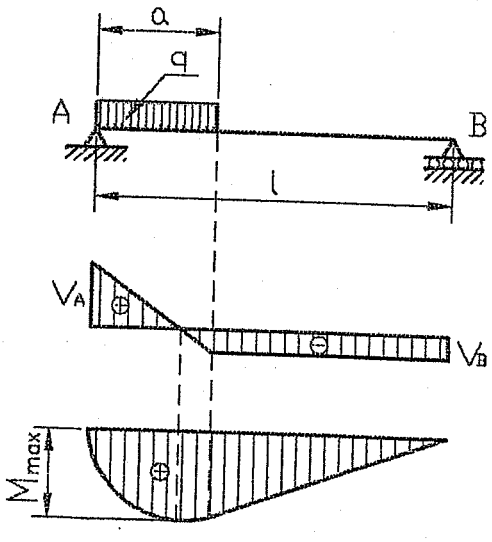
מומנט המקסימלי: $M_{\max}=V_A\eta-\frac{qb(\eta-a)^2}{2l}$;

$$\eta=a+\frac{V_A}{q}\ ;$$

כאשר: $a=c$; $V_A=V_B=\frac{qb}{2}$

מומנט המקסימלי: $M_{\max}=\frac{qb}{4}\left(l-\frac{b}{2}\right)$

שקיעה מקסימלית: $f_{\max}=f_m=\frac{qbl^3}{384EI}\left(8-4\frac{b^2}{l^2}+\frac{b^3}{l^3}\right)$



21. הריאקציות בנקודות A ; B:

$$V_A=qa\frac{2l-a}{2l} \ ; \ V_B=qa\frac{a}{2l}$$

מומנט המקסימלי:

$$M_{\max}=\frac{qa^2}{2}\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2=\alpha qal$$

<u>כאשר</u> $a=\frac{2}{3}l$, מתקבל $\alpha_{\max}$ ז"א $M_{\max\max}$.

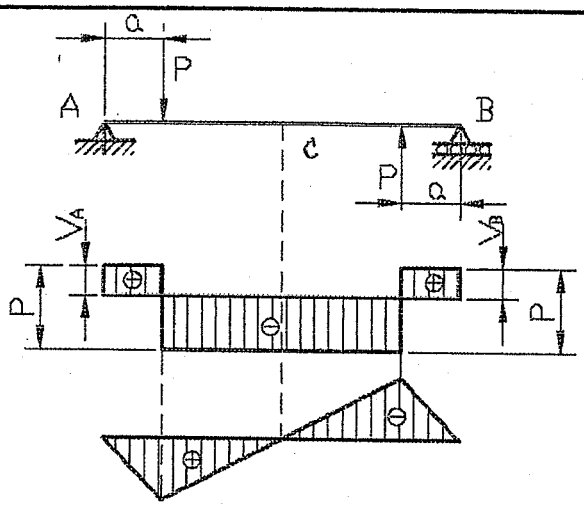
<u>כאשר</u> $a=\frac{l}{2}$:

הזווית בנקודה A : $\varphi_A=\frac{3qal^2}{64EI}$

הזווית בנקודה B: $\varphi_B=\frac{7qal^2}{192EI}$

שקיעה מקסימלית: $f_{\max}=\frac{5}{768}\frac{ql^4}{EI}$

המקרה $a=\frac{1}{2}l$ מתקבל גם מתוך סיכום מס' 13 ו23.



22. הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A = P\left(1-\frac{2a}{l}\right) = -V_B$$

מומנט המקסימלי :

$$M_{\max} = -M_{\min} = Pa\left(1-\frac{2a}{l}\right)$$

הערות:

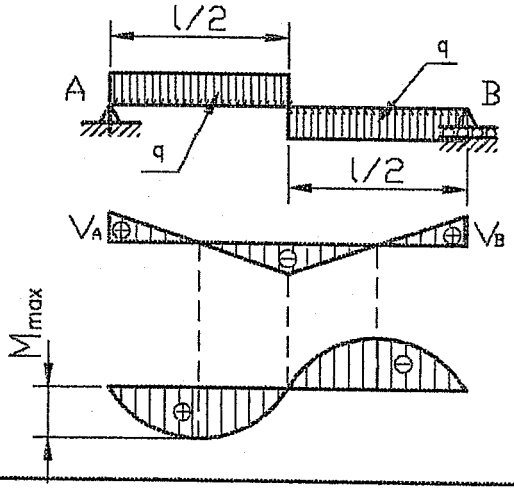
מצב העמיסה - אנטי סימטרי

מהלך M - אנטי סימטרי

קו אלסטי - אנטי סימטרי

זייא החלק AC (וBC) פועל כמו קורה על שני שמכים.

משפטשים פי 12 וכקוו מקום שכתוב l, מלויים ב- $\frac{l}{2}$



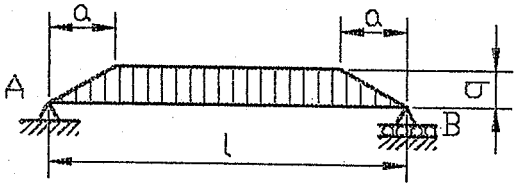
23. הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A = -V_B = \frac{1}{4}ql$$

מומנט המקסימלי :

$$M_{\max} = -M_{\min} = \frac{ql^2}{32}$$

ראה הערות במקרה הקודם מסי 22.



24. הריאקציות בנקודות A, B:

$$Q = q(l-c) \quad ; V_A = V_B = \frac{1}{2}Q$$

מומנט המקסימלי :

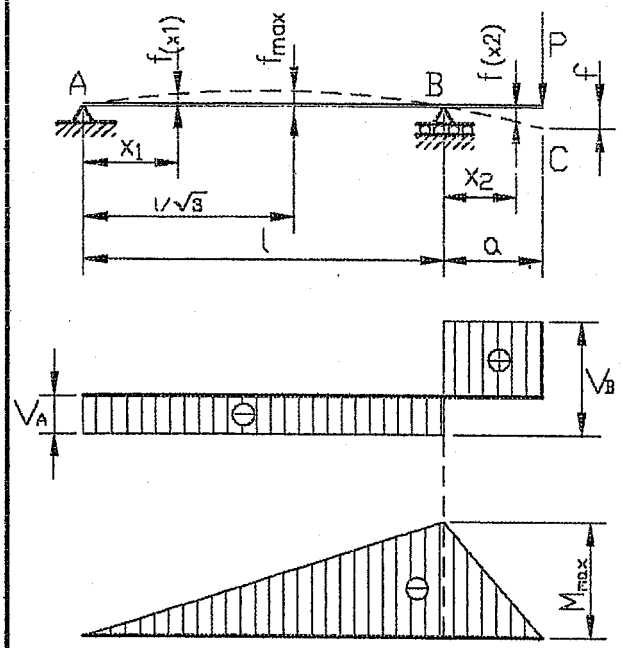
$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} - \frac{qa^2}{6}$$

הזוויות בנקודות A וB :

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{ql^3}{24EI}\left(1-2\frac{a^2}{l^2}+\frac{a^3}{l^3}\right) \quad \text{כאשר} \quad x = \frac{l}{2}$$

שקיעה מקסימלית:

$$f_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI}\left(1-\frac{8}{5}\frac{a^2}{l^2}+\frac{16}{25}\frac{a^4}{l^4}\right) \quad \text{כאשר} \quad x = \frac{l}{2}$$



25. הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A = -\frac{Pa}{l} \quad ; \quad V_B = \frac{P(l+a)}{l}$$

מומנט המקסימלי : $M_{max} = -Pa$

<u>זוויות:</u>

בנקודה A: $\varphi_A = -\frac{Pal}{6EI}$

בנקודה B: $\varphi_B = -\frac{Pal}{3EI}$

בנקודה C: $\varphi_C = \frac{P}{6EI}\left(2la + 3a^2\right)$

משוואת קו האלסטי בקטע AB:

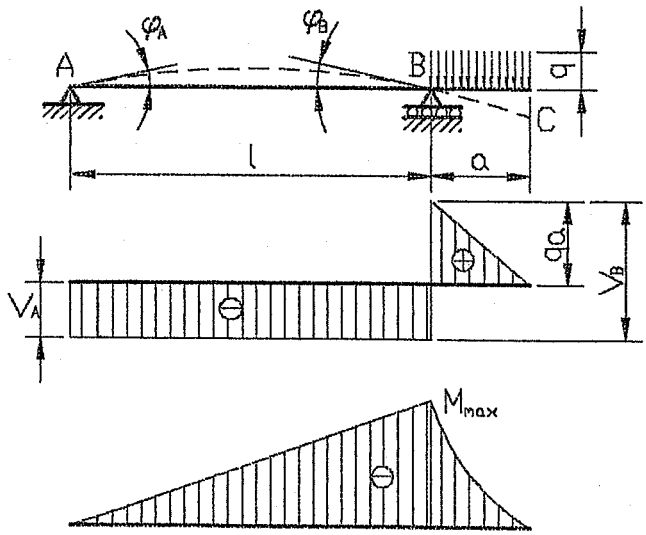
כאשר: $x_1 \le l$ $f(x_1) = \frac{Pl^3}{6EI}\frac{a}{l}\frac{x_1}{l}\left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)$

משוואת קו האלסטי בקטע BC:

כאשר: $x_2 \le a$ $f(x_2) = \frac{Pl^3}{6EI}\frac{x_2}{l}\left(\frac{2a}{l} + \frac{3a}{l}\frac{x_2}{l} - \frac{x_2^2}{l^2}\right)$

<u>שקיעות:</u> - בנקודה C: $f = \frac{Pa^2(l+a)}{3EI}$

שקיעה מקסימלית: $f_{max} = -0.0642\frac{Pal^2}{EI}$ במרחק $0.577l$ מהנקודה A.



26. הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A = -\frac{qa^2}{2l} \quad ; \quad V_B = q\left(a + \frac{a^2}{2l}\right).$$

מומנט המקסימלי : $M_B = -\frac{qa^2}{2}$

<u>זוויות:</u>

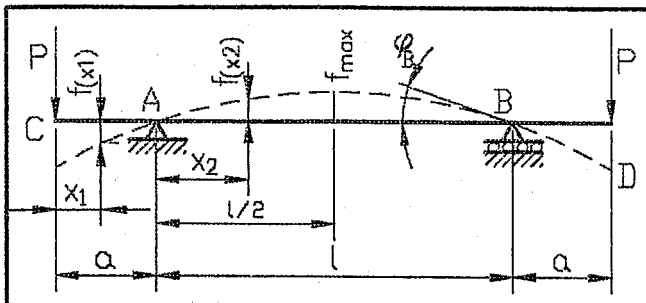
- בנקודה A: $\varphi_A = -\frac{qa^2l}{12EI}$

- בנקודה B: $\varphi_B = -\frac{qa^2l}{6EI}$

- בנקודה C: $\varphi_C = \frac{qa^2}{6EI}(a+l)$

<u>שקיעות:</u> - בנקודה C: $f_C = \frac{qa^3(4l+3a)}{24EI}$; בשדה A B שקיעה מקסימלית:

$f_{max} = -0.0321\frac{qa^2l^2}{EI}$ במרחק $0.577l$ מהנקודה A.



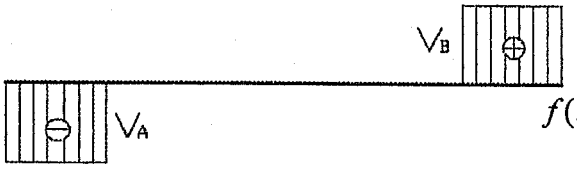
27 הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A = V_B = P$$

מומנט המקסימלי: $M_{\max} = -Pa$

הזוויות בנקודות A, B:

$$\varphi_A = \varphi_B = -\frac{Pal}{2EI}$$

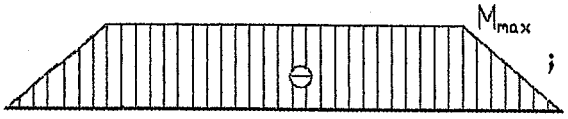


משוואת קו האלסטי בשדה AC; BD:

$$f(x_1) = \frac{Pl^3}{2EI}\left(\frac{x_1^3}{3l^3} - \frac{a}{l}\left(1+\frac{a}{l}\right)\frac{x_1}{l} + \frac{a^2}{l^2}\left(1+\frac{2a}{3l}\right)\right)$$

עבור: $x_1 \le a$;

משוואת קו האלסטי בשדה AB:



$$f(x_2) = \frac{Pl^3}{2EI}\frac{a}{l}\frac{x_2}{l}\left(1-\frac{x_2}{l}\right) \quad \text{עבור} \quad 0 \le x_2 \le l$$

שקיעה באמצע שדה A B:

$$f_{\max} = -\frac{Pl^2 a}{8EI}$$

השקיעות בנקודות C ו D:

$$f_C = f_D = \frac{Pa^2}{3EI}\left(a+\frac{3}{2}l\right)$$

28 הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A = \frac{q\left(l^2-a^2\right)}{2l}; \qquad V_B = \frac{q(l+a)^2}{l}$$

- מומנט המקסימלי: $M_{\max} = \frac{q\left(l^2-a^2\right)^2}{8l^2}$

כאשר $x = \frac{l^2-a^2}{2l}$

- הזווית בנקודה A:

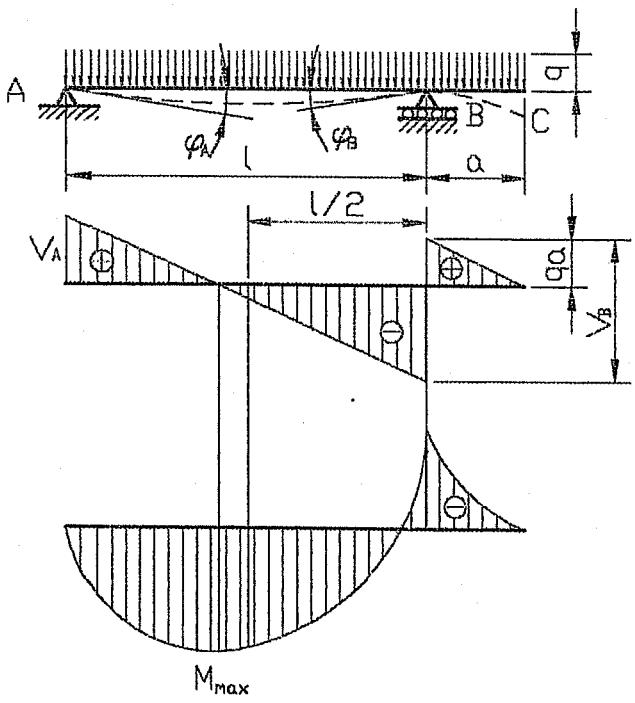
$$\varphi_A = \frac{ql^3}{24EI} - \frac{qa^2 l}{12EI}$$

- הזווית בנקודה B:

$$\varphi_B = \frac{qa^2 l}{6EI} - \frac{ql^3}{24EI}$$

- השקיע בנקודה C:

$$f_C = \frac{qa^4}{8EI} + \frac{qa^3 l}{6EI} - \frac{qal^3}{24EI}$$

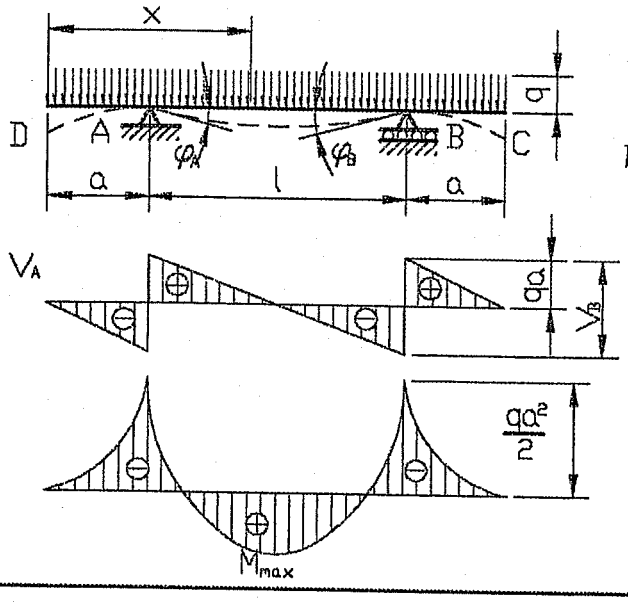


$0 \le x \le l$ כאשר

$$f(x) = \frac{q(x)}{24EI}\left[l^3 - 2lx^2 + x^3\right] - \frac{qa^2 lx}{12EI}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

משוואת קו האלסטי בקטע AB : (המשך של מיקרה 28)

$$y_{AB}=\frac{qx}{24EI}\left(l^3-2lx^2+x^3\right)-\frac{qa^2lx}{12EI}\left(1-\frac{x^3}{l^3}\right)$$



29. הריאקציות בנקודות A, B:

$$V_A=V_B=\frac{1}{2}q(l+2a)=\frac{1}{2}Q \quad Q=q(l+2a)$$

משוואת המומנט בקטע AB:

$$M_{AB}=\frac{Qx}{2}\left(1-\frac{a}{x}-\frac{x}{L}\right)$$

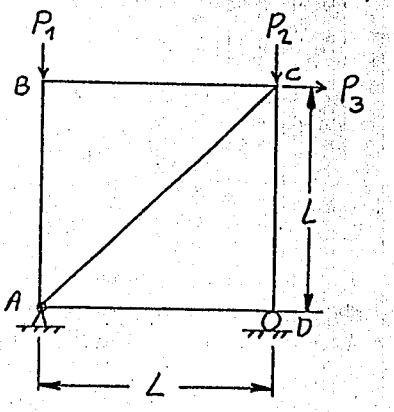
השקיעה באמצע קורה:

$$f_m=\frac{5ql^4}{384EI}-\frac{qa^2l^2}{16EL}$$

השקעות של הנקודות C ו-D:

$$f_C=f_D=-\frac{qa}{24EI}\left(l^3-6a^2l-3a^3\right)$$

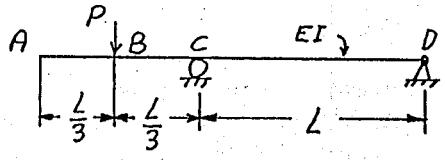
1. For the pin-connected truss loaded as shown (where AE is the same for all members) determine, by means of Castigliano's second theorem :



(a) the vertical displacement of point B,
(b) the horizontal displacement of point C,
(c) the vertical displacment of point C.

Answers : (a) $\frac{P_1 L}{AE}$, (b) $[P_2 + (1+2\sqrt{2})P_3] \frac{L}{AE}$, (c) $(P_2+P_3) \frac{L}{AE}$

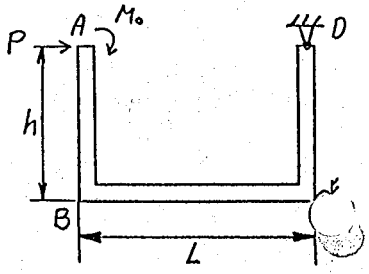
2. By means of Castigliano's Second Theorem, determine (in terms of E, I, L and P), for the linear elastic beam shown :



(a) the vertical displacement of point B.
(b) the vertical displacement of point A.
(c) the rotation of point A.

Answers : (a) $\Delta_B = \frac{4PL^3}{81EI} \downarrow$, (b) $\Delta_A = \frac{17PL^3}{162EI} \downarrow$, (c) $\theta_A = \frac{PL^2}{6EI}$ ↻

3. An elastic structural member ABCD, pinned at C and D, is subjected to an applied moment M_0 at A and a horizontal force P.



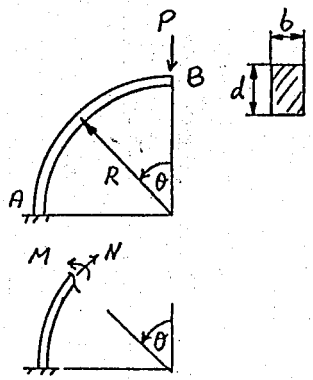
(a) Using Castigliano's theorem, determine the horizontal component of displacement of point A in terms of M_0, P, E, I, L and h. Consider only flexural effects.

(b) From the answer to part (a) above, determine the angle which member AB makes with the vertical at point A due to a horizontal force P = 1 applied at A.

Answer : (a) $\Delta_A = \frac{1}{EI}\left[\frac{M_0 h}{6}(5h+6L) + \frac{Ph^2}{3}(3L+2h)\right]$

4. For a curved beam whose lateral dimensions are small with respect to the radius of curvature, the flexural and normal strain energy may be expressed as

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\,ds + \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{AE}\,ds$$



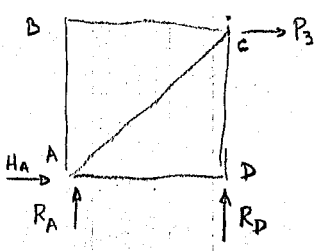
where A and I are the area and moment of inertia of the cross section and where $M = M(\theta)$, $N = N(\theta)$ are the moments and axial forces at a cross-section.

Note : The above integrals represent the elastic strain energy due to flexural and axial deformation respectively.

(a) Using Castigliano's theorem, determine the horizontal component of deflection of point B due to a vertical load.

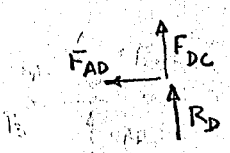
Answer : $\Delta_B = \frac{PR^3}{2EI} - \frac{PR}{2AE}$

$m = 2j-3$ מקיים את התנאי



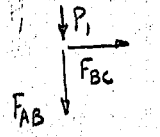
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow H_A=-P_3$
$\Sigma M_A=0 \Rightarrow R_D=P_2+P_3$
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow R_A=P_1-P_3$

התגובות שווי המסך ושווי המנוע



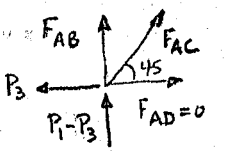
בצומת D

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow 0=F_{AD}$ לכן
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow (-P_2-P_3)=-R_D=F_{DC}$



בצומת B

$\Sigma F_x=0 \Rightarrow 0=F_{BC}$ לכן
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow -P_1=F_{AB}$



בצומת A

$P_3 = F_{AC}\cos 45$ לכן $\Leftarrow$ $F_{AC}=\sqrt{2}P_3$
$0=+(P_1-P_3)+F_{AB}+F_{AC}\sin 45$ //

$$U_c=\sum\frac{F_i^2 l_i}{2A_iE_i}=\frac{1}{2AE}\left\{P_1^2L+0^2L+(P_2+P_3)^2L+0^2\cdot L+(\sqrt{2}P_3)^2\sqrt{2}L\right\}$$

צ"ל U_c לפי P_1 נותנת את התזוזה בנקודה B בכיוון P_1

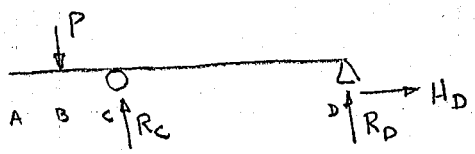
$$\frac{\partial U_c}{\partial P_1}=U_B=\frac{1}{AE}(P_1L)\downarrow$$

צ"ל U_c לפי P_2 נותנת את התזוזה בנקודה C בכיוון P_2

$$\frac{\partial U_c}{\partial P_2}=U_c=\frac{1}{AE}(P_2+P_3)L\downarrow$$

$$\frac{\partial U_c}{\partial P_3}=U_3=\frac{1}{AE}\left[(P_2+P_3)L+(\sqrt{2}P_3\cdot\sqrt{2}L)\cdot\sqrt{2}\right]=\frac{1}{AE}\left[P_2L+P_3L(1+2\sqrt{2})\right]\rightarrow$$

2.

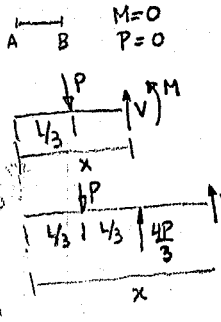


$\Sigma F_x=0 \Rightarrow 0=H_D$ לכן
$\Sigma M_C=0 \Rightarrow R_D=-\frac{P}{3}$
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow R_C=4P/3$

$$U_c=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{M^2}{2EI}dx$$

$$=\int_0^{L/3}\frac{M^2}{2EI}dx+\int_{L/3}^{2L/3}\frac{M^2}{2EI}dx+\int_{2L/3}^{5L/3}\frac{M^2}{2EI}dx$$

$$U_c=0+\int_{L/3}^{2L/3}\frac{P^2}{2EI}(x-L/3)^2dx+\int_{2L/3}^{5L/3}\frac{\left[P\left(\frac{x}{3}-\frac{5L}{9}\right)\right]^2}{2EI}dx$$



$0\le x\le L/3$

$L/3\le x\le 2L/3$ $\quad V=P$, $M=-P(x-L/3)$

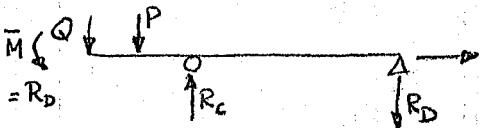
$2L/3\le x\le 5L/3$ $\quad V=-P/3$, $M=-P(x-L/3)+\frac{4P}{3}(x-2L/3)=\frac{P}{3}x-\frac{5PL}{9}$

$$\frac{\partial U_c}{\partial P}=U_B=\frac{P}{EI}\int_{L/3}^{2L/3}(x-L/3)^2dx+\frac{P}{EI}\int_{2L/3}^{5L/3}\left(\frac{x}{3}-\frac{5L}{9}\right)^2dx$$

$$=\frac{P}{EI}\left\{\frac{(x-L/3)^3}{3}\Big|_{L/3}^{2L/3}+\left(\frac{x}{3}-\frac{5L}{9}\right)^3\Big|_{2L/3}^{5L/3}\right\}=\frac{P}{EI}\left\{\frac{L^3}{81}-\left(\frac{-L^3}{27}\right)\right\}=\frac{4PL^3}{81}$$

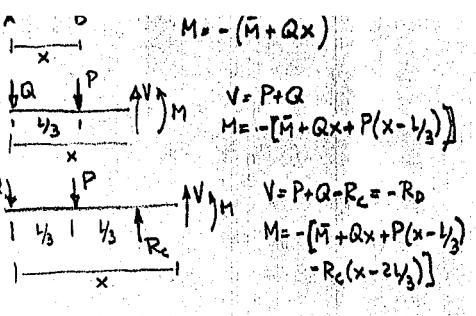
התזוזה בכיוון P לכן ↓

כדי למצוא את התזוזה והסיבוב בנקודה A, צריך לשים כוח וזוג כוחות שהם וירטואליים



$\Sigma F_x=0 \Rightarrow H_D=0$
$\Sigma M_C=0 \Rightarrow \frac{\bar{M}}{L}+\frac{2Q}{3}+P/3=R_D$

$$= \int_0^{L/3} \frac{(\bar M+Qx)^2}{2EI}dx + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{[\bar M+Qx+P(x-L/3)]^2}{2EI}dx + \int_{2L/3}^{5L/3} \frac{[\bar M+Qx+P(x-L/3)-R_c(x-2L/3)]^2}{2EI}$$



כדי לקבל את התגובה בנקודה A, קח $\bar M = 0$ ומצא את U_c

$$U_c = \int_0^{L/3} \frac{Q^2x^2dx}{2EI} + \int_{L/3}^{2L/3} \frac{[Qx+P(x-L/3)]^2dx}{2EI} + \int_{2L/3}^{5L/3} \frac{\left[\frac{-2Q}{3}x + \frac{10QL}{9} - \frac{Px}{3} + \frac{5PL}{9}\right]^2dx}{2EI}$$

$$u_A = \lim_{Q\to 0}\frac{\partial U_c}{\partial Q} = \int_0^{L/3}\frac{Qx^2dx}{EI} + \int_{L/3}^{2L/3}\frac{P(x-L/3)xdx}{EI} + \int_{2L/3}^{5L/3}\frac{\left[-\frac{Px}{3}+\frac{5PL}{9}\right]\left(-\frac{2x}{3}+\frac{10L}{9}\right)dx}{EI}$$

$$= \frac{P}{EI}\left(x^3/3 - \frac{Lx^2}{6}\right)_{L/3}^{2L/3} + \frac{P}{EI}\left[+\frac{2x^3}{27} - \frac{10x^2L}{27} + \frac{50L^2x}{81}\right]_{2L/3}^{5L/3} = \frac{P}{EI}\left(\frac{8L^3}{81} - \frac{4L^3}{54} - \frac{L^3}{81} + \frac{L^3}{54}\right) + \frac{P}{EI}\left(\frac{250L^3}{729} - \frac{250L^3}{27\cdot9} + \frac{250L^3}{243} - \frac{16L^3}{729} + \frac{40L^3}{243} - \frac{100L^3}{243}\right)$$

$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{7L^3}{81} - \frac{1}{18}L^3\right) + \frac{P}{EI}\left(\frac{234}{729}L^3 - \frac{60}{243}L^3\right) = \frac{PL^3}{EI}\left(\frac{7}{81} + \frac{6}{81} - \frac{1}{18}\right)$$

$$= \frac{PL^3}{EI}\left(\frac{13}{9\cdot9} - \frac{1}{9\cdot2}\right) = \frac{PL^3}{EI}\frac{17}{162}\downarrow$$

כדי לקבל את הזווית בנקודה A, קח $Q = 0$ ומצא את U_c

$$U_c = \int_0^{L/3}\frac{\bar M^2dx}{2EI} + \int_{L/3}^{2L/3}\frac{\left[\bar M + P(x-L/3)\right]^2}{2EI}dx + \int_{2L/3}^{5L/3}\frac{\left[\bar M\left(\frac{5}{3}-\frac{x}{L}\right) - \frac{Px}{3} + \frac{5PL}{9}\right]^2}{EI}dx$$

$$\theta_A = \lim_{\bar M\to 0}\frac{\partial U_c}{\partial \bar M} = \int_0^{L/3}\frac{\bar M dx}{EI} + \int_{L/3}^{2L/3}\frac{P(x-L/3)dx}{EI} + \int_{2L/3}^{5L/3}\frac{\left(-\frac{Px}{3}+\frac{5PL}{9}\right)\left(\frac{5}{3}-\frac{x}{L}\right)dx}{EI}$$

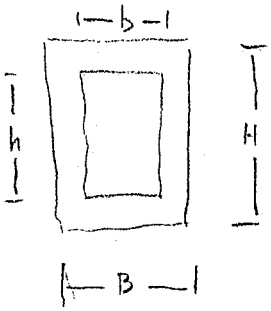
$$= \frac{P}{EI}\frac{(x-L/3)^2}{2}\Big|_{L/3}^{2L/3} + \frac{P}{EI}\left[\frac{-5x^2}{18} + \frac{x^3}{9L} + \frac{25}{27}Lx - \frac{5x^2}{18}\right]_{2L/3}^{5L/3}$$

$$= \frac{P}{EI}\left(\frac{L^2}{18}\right) + \frac{P}{EI}\left(\frac{-5}{9}x^2 + \frac{x^3}{9L} + \frac{25}{27}Lx\right)_{2L/3}^{5L/3} = \frac{PL^2}{18EI} + \frac{PL^2}{EI}\left(\frac{-5}{9}\cdot\frac{25}{9} + \frac{125}{9\cdot27} + \frac{125}{27\cdot3} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9} - \frac{8}{9\cdot27} - \frac{50}{3\cdot27}\right)$$

$$\left(\frac{-105}{9\cdot9} + \frac{117}{9\cdot27} + \frac{25}{27}\right)$$

$$= \frac{PL^2}{18EI} + \frac{PL^2}{EI}\left(\frac{-315+117+225}{27\cdot9}\right) = \frac{PL^2}{18EI} + \frac{PL^2}{EI}\left(\frac{27}{9\cdot27}\right) = \frac{PL^2}{6EI}\downarrow$$

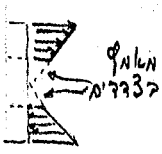
4.78



מומנט האינרציה של החתך הוא

$$\frac{58\cdot88^3}{12} - \frac{30\cdot48^3}{12} = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}$$

$$3.017\times10^6\,mm^4 = I_{zz}$$



$$\sigma = \frac{\sigma_y}{c}\cdot y$$

$$\int_{-H/2}^{H/2}\frac{\sigma_y}{c}\cdot y^2\cdot B\,dy = \frac{\sigma_y}{c}\cdot B\cdot\frac{BH^3}{12} = \frac{\sigma_y}{c}\frac{BH^3}{12}$$

$$-\int_{-h/2}^{h/2}\frac{\sigma_y}{c}\cdot y^2 b\,dy = \frac{\sigma_y}{c}\cdot\frac{bh^3}{12} = \frac{\sigma_y}{c}\frac{bh^3}{12}$$

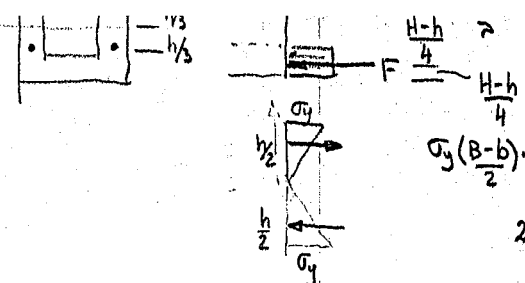
$$M = \frac{\sigma_y}{c}\cdot I_{zz}$$ המומנט הכוחי

$$M = \frac{300\times10^6\,N/m^2\cdot3.017\times10^{-6}\,m^4}{.044\,m}$$

$$\boxed{M = 20.573\,kN\text{-}m}$$

המומנט הכוחי

$$\boxed{29.33\,m} = \frac{200\times10^9\,N/m^2\cdot3.017\times10^{-6}\,m^4}{20572.5\,N\text{-}m} = \frac{EI}{M}$$ רדיוס העקמומיות הוא



התוספת הראשון והשלישי הוא $\pm\sigma_y(\frac{h}{2})B$ ומהווים $\frac{h}{3}$ מגובה המשולש.

בדומה המומנטים ביחס לציר הנקודתי $\frac{h}{2}\cdot\sigma_y(B-b)$ מגובה המלבן, מלמעלה ומלמטה. כל כוח הוא $\frac{h}{4}$

לכן המומנט הוא $2\left\{\frac{2h}{3}\cdot\sigma_y(B-b)\frac{h}{2}+\left\{H-(\frac{H-h}{2})\right\}\cdot\sigma_y(H-h)B\right\}$

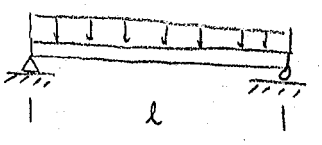
$$\sigma_y\left\{\frac{4h^2(B-b)}{24}+\frac{H+h}{2}\left(\frac{H-h}{2}\right)B\right\}=\sigma_y\cdot 89632\,mm^3=300\times10^6\frac{N}{m^2}\,(89632\times10^{-9}m^3)$$

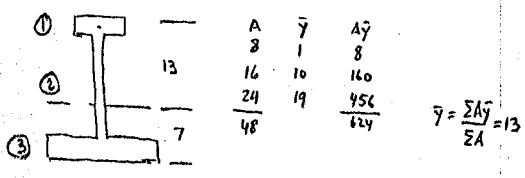
$$\boxed{M=26889.6\,N\text{-}m}$$

הרדיוס הוא $\frac{EI}{M}$, שבו I הוא רק של החלק העליון, בשל אומית I_{zz} של החלק העליון, $\frac{Bh^3}{12}-\frac{bh^3}{12}=258048\,mm^4$, והמומנט הוא רק של החלק העליון, $3225.6\,N\text{-}m=\frac{\sigma_y\cdot4h^2(B-b)}{24}$

לכן, הרדיוס הוא $\frac{EI}{M}=\frac{200\times10^9\frac{N}{m^2}\times.25805\times10^{-6}m^4}{3225.6\,N\text{-}m}=\boxed{16\,m}$

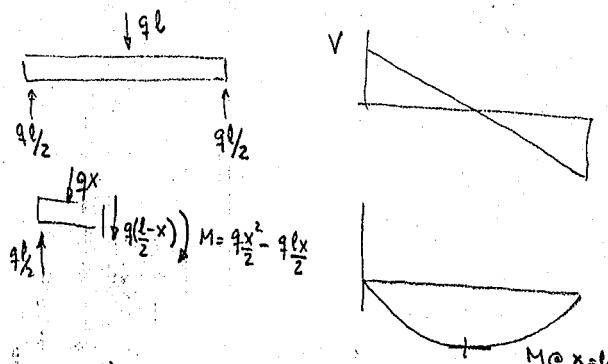
2.16





	A	$\bar{y}$	$A\bar{y}$
①	8	1	8
②	16	10	160
③	24	19	456
	48		624

$\bar{y}=\frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}=13$



$M=\frac{qx^2}{2}-\frac{q\ell x}{2}$

$M@x=\ell/2$

לכן המומנט המקסימלי הוא $\frac{q\ell^2}{8}$

תיאור I_{zz}

	I_{zz_o}	A	d^2	I_{zz}
①	$4\cdot2^3/12$	8	$(12)^2$	1154.67
②	$1\cdot16^3/12$	16	$(3)^2$	485.33
③	$12\cdot2^3/12$	24	$(-6)^2$	872
				$2512\,cm^4$

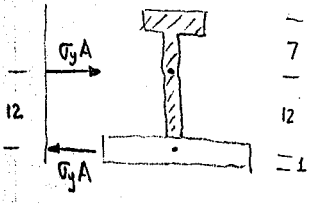
לפי שיטת אלסטית $\sigma_y=\frac{M\cdot c}{I_{zz}}$

$$\frac{\frac{q\ell^2}{8}\cdot.13m}{2512\times10^{-8}m^4}=\frac{(240\times10^6)(2512\times10^{-8})8}{(0.13)(4)^2}=\frac{8\cdot\sigma_y I_{zz}}{c\,\ell^2}=q$$

$$\boxed{q=23187.69\,N/m}$$

והמומנט $\frac{q\ell^2}{8}=46375.4\,N\text{-}m$

לפי שיטת פלסטית כל השטח נחלק לשניים והציר הנטרלי בדומה



חלק ② וחלק ③. מרכז הכובד של חלק ① + ② הוא $1\cdot12cm$ מהמרכז הכובד של חלק ③. המומנט הוא $12cm\cdot\sigma_y\cdot24cm^2=\frac{q\ell^2}{8}$

לכן $q=8\cdot\sigma_y\cdot288\times10^{-6}m^3\frac{1}{\ell^2}=\frac{(8)(240\times10^6)288\times10^{-6}}{4^2}=\boxed{q=34560\,N/m}$

והמומנט שווה ל $\frac{q\ell^2}{8}=69120\,N\text{-}m$

לכן $\frac{\text{שיטת פלסטית}}{\text{שיטת אלסטית}}=1.49$

CONCEPT OF ELASTIC STRAIN ENERGY

- DEFORMATION OF BODY UNDER EXTERNAL LOADS - LOADS DO WORK
- ASSUME - NO KINETIC OR HEAT EXCHANGE
  - GRADUAL INCREASE IN LOAD FROM INITIAL TO FINAL STATE
  - CONSERVATION OF ENERGY ⇒ STRAIN ENERGY IS POTENTIAL ENERGY
- FROM STATICS REMEMBER IF $\vec{F}$ CONSTANT OR NOT...

  WORK DONE ON UNIT VOLUME IS $\vec{F} \cdot d\vec{x} = \bar{\sigma} A \cdot d\bar{\epsilon}\, l = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon}\,(AL)$
- TOTAL WORK DONE BY FORCE IS STORED AS STRAIN ENERGY GIVEN BY

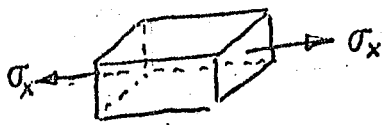
$$\int_V \left[\int \bar{\sigma} \cdot d\bar{\epsilon} \right] dV = \int_V \left[\frac{\sigma^2}{2E} \right] dV = \int_V \left[\frac{E}{2} \epsilon^2 \right] dV = \int \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{\epsilon}}{2} dV$$

- REMEMBER WORK IS ADDITIVE AND DEPENDS ON FINAL & INITIAL STATES AND NOT ON PATH BETWEEN STATES
- IF WE HAVE A BODY THAT OBEYS HOOKE'S LAW AND WE APPLY A... FORCE IN THE X-DIRECTION ONLY

$$\sigma_x = E\epsilon_{x_1}, \quad \epsilon_{y_1} = -\nu\epsilon_{x_1}, \quad \epsilon_{z_1} = -\nu\epsilon_{x_1}$$

ν - POISSON RATIO

- SINCE σ_x, ϵ_{x_1} ARE PARALLEL TO EACH OTHER, WORK IS DONE
- SINCE σ_x, ϵ_{y_1} OR ϵ_{z_1} ARE $\perp$ TO EACH OTHER, NO WORK DONE
- WORK DUE TO σ_x IS $\int \frac{\sigma_x \epsilon_{x_1}}{2} dV$



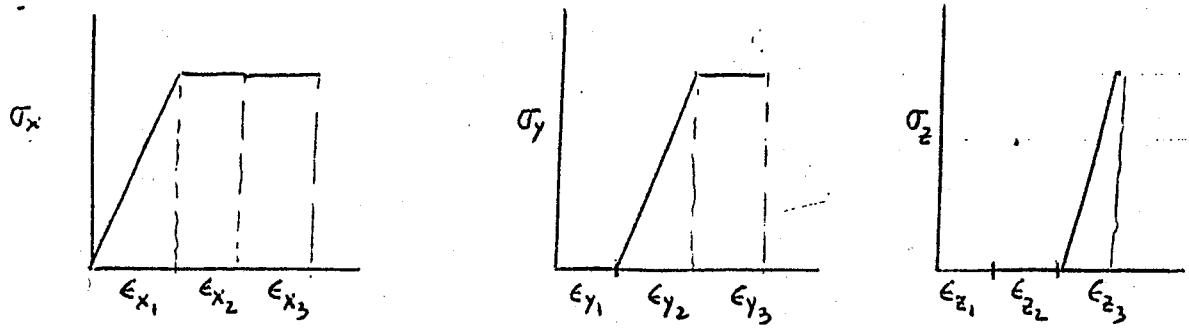
- IF WE NOW APPLY TO THIS STATE AN ADDITIONAL FORCE IN THE Y-DIRECTION KEEPING σ_x FIXED

$$\sigma_y = E\epsilon_{y_2} \qquad \epsilon_{x_2} = -\nu\epsilon_{y_2} \qquad \epsilon_{z_2} = -\nu\epsilon_{y_2}$$

- SINCE σ_y, ϵ_{y_2} ARE PARALLEL, WORK IS DONE
- SINCE σ_y, ϵ_{x_2} OR ϵ_{z_2} ARE $\perp$ TO EACH OTHER, NO WORK DONE
- BUT σ_x FROM BEFORE DOES DO WORK DUE TO ϵ_{x_2} ...

- THUS ADDITIVE WORK DUE TO σ_y IS

$$\int_V \left[\frac{\sigma_y \epsilon_{y_2}}{2} + \sigma_x \epsilon_{x_2} \right] dV$$



- SIMILARLY IF WE APPLY A FORCE IN THE Z DIRECTION ONLY KEEPING σ_x, σ_y FIXED : $\sigma_z = E\epsilon_{z_3}$, $\epsilon_{x_3} = -\nu\epsilon_{z_3}$, $\epsilon_{y_3} = -\nu\epsilon_{z_3}$
- A SIMILAR ARGUMENT YIELDS THE ADDITIVE WORK DONE

$$\int_V \left[\frac{\sigma_z \epsilon_{z_3}}{2} + \sigma_x \epsilon_{x_3} + \sigma_y \epsilon_{y_3} \right] dV$$

- BY ADDING THE THREE TERMS WE GET THE TOTAL WORK DONE

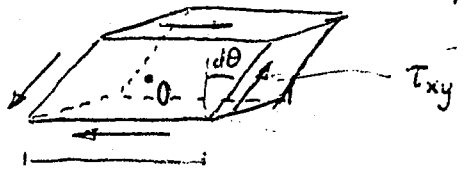
$$\int \left[\frac{\sigma_x \epsilon_{x_1}}{2} + \frac{\sigma_y \epsilon_{y_2}}{2} + \sigma_x \epsilon_{x_2} + \frac{\sigma_z \epsilon_{z_3}}{2} + \sigma_x \epsilon_{x_3} + \sigma_y \epsilon_{y_3} \right] dV$$

- NOTE THAT $\frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_{x_2} = \frac{1}{2}E\epsilon_{x_1} \cdot (-\nu\epsilon_{y_2}) = \frac{1}{2}E\epsilon_{y_2} \cdot (-\nu\epsilon_{x_1}) = \sigma_y \epsilon_{y_1}/2$
- SIMILARLY $\frac{1}{2}\sigma_x \epsilon_{x_3} = \frac{1}{2}\sigma_z \epsilon_{z_1}$ & $\frac{1}{2}\sigma_y \epsilon_{y_3} = \frac{1}{2}\sigma_z \epsilon_{z_2}$

- THUS TOTAL WORK DONE IS $\frac{1}{2}\int \left[\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z \right] dV$

  WHERE $\epsilon_x = \epsilon_{x_1} + \epsilon_{x_2} + \epsilon_{x_3}$, $\epsilon_y = \epsilon_{y_1} + \epsilon_{y_2} + \epsilon_{y_3}$ ...

- LOOK AT SHEAR FORCES THEY DO WORK THRU SHEAR STRAINS $d\gamma$



- CAN DO WORK BY FORCE COUPLE CAUSING BODY TO ROTATE ABOUT AN AXIS THROUGH O
- FROM STATICS WORK DONE BY MOMENT is $\bar{M}\cdot d\bar{\theta} = \bar{T}\ell\cdot d\bar{\theta} = \bar{\tau}A\ell\cdot d\bar{\theta}$
$= \bar{\tau}\cdot d\bar{\gamma}\, A\ell$
- WORK DONE $= \int_V \left[\int \bar{\tau}\cdot d\bar{\gamma}\right] dV$
- FOR A BODY OBEYING HOOKE'S LAW $\int \bar{\tau}\cdot d\bar{\gamma} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{G\gamma^2}{2} = \frac{\tau\cdot\gamma}{2}$
- BY SIMILAR MANNER WORK DONE BY SHEAR FORCES ARE

$$\int_V \left[\frac{\tau_{xy}\gamma_{xy}}{2} + \frac{\tau_{xz}\gamma_{xz}}{2} + \frac{\tau_{yz}\gamma_{yz}}{2}\right] dV$$

- TOTAL WORK DONE DUE TO ALL STRESSES IS SUM OF THE TWO

$$\int_V \frac{1}{2}\left[\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}\right] dV = \int_V U_{s_o}\, dV = U_s$$

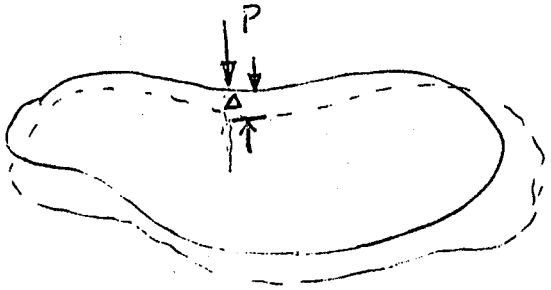
- U_{s_o} IS THE STRAIN ENERGY DENSITY ; ALWAYS ≥ 0
- U_{s_o} IS ZERO ONLY WHEN ALL σ's, ϵ's, τ's AND γ's $= 0$

- NOTE THAT SINCE $dU_{s_o} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}\right)$
AND dU_{s_o} is perfect DIFFERENTIAL, MEANING THAT

$$dU_{s_o} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_{s_o}}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial U_{s_o}}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial U_{s_o}}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial U_{s_o}}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial U_{s_o}}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial U_{s_o}}{\partial \gamma_{yz}}\right)$$

$\Rightarrow \frac{\partial U_{s_o}}{\partial \epsilon_x} = \sigma_x$ AND $\frac{\partial U_{s_o}}{\partial \epsilon_y} = \sigma_y$ ETC.

- SINCE σ IS RELATED TO A LOAD AND ϵ IS RELATED TO A DISPLACEMENT IN THE DIRECTION OF THAT LOAD $\Rightarrow$ WE CAN DETERMINE THE LOAD IF WE KNOW HOW THE STRAIN ENERGY VARIES WITH THE DISPLACEMENT IN THE DIRECTION OF THAT LOAD
- REMEMBER $U_s = V_{s_o}\cdot$ Volume



$$U_s = U_s(\Delta) \Rightarrow \frac{\partial U_s}{\partial \Delta} = P$$

THIS FACT WILL BE USED LATER

- WE HAVE CONSIDERED WORK DONE = $\vec{F} \cdot d\vec{x}$
  IF $\vec{F}$ IS CONSTANT $\vec{F} \cdot d\vec{x} = d(\vec{F} \cdot \vec{x})$ ← MOST GENERAL EXPRESSION FOR WORK
- WHAT IF $\underset{\sim}{X}$ IS NOW CONSTANT AND $\underset{\sim}{F}$ CHANGES ie $d(\vec{F} \cdot \vec{x}) = \vec{x} \cdot d\vec{F}$
  - THIS ALSO CAUSE WORK TO BE DONE

$$d\vec{F} = d\vec{\sigma} \cdot A \qquad \vec{X} = l\vec{\epsilon} \qquad \Rightarrow \vec{x} \cdot d\vec{F} = \vec{\epsilon} \cdot d\vec{\sigma} \quad (lA)$$

- JUST AS BEFORE WE CAN GO THROUGH THE PROCESS AND SHOW THAT

$$\text{TOTAL WORK DONE} = \int_V \frac{1}{2} \int \left(\bar{\epsilon}_x \cdot d\bar{\sigma}_x + \bar{\epsilon}_y \cdot d\bar{\sigma}_y + \bar{\epsilon}_z \cdot d\bar{\sigma}_z + \bar{\gamma}_{xy} \cdot d\bar{\tau}_{xy} + \bar{\gamma}_{xz} \cdot d\bar{\tau}_{xz} + \bar{\gamma}_{yz} \cdot d\bar{\tau}_{yz} \right) dV$$

- THE INNER INTEGRAL IS THE COMPLEMENTARY ENERGY OF THE BODY : U_{co}
  - $dU_{co} = \frac{1}{2}\left(\bar{\epsilon}_x \cdot d\bar{\sigma}_x + \bar{\epsilon}_y \cdot d\bar{\sigma}_y + \bar{\epsilon}_z \cdot d\bar{\sigma}_z + \bar{\gamma}_{xy} \cdot d\bar{\tau}_{xy} + \bar{\gamma}_{xz} \cdot d\bar{\tau}_{xz} + \bar{\gamma}_{yz} \cdot d\bar{\tau}_{yz} \right)$
  - IT IS ALSO A PERFECT DIFFERENTIAL SO THAT

$$dU_{co} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial U_{co}}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial U_{co}}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial U_{co}}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} \right)$$

AND $\frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_x} = \epsilon_x \quad \frac{\partial U_{co}}{\partial \sigma_y} = \epsilon_y$ etc. $\frac{\partial U_{co}}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}$

- HERE IF WE KNOW HOW THE COMPLEMENTARY ENERGY CHANGES AS LOAD CHANGES THE WE CAN FIND THE DISPLACEMENT, DUE TO THAT LOAD, IN DIRECTION OF LOAD

- REMEMBER σ_x CAN BE RELATED TO LOAD IN X-DIRECTION
  ϵ_x CAN BE RELATED TO DISPLACEMENT IN DIRECTION OF LOAD

- WHAT WE SAID ABOUT U_{S_o} & U_{C_o} IS TRUE EVEN IF BODY DOESN'T OBEY HOOKE'S LAW.
- IF BODY IS LINEALY ELASTIC : $U_{C_o} = U_{S_o}$

- NOTE : ALWAYS WRITE U_S IN TERMS OF STRAINS / DISPLACEMENTS
  U_C IN TERMS OF STRESSES / LOADS

- CLARIFY SOME PTS
  - FROM STATICS: BODY WAS RIGID - NO WORK DONE DUE TO INTERNAL LOADS
  - FOR A BODY THAT DEFORMS WORK IS DONE BY INTERNAL FORCES (U_C , U_S)
  - WHAT WE'VE JUST DISCUSSED IS WORK DONE BY INTERNAL FORCES
  - BOTH FOR NON DEFORMABLE & DEFORMABLE BODIES, THE EXTERNAL FORCES ALSO DO WORK
  - THE EXPRESSIONS FOR U_C, U_{C_o} , U_S, U_{S_o} HOLD FOR NON-LINEARLY ELASTIC BODIES AS WELL
  - TOTAL WORK DONE BY BODY THAT HAS EXTERNAL LOADS APPLIED AND UNDERGOES DEFORMATION IS $W_i + W_e = \Pi$

- $$W_e = \int_S (X u + Y v + Z w)\, dS$$

  S - surface of body
  u, v, w - displacements undergone by forces X, Y, Z applied to surface

- ASSUMPTION - : BODY FORCES (LIKE WEIGHT) CAN BE ACCOUNTED FOR THROUGH W_e TERM.
- WHEN AN ELASTIC BODY IS AT REST, THE EXTERNAL FORCES + BODY FORCES + INTERNAL FORCES ARE IN A STATE OF EQUILIBRIUM

- WORK DONE BY THESE THREE SET OF FORCES IS AT A MINIMUM
- THUS $\delta\Pi = \delta W_i + \delta W_e = 0$
- ALSO $\delta W_i = -\delta U_s$ REMEMBER FROM STATICS POTENTIAL ENERGY IS NEGATIVE OF WORK DONE.

- THUS FOR ANY CHANGE IN DISPLACEMENTS OF THE BODY THAT KEEPS IT IN EQUILIBRIUM

$$\delta\Pi/\delta_{displacements} = 0 = -\frac{\delta U_s}{\delta_{displ.}} + \frac{\delta W_e}{\delta_{displ.}}$$

- BUT $\frac{\delta U_s}{\delta_{displ}} = \frac{\delta W_e}{\delta_{displ}}$ = load, due to that displ, IN DIRECTION OF DISPLACEMENTS

- THIS IS CASTIGLIANO'S THEOREM (FIRST)
- SIMILARLY SINCE $\delta W_i = -\delta U_s = -\delta U_c$
- FOR ANY CHANGE IN LOADS OF THE BODY THAT KEEPS IT IN EQUILIBRIUM

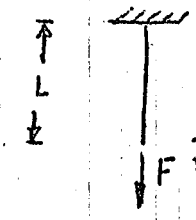
$$\delta\Pi/\delta_{LOADS} = 0 = -\frac{\delta U_c}{\delta_{LOAD}} + \frac{\delta W_e}{\delta_{LOAD}}$$

- BUT $\frac{\delta U_c}{\delta_{LOAD}} = \frac{\delta W_e}{\delta_{LOAD}}$ = DISPL, DUE TO THAT LOAD, IN DIR. OF LOAD

- THIS IS CASTIGLIANO'S THEOREM (SECOND)

→ USING U_c TO DETERMINE DISPLACEMENTS ←

EXAMPLE #1 EXTENSIBLE ROD



$\sigma = F/A$ $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{AE} = \frac{x}{L}$ $U_c = \frac{\sigma^2}{2E}\cdot AL$ $U_s = \frac{E\epsilon^2}{2}\cdot AL$

$U_{c_0}\cdot V$ $U_{s_0}\cdot V$

$= \frac{F^2L}{2EA}$ $= \frac{Ex^2}{2L}A$

THUS $U_c = \frac{F^2L}{2EA}$ $U_s = \frac{Ex^2}{2L}A$

$W_e = Fx$

TO FIND F, ASSUMING X IS KNOWN, DEFINE Π IN TERMS OF U_S & W_e

$$W_i + W_e = \Pi = -\frac{EX^2}{2L}A + FX = -U_S + W_e$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{2EXA}{2L} + F = 0 \qquad F = X\frac{EA}{L} \qquad \left(\frac{\partial U_S}{\partial x} = F\right)$$

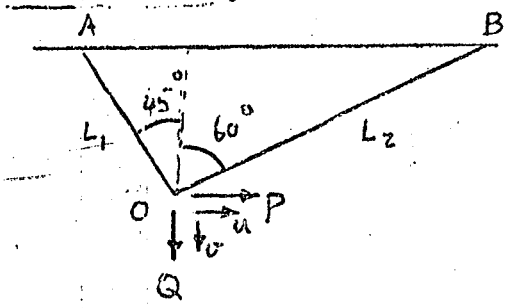
TO FIND X, ASSUMING F IS KNOWN, DEFINE Π IN TERMS OF U_c & W_e

$$W_i + W_e = -U_c + W_e = \Pi = -\frac{F^2L}{2EA} + FX$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F} = -\frac{2FL}{2EA} + X = 0 \qquad X = \frac{FL}{AE} \qquad \left(\frac{\partial U_c}{\partial F} = X\right)$$

* WE WILL LOOK AT TRUSSES WHERE EXTENSION/COMPRESSION IS PRIMARY LOADING

EXAMPLE #2 : TWO-ROD TRUSS

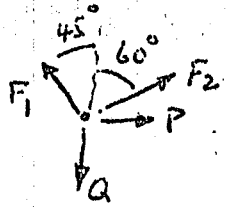


STATICALLY DETERMINATE SYSTEM

LOOK AT TWO BARS CONNECTED AT O, BARS ARE EXTENSIBLE— HAVE THE SAME CROSS SECTION, A, AND YOUNG'S MODULUS, E.

→ WANT TO FIND DISPLACEMENTS u, v GIVEN P AND Q

1) USE STATICS TO FIND FORCES IN OB & OA
2) DETERMINE U_c
3) $\frac{\partial U_c}{\partial P} = u$ $\qquad \frac{\partial U_c}{\partial Q} = v$



$$\left.\begin{aligned} Q &= F_2\cos 60^\circ + F_1\cos 45^\circ \\ P &= F_1\sin 45^\circ - F_2\sin 60^\circ \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} F_1 &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}(P+\sqrt{3}Q) \\ F_2 &= (\sqrt{3}-1)(Q-P) \end{aligned}$$

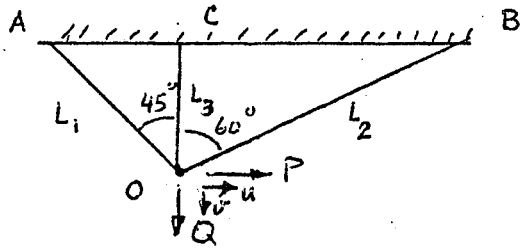
NOTE F_1 & F_2 ARE FNS OF P & Q

$$\text{Now} \quad U_c = \sum\frac{F^2L}{2AE} = \frac{F_1^2L_1}{2AE} + \frac{F_2^2L_2}{2AE} = \frac{1}{2AE}\left\{\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}(P+\sqrt{3}Q)\right]^2L_1^2 + \left[(\sqrt{3}-1)(Q-P)\right]^2L_2^2\right.$$

$$u = \frac{\partial U_c}{\partial P} = \frac{2F_1L_1}{2AE}\frac{\partial F_1}{\partial P} + \frac{2F_2L_2}{2AE}\frac{\partial F_2}{\partial P} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}(P+\sqrt{3}Q)\frac{L_1}{AE}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + (\sqrt{3}-1)(Q-P)\frac{L_2}{AE}\left\{-(\sqrt{3}-1)\right\}$$

$$v = \frac{\partial U_c}{\partial Q} = \frac{2F_1L_1}{2AE}\frac{\partial F_1}{\partial Q} + \frac{2F_2L_2}{2AE}\frac{\partial F_2}{\partial Q} = \frac{L_3}{AE}\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\left(P+\sqrt{3}Q\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)\right\} + \frac{L_2}{AE}\left\{(\sqrt{3}-1)^2(Q-P)\right\}$$

EXAMPLE #3 – INDETERMINATE (STATICALLY) TRUSS



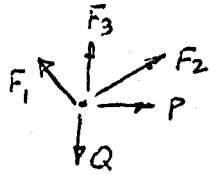
$L_3 = L \qquad L_1 = \sqrt{2}\,L \qquad L_2 = 2L$

GIVEN: A, E SAME FOR ALL THREE

WANT TO FIND DISPLACEMENTS u, v

GIVEN P & Q

STATICALLY INDETERMINATE: 3 FORCES, 2 EQS.



$$Q = F_3 + F_1\cos 45^\circ + F_2\cos 60^\circ$$
$$P = F_1\sin 45^\circ - F_2\sin 60^\circ$$

} NOTE P & Q ARE FNS OF F_1, F_2, F_3

• NOTE THIS WILL GIVE SAME SOLUTION FOR F_1 & F_2 IF $Q - F_3$ REPLACES Q

TO FIND F_3 : 1) FIND U_c FIRST $\qquad U_c = \sum\frac{F^2L}{2AE} = \frac{F_1^2L_1}{2AE} + \frac{F_2^2L_2}{2AE} + \frac{F_3^2L_3}{2AE}$

2) TAKE $\frac{\partial U_c}{\partial F_3} = 0$ THIS GIVES 3RD EQ. NEEDED

$$U_c = \frac{1}{2AE}\left\{\left[\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\left(P+\sqrt{3}\,(Q-F_3)\right)\right]^2L_1^2 + \left[(\sqrt{3}-1)(Q-F_3-P)\right]^2L_2^2 + F_3^2L_3^2\right\}$$

$$\frac{\partial U_c}{\partial F_3} = \frac{F_1L_1}{AE}\frac{\partial F_1}{\partial F_3} + \frac{F_2L_2}{AE}\frac{\partial F_2}{\partial F_3} + \frac{F_3L_3}{AE} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\left[P+\sqrt{3}\,(Q-F_3)\right]\frac{L_1}{AE}\left[-\sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}}\right] +$$

$$+ (\sqrt{3}-1)(Q-F_3-P)\frac{L_2}{AE}\left[-(\sqrt{3}-1)\right] + \frac{F_3L_3}{AE} = 0$$

3) SOLVE FOR F_3 IN TERMS OF KNOWN FORCES P & Q

$$F_3 = -0.01295\,P + 0.6883\,Q$$

4) PUT THIS INTO $F_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\left(P+\sqrt{3}\,(Q-F_3)\right)$; $F_2 = (\sqrt{3}-1)(Q-F_3-P)$

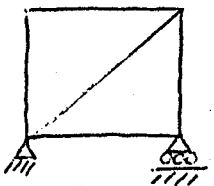
TO FIND F_1 & F_2 IN TERMS OF P & Q

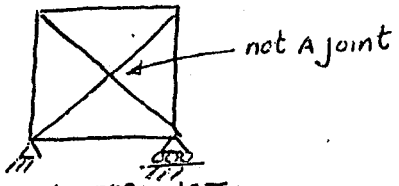
5) TAKE $\frac{\partial U_c}{\partial P}$ TO GET u & $\frac{\partial U_c}{\partial Q}$ TO GET v

ASIDE

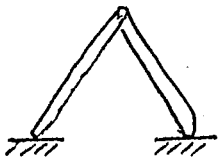
- WHEN IS TRUSS STATICALLY DETERMINATE
  - MUST CHECK BOTH EXTERNAL & INTERNAL CONDITIONS
  - FOR A TRUSS HAVING j JOINTS & n BARS

EQNS OF EQUILIB.
- IF $2j-3=n$ STATICALLY DETERMINATE INTERNALLY
- IF $<n$ STATICALLY INDETERMINATE INTERNALLY
- IF $>n$ IT IS A MECHANISM AND IT IS STATICALLY DETERMINATE


DETERMINATE



INDETERMINATE


MECHANISM

- FOR A SPACE TRUSS $3j-6=n$ (3-D TRUSS)

- EXTERNAL EQNS OF EQUILIB. $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma M=0$

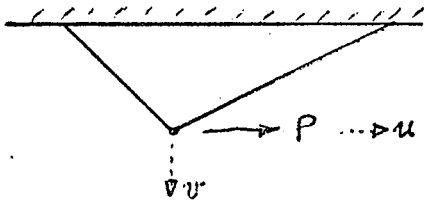
  IF NO. OF UNKNOWNS $>$ NO. OF EQNS STATICALLY INDETERMINATE

  IF " " " $\leq$ " " " DETERMINATE

- FOR A SPACE TRUSS EQS OF EQUILIB. $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z=0$

- WE SEE WE CAN FIND DISPLACEMENT IN DIRECTION OF FORCE USING CASTIGLIANO'S THEOREM $\left(\frac{\partial U_c}{\partial P}=u\right)$

- WHAT IF WE WANT DISPLACEMENT OF A POINT WHERE THERE IS NO FORCE APPLIED?

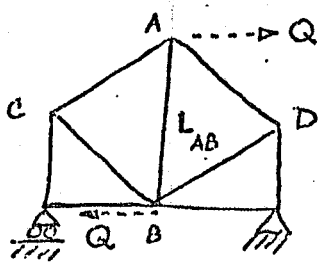


$\frac{\partial U_c}{\partial P}=u$

HOW DO WE GET v?

- PUT A FICTITIOUS FORCE Q IN DIRECTION OF v; FIND U_c; TAKE $\lim_{Q\to 0}\frac{\partial U_c}{\partial Q}=v$

- CAN WE USE CASTIGLIANO'S THEOREM TO DETERMINE ROTATIONS OF A BAR IN A TRUSS? YES
- HOW? 1) APPLY A COUPLE WHOSE FORCES ARE ⊥ TO BAR
  2) FIND U_c DUE TO THAT COUPLE, AFTER FINDING FORCES IN BARS OF TRUSS USING EQUILIB
  3) TAKE $\frac{\partial U_c}{\partial (\text{FORCE OF COUPLE})}$; THEN TAKE limit AS THAT FORCE GOES TO ZERO
  4) TAKE THE RESULT AND DIVIDE BY LENGTH OF BAR. THIS GIVES ROTATION OF BAR IN RADIANS



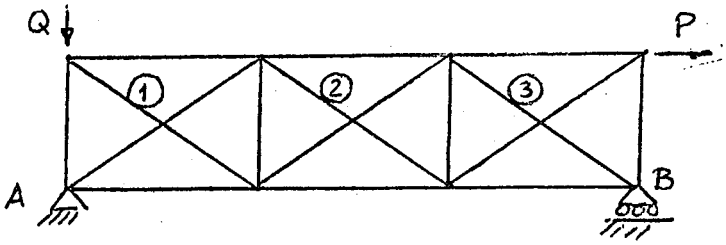
FIND $U_c = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E_i}$

- HERE THE F_i's WOULD BE FUNCTIONS OF Q
- NOW TAKE $\frac{\partial U_c}{\partial Q}$; TAKE $\lim_{Q \to 0} \frac{\partial U_c}{\partial Q} = L_{AB}\theta_{AB}$
- NOW TAKE $\frac{1}{L_{AB}} \cdot (L_{AB}\theta_{AB}) = \theta_{AB}$ IN RADIANS
- ALSO NOTE THAT $L_{AB}Q$ REPRESENTS THE MOMENT OF THE COUPLE
- WHAT IF AT A A FORCE P EXISTED ALREADY AND YOU WANTED THE ROTATION OF BAR AB? MUST ADD THE COUPLE IN ADDITION TO THE EXISTING FORCE SYSTEM.

- THE ABOVE SYSTEM IS DETERMINATE. WHAT IF A BAR WERE PLACED ACROSS CD MAKING THE SYSTEM INDETERMINATE. HOW WOULD YOU PROCEED? 1) WRITE EQUILIBRIUM EQS AND FIND FORCES IN TERMS OF THE INDETERMINATE FORCE F_{CD} (AS WE DID BEFORE)
  2) FIND U_c ; TAKE $\frac{\partial U_c}{\partial F_{CD}} = 0$ TO GET F_{CD}
  3) SUBSTITUTE TH RESULT INTO THE FORCES FOUND FROM EQUILIBRIUM; FORM U_c ; TAKE $\frac{\partial U_c}{\partial Q}\Big|_{Q=0} = L_{AB}\theta_{AB}$, ETC.

- THE DEGREE OF INDETERMINACY IS THE DIFFERENCE BETWEEN n AND $2j-3$ FOR A PLANE TRUSS OR n AND $3j-6$ FOR A SPACE TRUSS
  THIS IS THE NUMBER OF EQUATIONS NEEDED VIA CASTIGLIANO'S THEOREM

EXAMPLE



8 JOINTS

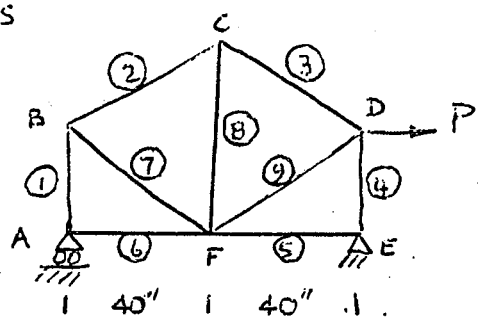
$2j-3 = 13$

$n = 16$

$n-(2j-3) = 3$

- THIS IS DEGREE OF INDETERMINACY 3
- THUS AFTER YOU FIND U_c THEN $\frac{\partial U_c}{\partial F_1} = 0$; $\frac{\partial U_c}{\partial F_2} = 0$; $\frac{\partial U_c}{\partial F_3} = 0$
- THESE GIVE THE REQUIRED EQ'S TO SOLVE FOR F_1, F_2, F_3
- TO FIND THE REACTION FORCES AT A & B : USE TRUSS METHODS LEARNED IN STATICS OR USE CASTIGLIANO'S THEOREM WITH $u_A = v_A = 0$ AND $v_B = 0$

EXAMPLES



$P = 4000$ lb

$A = .1\ in^2$

$E = 30 \times 10^6$ psi

$CF = 60"$ $BC, BF, FD, CD = 50"$

$BA = DE = 30" = L$

THIS IS STATICALLY DETERMINATE : EXTERNAL/INTERNAL

USE EXTERNAL EQUILIBRIUM TO FIND AT A $V_A = \frac{3P}{8} \downarrow$

E $H_E = P \leftarrow$ $V_E = \frac{3P}{8} \uparrow$

USE JOINT METHOD OF STATICS TO FIND

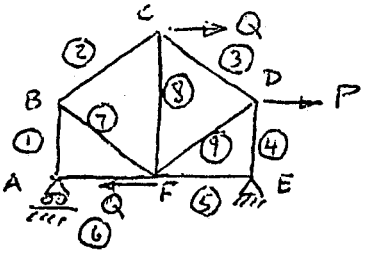
$F_1 = -F_4 = \frac{3P}{8} = -F_8$; $F_2 = F_3 = -F_7 = \frac{5P}{16}$; $F_6 = 0$; $F_5 = -P$; $F_9 = \frac{15P}{16}$

$$U_c = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E_i} = \frac{L}{2AE}\left\{\left(\frac{3P}{8}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{5P}{16}\right)^2\cdot 5/3 + \left(\frac{5P}{16}\right)^2\cdot 5/3 + \left(-\frac{3P}{8}\right)^2\cdot 1 + (-P)^2\cdot\frac{4}{3}\right.$$

$$\left. + (0)^2\cdot 4/3 + \left(-\frac{5P}{16}\right)^2\cdot 5/3 + \left(-\frac{3P}{8}\right)^2\cdot 2 + \left(\frac{15P}{16}\right)^2\cdot 5/3\right\} = \frac{739}{384}\frac{PL}{AE}$$

$$u_d = \frac{\partial U_c}{\partial P} = \frac{739}{192}\frac{PL}{AE} = \frac{739\,(4000)(30'')}{192\;.1\;(30\times 10^6)} = .154\,in \qquad \text{DISPL OF D DUE TO P}$$

TO FIND ROTATION OF CF, ASSUME LOADS Q AT C & F



USE EQUILIB. EQNS TO FIND

$$V_E = \frac{3P}{8} + \frac{3Q}{4}\uparrow \qquad V_A = \frac{3P}{8} + \frac{3Q}{4}\downarrow$$

$$H_E = P \leftarrow$$

USE JOINT EQUIL. TO FIND: $F_1 = -F_4 = \frac{3P}{8} + \frac{3Q}{4}$; $F_2 = -F_7 = \frac{5P}{16} + \frac{5Q}{8}$; $F_3 = \frac{5P}{16} - \frac{5Q}{8}$

$F_5 = -P + 0$; $F_6 = 0 + 0$; $F_8 = -\frac{3P}{8} + 0$; $F_9 = \frac{15P}{16} + \frac{5Q}{8}$

$$U_c = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E_i} = \frac{L}{2AE}\left\{\left(\frac{3P}{8}+\frac{3Q}{4}\right)^2\cdot 1 + \left(\frac{5P}{16}+\frac{5Q}{8}\right)^2\cdot 5/3 + \left(\frac{5P}{16}-\frac{5Q}{8}\right)^2\cdot 5/3 + \left(-\frac{3P}{8}-\frac{3Q}{4}\right)^2\cdot 1\right.$$

$$+ (-P+0)^2\cdot 4/3 + (0+0)^2\cdot 4/3 + \left(-\frac{5P}{16}-\frac{5Q}{8}\right)^2\cdot 5/3 + \left(-\frac{3P}{8}+0\right)^2\cdot 2$$

$$\left. + \left(\frac{15P}{16}+\frac{5Q}{8}\right)^2\cdot 5/3\right\}$$

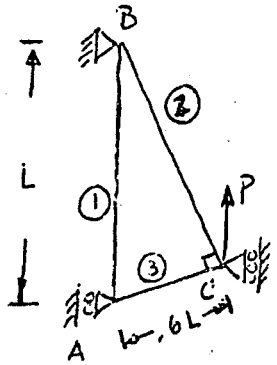
$$\left.\frac{\partial U_c}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \frac{L}{AE}\left\{\left(\frac{3P}{8}\right)\cdot 1\cdot 3/4 + \left(\frac{5P}{16}\right)\cdot 5/3\cdot 5/8 + \left(\frac{5P}{16}\right)\cdot 5/3\cdot -5/8 + \left(\frac{-3P}{8}\right)\cdot 1\cdot -3/4 + 0 + 0 +\right.$$

$$\left. \left(-5P/16\right)\cdot 5/3\cdot -5/8 + 0 + \left(\frac{15P}{16}\right)\cdot 5/3\cdot 5/8\right\} = \frac{179}{96}\frac{PL}{AE}$$

Now

$$\theta_{CF} = \frac{1}{L_{CF}}\left.\frac{\partial U_c}{\partial Q}\right|_{Q=0} = 0.00124 \text{ radians} \quad \text{or } 0.0712^\circ$$

- REMEMBER: TRUSSES ASSUME LOAD AT JOINTS, WEIGHTLESS AND ONLY EXTEND BUT **DO** NOT BEND
- WHAT ABOUT IF WE WANT TO FIND LOADS GIVEN THE DISPLACEMENTS



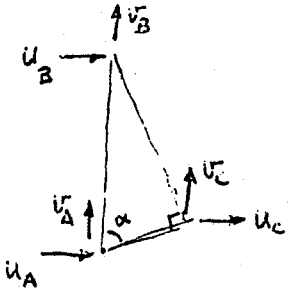
$P = 2500$ LB $A = .1\ in^2$ $E = 30 \times 10^6$ psi

$L_1 = L$, $L_2 = .8L$, $L_3 = .6L$

DFN: ELONGATION - . CHANGE IN LENGTH OF BAR ALONG ITS LINE OF ACTION DUE TO LOAD IN BAR

EXAMPLE: $e_i = \epsilon_i L_i = \frac{\sigma_i}{E_i} L_i = \frac{F_i}{A_i E_i} L_i$

- CONSIDER ELONGATION POSITIVE IN DIRECTION OF POSITIVE (TENSILE FORCE)



$u_B, v_B, u_C, u_A = 0$ BY BOUNDARY CONDITIONS

$e_1 = -v_A$

$e_2 = -v_C \sin\alpha = -.8 v_C$

$e_3 = v_C \cos\alpha - v_A \cos\alpha = (v_C - v_A).6$

} MUST WRITE ELONGATIONS IN TERMS OF DISPLACEMENTS

- HERE WE ASSUME POSITIVE DISPLACEMENT IN POSITIVE X & Y DIRECTION

$$U_s = \sum \frac{A_i E_i}{2} \frac{e_i^2}{L_i} = \sum \frac{AE}{2} \left\{ \frac{(-v_A)^2}{L} + \frac{(-.8v_C)^2}{.8L} + \frac{(.6[v_C - v_A])^2}{.6L} \right\}$$

- BUT AT A THERE IS NO VERTICAL LOAD $\therefore \frac{\partial U_s}{\partial v_A} = 0 = \frac{AE}{L}\left[(-v_A)(-1) + .6[v_C - v_A](-1)\right]$

$$\boxed{0 = \frac{AE}{L}(1.6 v_A - .6 v_C)}$$

BUT AT C $\frac{\partial U_s}{\partial v_C} = P$

$$\rightarrow P = AE\left[\frac{(-.8v_C)}{.8L}(-.8) + \frac{.6(v_C - v_A)}{.6L}(.6)\right]$$

$$\boxed{P = \frac{AE}{L}\left[1.4 v_C - .6 v_A\right]}$$

SOLUTION OF THESE GIVE

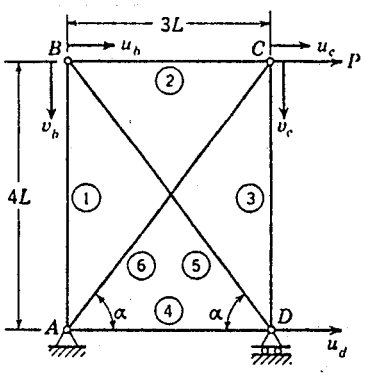
$$v_A = \frac{15PL}{47AE} \qquad v_C = \frac{40PL}{.47AE}$$

NOW: $e_1 = -v_A = -\frac{15PL}{47AE}$ $e_2 = -.8 v_C = -\frac{32PL}{47AE}$ $e_3 = .6(v_C - v_A) = \frac{15PL}{47AE}$

THUS $F_1 = \frac{AE e_1}{L_1} = -\frac{15P}{47}$; $F_2 = \frac{AE e_2}{L_2} = \frac{-32PL}{47(.8L)} = -\frac{40P}{47}$; $F_3 = \frac{AE e_3}{L_3} = \frac{15PL}{47(.6L)} = \frac{25P}{47}$

Example 15.4 For the six-bar truss supported and loaded in its own plane as shown in Fig. 15.6*a*, determine the forces in the bars and the displacement components of the joints. All the bars of the truss have the same cross-sectional area A and the same elastic modulus E.

STATICALLY INDETERMINATE TRUSS $2j-3<n$



(a)

$$\frac{4LF_1}{AE} = e_1 = -v_b \qquad \frac{3LF_4}{AE} = e_4 = u_d$$

$$\frac{3LF_2}{AE} = e_2 = u_c - u_b \qquad \frac{5LF_5}{AE} = e_5 = (u_d - u_b)\cos\alpha - v_b \sin\alpha$$

$$\frac{4LF_3}{AE} = e_3 = -v_c \qquad \frac{5LF_6}{AE} = e_6 = u_c \cos\alpha - v_c \sin\alpha$$

NOTE: $u_A, v_A, v_d = 0$ BOUNDARY CONDITIONS

$$U_s = \frac{\sum A_i E_i e_i^2}{2L_i} \; ; \quad \frac{\partial U_s}{\partial u_c} = P \; ; \quad \frac{\partial U_s}{\partial u_b} = \frac{\partial U_s}{\partial v_b} = \frac{\partial U_s}{\partial u_d} = 0 = \frac{\partial U_s}{\partial v_c}$$

$$U_s = \frac{AE}{2}\left\{ \frac{v_b^2}{4L} + \frac{(u_c-u_b)^2}{3L} + \frac{v_c^2}{4L} + \frac{(u_d)^2}{3L} + \frac{\left[(u_d-u_b)\cos\alpha - v_b \sin\alpha\right]^2}{5L} + \frac{\left[u_c\cos\alpha - v_c \sin\alpha\right]^2}{5L} \right\}$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial u_c} = P = \frac{AE}{L}\left\{ \frac{(u_c-u_b)\cdot 1}{3} + \frac{(u_c\cos\alpha - v_c\sin\alpha)\cos\alpha}{5} \right\} = \frac{-AE}{375L}\left(125u_b - 152u_c + v_c \cdot 36\right)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial u_d} = 0 = \frac{AE}{L}\left\{ \frac{u_d}{3}\cdot 1 + \frac{\left[(u_d-u_b)\cos\alpha - v_b\sin\alpha\right]\cos\alpha}{5} \right\} = \frac{-AE}{375L}\left(27u_b + 36v_b - 152u_d\right)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial u_b} = 0 = \frac{AE}{L}\left\{ \frac{(u_c-u_b)(-1)}{3} + \frac{\left[(u_d-u_b)\cos\alpha - v_b\sin\alpha\right](-\cos\alpha)}{5} \right\} = \frac{-AE}{375L}\left(27u_d + 125u_c - 36v_b - 152u_b\right)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial v_b} = 0 = \frac{AE}{L}\left\{ \frac{v_b}{4}\cdot 1 + \frac{\left[(u_d-u_b)\cos\alpha - v_b\sin\alpha\right](-\sin\alpha)}{5} \right\} = \frac{-AE}{375L}\left(-36u_b + \frac{567}{4}v_b + 36u_d\right)$$

$$\frac{\partial U_s}{\partial v_c} = 0 = \frac{AE}{L}\left\{ \frac{v_c}{4}\cdot 1 + \frac{\left[u_c\cos\alpha - v_c\sin\alpha\right](-\sin\alpha)}{5} \right\} = \frac{-AE}{375L}\left(\frac{567}{4}v_c - 36u_c\right)$$

FROM THESE WE GET $u_b = \frac{21PL}{2AE}$ $u_c = \frac{189}{16}\frac{PL}{AE}$ $u_d = \frac{21PL}{16AE}$ $v_b = -\frac{7PL}{3AE}$

$$v_c = +\frac{3PL}{AE} \; ;$$

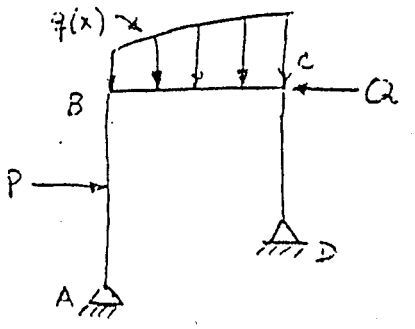
AND $F_1 = \frac{7P}{12}$, $F_2 = \frac{7P}{16}$, $F_3 = -3P$, $F_4 = \frac{7P}{16}$, $F_5 = \frac{15P}{16}$, $F_6 = -\frac{35P}{48}$

GO TO NEXT PAGE

- WHAT IF STRUCTURE BENDS ? BEAM UNDER END LOADING

  FRAME UNDER TRANSVERSE LOADING

- HERE BENDING IS PRIMARY MODE OF LOADING



ACTUALLY TOTAL SOLUTION WILL INVOLVE

EXTENSIONAL, BENDING AND SHEARING EFFECTS

REMEMBER $U_{S_e} = \int_V \frac{E\epsilon^2}{2} dV$ $\qquad U_{C_e} = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$

DUE TO TENSION

7.3 PRINCIPLE OF STATIONARY POTENTIAL ENERGY

TABLE 7.2.1 Factors k_y and k_z for use in Eq. 7.2.3, where y and z are centroidal principal axes of the cross section.

Cross-Sectional Type	k_y	k_z
Rectangle	1.20	1.20
Solid circle	≈1.11	≈1.11
Thin-walled cylinder	2.00	2.00
I-section, web parallel to z axis	≈1.20[a]	≈1.00[b]
Closed thin-walled box section	≈1.00[b]	≈1.00[b]

[a]For area A in this calculation use the combined cross-sectional areas of the flanges.

[b]For area A in this calculation use the cross-sectional area of the web (or webs in the box section).

- SIMILARLY $U_{S_S} = \int_V \frac{G\gamma^2}{2} dV$ and $U_{C_S} = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV$ DUE TO SHEAR

- FOR BENDING ENERGY $\sigma = \frac{My}{I}$ AND $\epsilon = Ky = -\frac{d^2v}{dx^2} y$ K IS CURVATURE

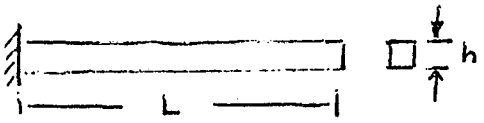
FOR A BEAM

$$U_{S_b} = \int_V \frac{E}{2} \epsilon^2 dV = \int_V \frac{E}{2} \left(-\frac{d^2v}{dx^2} y\right)^2 dV = \int_0^L \frac{E}{2} (v'')^2 \left(\int_A y^2 dA\right) dx$$

$$= \int_0^L \frac{EI}{2} (v'')^2 dx$$

$$U_{C_b} = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_V \frac{M^2 y^2}{2EI^2} dV = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2} \left(\int_A y^2 dA\right) dx = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

- LOOK AT SHEAR EFFECTS – IF BEAM IS NOT LONG (SHORT BEAM), MUST ACCOUNT FOR THEM



IF $h/L \sim 1$ MUST ACCOUNT FOR SHEAR OTHER WISE – NO.

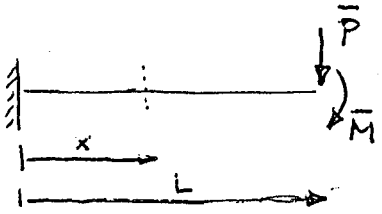
- IF NECESSARY $\int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_0^L \int_A \frac{\tau^2 dA}{2G} dx = \int_0^L k \frac{V^2}{2GA} dx$

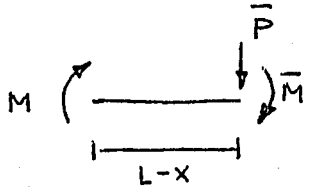
k IS REPORTED IN TABLE 7.2.1 PG 231; V IS SHEAR FORCE FOUND FROM

$$\frac{dM}{dx} = V$$

A IS CROSS-SECTIONAL AREA

- LOOK AT SEVERAL CASES





$M + \bar{P}(L-x) + \bar{M} = 0$

$M = -\left[\bar{M} + \bar{P}(L-x)\right]$

AT POSITION X

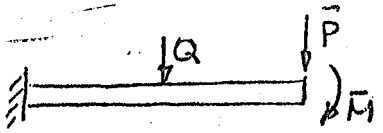
BY $U_{c_b} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)])^2}{2EI}\,dx$

$\frac{\partial U_{c_b}}{\partial \bar{P}}$ = DISPL (VERTICAL) WHERE $\bar{P}$ IS APPLIED $= \int_0^L \frac{1}{EI}\left(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)]\right)\underbrace{(-(L-x))}_{\frac{\partial M}{\partial \bar{P}}}\,dx$

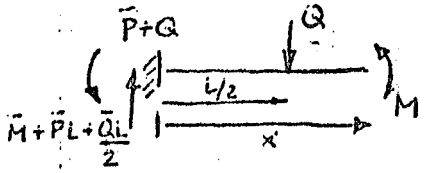
$\frac{\partial U_{c_b}}{\partial \bar{M}}$ = ROTATION WHERE $\bar{M}$ IS APPLIED $= \int_0^L \frac{1}{EI}\left(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)]\right)\underbrace{(-1)}_{\frac{\partial M}{\partial \bar{M}}}\,dx$

- THIS IS A STATICALLY DETERMINATE PROBLEM. NOTE THAT LOAD & MOMENT GIVE THE TWO EQUATIONS OF EQUILIBRIUM

- WHAT IF WE WANTED TO FIND DISPLACEMENT AT $x = L/2$?
- PUT LOAD Q THERE, FIND U_{c_b}; THEN TAKE $\left.\frac{\partial U_{c_b}}{\partial Q}\right|_{Q=0}$

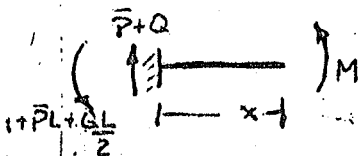


DEFINE M $\quad 0 \le x \le L/2$ & $L/2 \le x \le L$



$+M + (Q)(x-L/2) - (\bar{P}+Q)x + (\bar{M}+\bar{P}L+\frac{QL}{2}) = M - \bar{P}(x-L) + \bar{M} = 0$

$M = +\bar{P}(x-L) - \bar{M} \quad$ FOR $\quad L/2 \le x \le L$



$+M - (\bar{P}+Q)x + (\bar{M}+\bar{P}L+\frac{QL}{2}) = M + \bar{P}(L-x) + Q(L/2-x) + \bar{M} = 0$

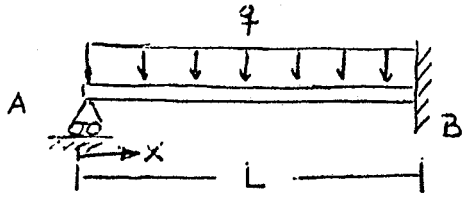
$M = -[\bar{M} + \bar{P}(L-x) + Q(L/2-x)] \quad$ FOR $\quad 0 \le x \le L$

$U_{c_b} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^{L/2} \frac{(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)+Q(L/2-x)])^2}{2EI}\,dx + \int_{L/2}^L \frac{(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)])^2}{2EI}\,dx$

$\frac{\partial U_{c_b}}{\partial Q} = \int_0^{L/2} \frac{\left(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)+Q(L/2-x)]\right)}{2EI}\underbrace{(-[L/2-x])}_{\partial M/\partial Q}\,dx$

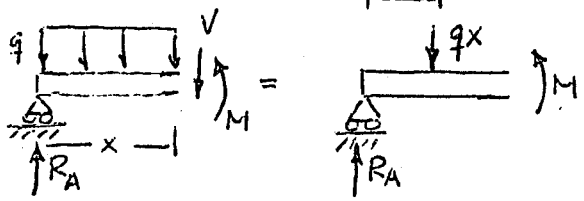
$U\big|_{x=L/2} = \left.\frac{\partial U_{c_b}}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \int_0^{L/2} \frac{\left(-[\bar{M}+\bar{P}(L-x)]\right)}{2EI}(-[L/2-x])\,dx$

STATICALLY INDETERMINATE BEAMS



AT A REACTION UPWARD } 3 UNKNOWNS
B MOMENT + REACTION } 2 EQNS

LOOK AT BEAM AT DISTANCE x FROM LEFT END



$$M + q\frac{x^2}{2} - R_A x = 0$$

$$M = R_A x - q\frac{x^2}{2} \qquad 0 \le x \le L$$

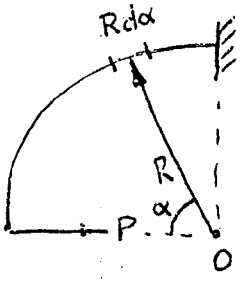
$$U_{c_b} = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{\left(R_A x - q\frac{x^2}{2}\right)^2}{2EI}\,dx$$

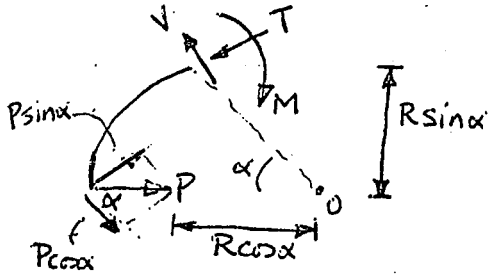
- WHAT IS $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial R_A} = U_A' = 0 = \int_0^L \frac{\left(R_A x - q\frac{x^2}{2}\right)}{EI} x\,dx \Rightarrow R_A = \frac{3qL}{8}$ ($\frac{\partial M}{\partial R_A}$)

- WHAT IF WE WANTED TO FIND THE ROTATION OF THE BEAM AT $x = L/4$?
  SUPERPOSE A MOMENT M_1 AT $x = L/4$, FIND U_{c_b}, TAKE $\left.\frac{\partial U_{c_b}}{\partial M_1}\right|_{M_1=0} = \theta\Big|_{L/4}$

- WHAT IF THERE ARE TWO LOADS CALLED P? WHAT DOES $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial P}$ MEAN?
- HOW WOULD I FIND THE DISPLACEMENT UNDER ONE OF THESE LOADS?

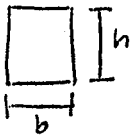
LET'S LOOK AT A CIRCULAR CANTILEVERED BEAM UNDER HORIZONTAL LOAD





$T = P\sin\alpha$
$V = P\cos\alpha$
$M = PR\sin\alpha$

FROM EQUILIBRIUM -

IF THE CROSS-SECTION IS RECTANGULAR  $A = bh \quad I = \frac{bh^3}{12}$

$$\sigma = T/A = \frac{P\sin\alpha}{A} \qquad \tau = \frac{3V(h^2-4y^2)}{2bh^3} = \frac{3P\cos\alpha\,(h^2-4y^2)}{2bh^3}$$

$$U_{c_t} = U_{c_e} + U_{c_s} + U_{c_b} \qquad U_{c_e} = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\,dV = \int_0^{\pi/2} \frac{P^2\sin^2\alpha}{2A^2E}\,A\cdot R\,d\alpha$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{P^2R}{2AE}\sin^2\alpha\,d\alpha = \frac{\pi P^2R}{8AE}$$

$$U_{c_s} = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_0^{\pi/2} \frac{R\,d\alpha}{2G} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{9V^2}{(2bh^3)^2}\,(h^2-4y^2)^2\,dy$$

$$= \frac{3\pi P^2R}{20GA}$$

$$U_{c_b} = \int_V \frac{\sigma^2}{2E}\,dV = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2}{2EI}\,R\,d\alpha = \int_0^{\pi/2} \frac{P^2R^3\sin^2\alpha}{2EI}\,d\alpha = \frac{\pi P^2R^3}{8EI}$$

$$U_{c_t} = \frac{\pi P^2R^3}{8EI}\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{E}{10G}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right]$$

BENDING ↙ EXTENSION ↙ SHEAR ↙

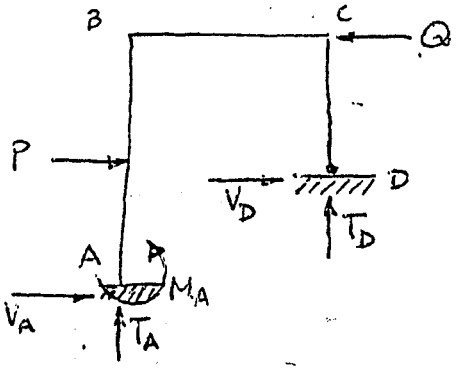
AND $\frac{\partial U_{c_t}}{\partial P}$ = DISPL IN DIRECTION OF P = $\frac{\pi PR^3}{4EI}\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{E}{10G}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right]$

IF $\frac{E}{G} = 2(1+\nu)$ AND $\nu = .3$ $\frac{E}{10G} = .26$

IF $h/R = \frac{1}{10}$ $\frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 = .00083$ $\frac{E}{10G} = .0026$

NOTE EXTENSION & SHEAR CONTRIB. MUCH SMALLER

WHAT ABOUT A FRAME?



1) CONSIDER FREE AS FREE BODY
2) THE REACTION COMPONENTS ARE V_A, T_A, M_A AT A AND V_D, T_D (PINNED END) AT D
3) SINCE 3 EQNS OF EQUILIB ONLY ⇒ 2 OF THESE UNKNOWNS CAN BE WRITTEN IN TERMS OF OTHER 3

e.g. $V_A = V_A(V_D, T_A, T_D) \quad M_A = M_A(V_D, T_A, T_D)$

4) NOW FIND M IN TERMS OF THESE QUANTITIES OVER EACH RANGE

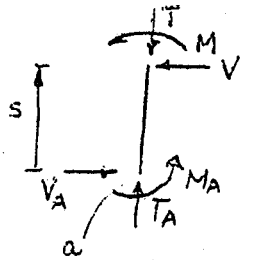
FROM A TO P P TO B B TO C C TO D

5) USE $U_{c_b} = \sum \int \frac{M^2}{2EI}\,ds = \int_A^P \frac{M^2}{2EI}\,ds + \int_P^B \frac{M^2}{2EI}\,ds + \int_B^C \frac{M^2}{2EI}\,ds + \int_C^D \frac{M^2}{2EI}\,ds$

6) THEN TAKE $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial T_D} = 0$ $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial T_A} = 0$ SINCE THESE ARE THE INDETERMINATE QUANTITIES

7) THESE TWO EQUATIONS AND THE EQUILIBRIUM EQUATIONS GIVE 5 EQNS & 5 UNKN

EXAMPLE : BETWEEN A - P



$\Sigma F_H = 0 \Rightarrow V = V_A$

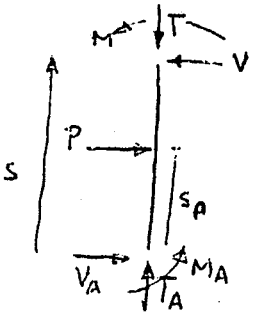
$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow T = T_A$

$\Sigma M_a = 0 = M + Vs + M_A = 0$

$M = -(V_A s + M_A)$

$\therefore \int_A^P \frac{M^2}{2EI}\,ds = \int_0^{S_P} \frac{[-(V_A s + M_A)]^2}{2EI}\,ds$

BETWEEN P - B



$V = P + V_A$

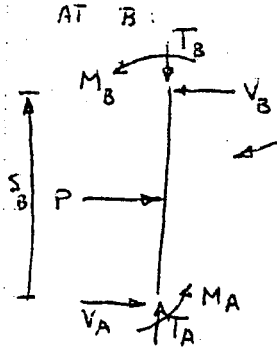
$T = T_A$

$M = -P(s - s_\rho) - V_A s - M_A$

$\int_P^B \frac{M^2}{2EI}\,ds = \int_{S_\rho}^{S} \frac{[-(P\{s - s_P\} + V_A s + M_A)]^2}{2EI}\,ds$

BETWEEN B - C

AT B :

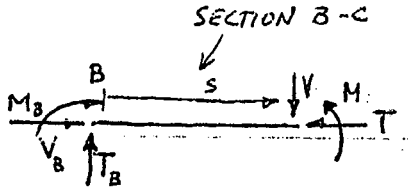


$V_B = P + V_A$

$T_B = T_A$

$M_B = -P(S_B - S_\rho) - V_A S_B - M_A$

SECTION B - C



$T = V_B = P + V_A$

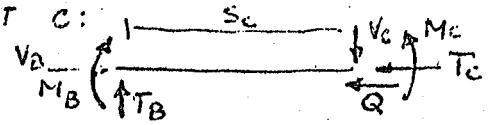
$V = T_B = T_A$

$M = T_B s + M_B = T_A s - [P(S_B - S_P) + V_A S_B + M_A]$

$\int_B^C \frac{M^2}{2EI}\,ds = \int_0^S \frac{(T_A s + M_B)^2}{2EI}\,ds$

BETWEEN C – D

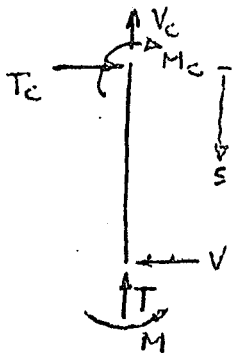
AT C:



$$T_c = V_B - Q = P + V_A - Q$$

$$V_c = T_B = T_A$$

$$M_c = T_B S_c + M_A = \underbrace{T_A S_c - [P(S_B - S_P) + V_A S_B + M_A]}$$



$$T = -V_c = -T_A$$

$$V = T_c = P + V_A - Q$$

$$M = M_c + T_c S = M_c - T_A S$$

$$\int_c^D \frac{M^2 ds}{2EI} = \int_0^{S_D} \frac{(M_c - T_A S)^2}{2EI} ds$$

NOW $U_{c_b} = \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds$ AND TAKE $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial M_A} = 0$ & $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial V_A} = 0$

FROM EQUILIB.

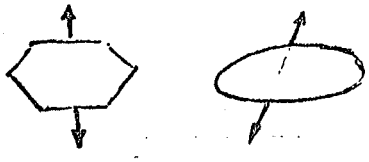
$$V_A + P + Q + V_D = 0$$

$$T_A + T_D = 0$$

$$M_A - P S_P + Q S_B - V_D (S_B - S_D) + T_D S_c = 0$$

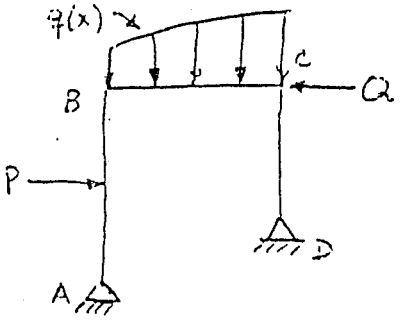
GIVE 5 EQNS
5 UNKNOWNS V_A, V_D, T_A, M_A

- WHAT ABOUT CLOSED PLANE FRAMES & RINGS SUBJECTED TO LOADS THAT ARE SELF EQUILIBRATING ?



- YOU DO SAME THING AS WITH A FRAME. THERE WILL BE 3 STATICALLY INDETERMINATE REACTIONS THEY ARE INTERNAL REACTIONS M, T, V. THESE REACTIONS MUST MINIMIZE $\Pi = W_i = -U_{c_b} = -U_{c_s}$
- FORM $U_{c_b} = \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds$ AROUND THE CLOSED PERIMETER
- THEN TAKE $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial M} = 0$ $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial V} = 0$ $\frac{\partial U_{c_b}}{\partial T} = 0$

- WHAT IF STRUCTURE BENDS ? BEAM UNDER END LOADING
  FRAME UNDER TRANSVERSE LOADING
- HERE BENDING IS PRIMARY MODE OF LOADING



ACTUALLY TOTAL SOLUTION WILL INVOLVE
EXTENSIONAL, BENDING AND SHEARING EFFECTS

REMEMBER $U_{S_e} = \int_V \frac{E\epsilon^2}{2} dV$ $\qquad U_{C_e} = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$

DUE TO TENSION

7.3 PRINCIPLE OF STATIONARY POTENTIAL ENERGY

TABLE 7.2.1 Factors k_y and k_z for use in Eq. 7.2.3, where y and z are centroidal principal axes of the cross section.

Cross-Sectional Type	k_y	k_z
Rectangle	1.20	1.20
Solid circle	≈1.11	≈1.11
Thin-walled cylinder	2.00	2.00
I section, web parallel to z axis	≈1.20[a]	≈1.00[b]
Closed thin-walled box section	≈1.00[b]	≈1.00[b]

[a]For area A in this calculation use the combined cross-sectional areas of the flanges.
[b]For area A in this calculation use the cross-sectional area of the web (or webs in the box section).

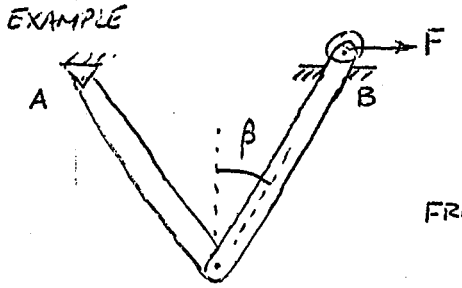
Book

- WHAT IF A STRUCTURE IS RIGID? NO STRAIN ENERGY & $W_i = 0$

$\Rightarrow \Pi = W_e$ (WORK DONE BY BODY FORCES, EXTERNAL FORCES ONLY

$\Rightarrow \delta\Pi = \delta W_e = 0$ PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK

EXAMPLE



TWO - RIGID BARS OF WEIGHT W AND LENGTH

WHAT IS β FOR EQUILIB. IF F IS APPLIE

FROM EQUILIB - REACTIONS AT A & B DO NO WORK

AT A : FORCES AT FIXED PT

AT B : NORMAL FORCE IS $\perp$ TO DIRECTION OF MOTION

WORK DONE: IF $\beta = 0$ AND WE CONSIDER WORK DONE WITH RESPECT TO THIS POSITION

$$F \cdot 2l \sin\beta - 2W\left(\frac{l}{2}[1-\cos\beta]\right) = \Pi = W_e$$

$$2lF\cos\beta\,\delta\beta - Wl\sin\beta\,\delta\beta = \delta W_e = \delta\Pi = 0$$

$$\Rightarrow \tan\beta = \frac{2F}{W}$$

ANOTHER WAY $F(2x) - 2W(y_2) = \Pi$ WITH $x^2 + y^2 = L^2$

$$F(2\delta x) - W\delta y = \delta\Pi = 0 \quad \text{AND} \quad x\delta x + y\delta y = 0 \Rightarrow \delta y = -\frac{x}{y}\delta x$$

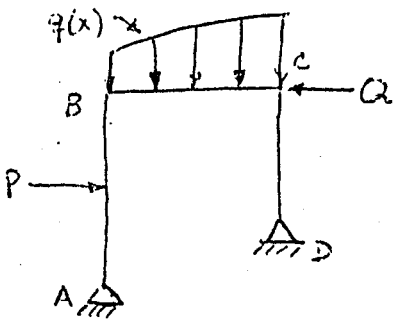
$$\text{now } \frac{x}{-y} = \tan\beta \quad \Rightarrow \quad 2F/W = \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{x}{y} = \tan\beta$$

GO TO NEXT PAGE

- WHAT IF STRUCTURE BENDS? BEAM UNDER END LOADING

FRAME UNDER TRANSVERSE LOADING

- HERE BENDING IS PRIMARY MODE OF LOADING

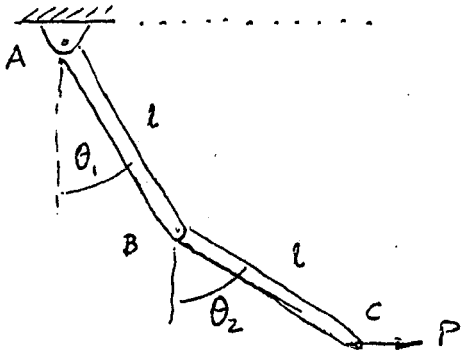


ACTUALLY TOTAL SOLUTION WILL INVOLVE EXTENSIONAL, BENDING AND SHEARING EFFECTS

REMEMBER $U_{S_e} = \int_V \frac{E\epsilon^2}{2} dV$ $\qquad U_{C_e} = \int \frac{\sigma^2}{2E} dV$

DUE TO TENSION

Dont



- THIS IS A 2 DEGREE OF FREEDOM SYSTEM SINCE EACH BAR CAN MOVE INDEPENDENTLY OF THE OTHER
- DEGREES OF FREEDOM

BAR #1 = x_A, y_A, x_B, y_B $\quad x_A=0, y_A=0$

$$\ell = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

- # UNKNOWNS − # EQNS ⟶ 1 DEGREE OF FREEDOM (1 D.O.F.)

BAR #2 = x_B, y_B, x_C, y_C $\quad x_B, y_B$ KNOWN

$$\ell = \sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}$$

- # UNKNOWNS − # EQNS ⟶ 1 DEGREE OF FREEDOM (1 D.O.F.)
- FOR SYSTEM 2 D.O.F. CHOOSE θ_1, θ_2
- TO FIND W_e : WORK DUE TO WEIGHTS & LOAD P

W_i : ZERO SINCE RIGID BARS

AT A : REACTIONS FORCES DO NO WORK, WHY? AT B : NO WORK, W

- CONSIDER WORK DONE WITH RESPECT TO POSITION $\theta_1=\theta_2=0$

$$\Pi = W_e = -W\left[\tfrac{1}{2}(1-\cos\theta_1)\right] - W\left[\ell(1-\cos\theta_1)+\tfrac{\ell}{2}(1-\cos\theta_2)\right] + P\left[\ell\sin\theta_1 + \ell\sin\theta_2\right]$$

$$\delta\Pi = \delta W_e = 0 = -W\tfrac{\ell}{2}\sin\theta_1\,\delta\theta_1 - W\ell\sin\theta_1\delta\theta_1 - W\tfrac{\ell}{2}\sin\theta_2\,\delta\theta_2 + P\ell\left[\cos\theta_1\,\delta\theta_1 + \cos\theta_2\delta\theta_2\right]$$

$$0 = \left[-\tfrac{3W\ell}{2}\sin\theta_1 + P\ell\cos\theta_1\right]\delta\theta_1 + \left[-\tfrac{W\ell}{2}\sin\theta_2 + P\ell\cos\theta_2\right]\delta\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \tan\theta_1 = \frac{2P}{3W} \qquad \tan\theta_2 = \frac{2P}{W}$$

ALSO $\quad P\left[x_1+(x_2-x_1)\right] - W y_{1/2} - W(y_1+[y_2-y_1]/2) = \Pi$

$$P\left[\delta x_1 + \delta(x_2-x_1)\right] - \frac{W}{2}\delta y_1 + W\left(\delta y_1 + \tfrac{1}{2}\delta(y_2-y_1)\right) = \delta\Pi = 0$$

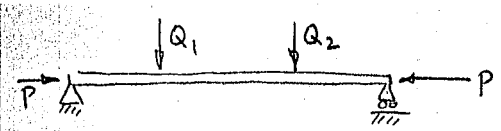
with $x_1^2+y_1^2=\ell^2$ and $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=\ell^2 \Rightarrow x_1\delta x_1 + y_1\delta y_1 = 0$

AND $(x_2-x_1)\delta(x_2-x_1)+(y_2-y_1)\delta(y_2-y_1$

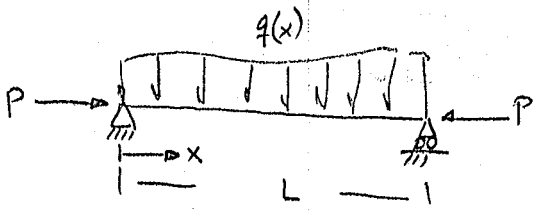
now $\quad \delta x_1 = -\frac{y_1}{x_1}\delta y_1 = \cot\theta_1\,\delta y_1 \qquad \delta(x_2-x_1) = -\frac{(y_2-y_1)}{x_2-x_1}\delta(y_2-y_1) = \cot\theta_2\,\delta(y_2-y_1)$

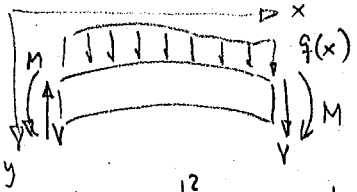
THUS

$$P\left(\cot\theta_1\,\delta y_1 + \cot\theta_2\,\delta(y_2-y_1)\right) - \frac{3W}{2}\delta y_1 - \frac{W}{2}\delta(y_2-y_1) = 0 \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{2P}{3W},\ \tan\theta_2 = \frac{2P}{W}$$



בדרך כלל ניתן וכולים להשתמש בסופרפוזיציה כדי לקבל את התגובה על קורה או מוט עם כמה עומסים. אבל כשיש על הקורה או מוט שהתמ יש כוח צירי כמו P שפועל על המוט או קורה עם הכוחות Q_1, Q_2 או אפשר לקבל את התזוזות בסופרפוזיציה, גם כאן בגלל שהתגובות מותמים בדרך לינארית Q_1, Q_2 אבל היחס שלו לינארי ל- P.





$$M = EI\frac{d^2v_p}{dx^2} \quad -V = \frac{dM_p}{dx} \quad -q = \frac{dV_p}{dx}$$

אבל הכוח P מכניס לנוסחה מומנט על עק. המומנט הזה קורה לשינוי על $\frac{dv_p}{dx}$ וגם עומס מפורס על $q = -P\frac{d^2v_p}{dx^2}$. לכן הנוסחה שפורלת במצב הזה היא

$$\lambda^2 = \frac{P}{EI} \qquad q = M\lambda^2 + \frac{d^2M_p}{dx^2} \qquad \text{כפונקציה על מומנט}$$

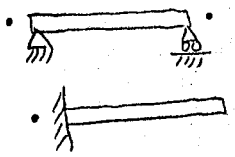
$$q/EI = \lambda^2\frac{d^2v_p}{dx^2} + \frac{d^4v_p}{dx^4} \qquad \text{כפונקציה על התזוזה}$$

אם EI פונקציה על x

$$q = P\frac{d^2v_p}{dx^2} + \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v_p}{dx^2}\right)$$

ביטרון כשר EI קבוע $q = q_0(1-x)$

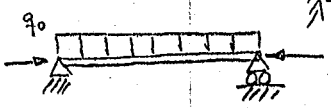
$$v(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D + \frac{q_0x^2}{2\lambda^2EI}$$



תמיכה נייחת וחלקית: $v=0$, $M=EI\frac{d^2v_p}{dx^2}=0$

תמיכה כתובת: $v=0$, $\frac{dv_p}{dx}=0$

קצה חופשי: $M=0$, $V=\frac{d^3v_p}{dx^3}+\frac{P}{EI}\frac{dv_p}{dx}=0$



בעמוד - קורה בקצוות נייח וחלק

$$v = \frac{q_0}{\lambda^4EI\sin\lambda L}\left\{\lambda L\sin\left[\frac{\lambda^2}{2}(x-1)^2 + (\lambda x\cos\lambda - 1)\right] - \lambda x\sin(\lambda L\cos\lambda - 1)\right\}$$

כשרטט $v = \frac{q_0}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)$ $\quad$ ו- $v(L/2) = \frac{5q_0L^4}{384EI}$

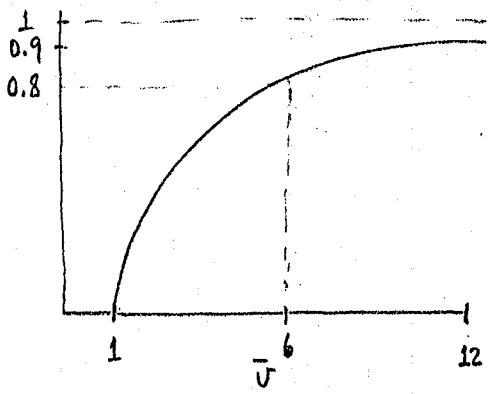
$$v(\tfrac{1}{2}) = \frac{-q_0}{384EI}\left\{\frac{\qquad\qquad}{\frac{5}{384}(\lambda L)^4 \sin\lambda L}\right\}$$

ותצורה הולכת לשוון 0 לך כאשר $(\lambda L)^4 \sin\lambda L$ הולך לאפס, או כאשר $\sin\lambda L = 0$.

$$\sin\lambda L = 0 \Rightarrow \lambda L = n\pi \Rightarrow P = \frac{n^2\pi^2}{L^2}EI$$

לכן התצורה של תלויה ב- q_0. ה- P הקטן הוא הקריטי או עומס הקריסה $P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ וזה העומס

עלם נסתכל במקרים $P/P_E = \left(\frac{\lambda L}{\pi}\right)^2 = \frac{\lambda^2 EI}{\pi^2 EI/L^2}$ כפונקציה של $\bar{v} = \frac{v(\lambda, \frac{1}{2})}{v(\lambda=0, \frac{1}{2})}$



אם המקבלנו כך בקורה  היינו מקבל $\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) + P\frac{d^2v}{dx^2} = 0$

והפיתרון למשוואה הכללית הוא של-

$$v = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D$$

אם היינו משתמשים בתנאי הקצוות, כפי שאורית

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A + D = 0$$
$$M(x=0) = EI\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -\lambda^2 A = 0$$
$$v(1) = 0 \qquad A\cos\lambda L + B\sin\lambda L + CL + D = 0$$
$$M(x=L) = EI\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \qquad -\lambda^2 A\cos\lambda L - \lambda^2 B\sin\lambda L = 0$$

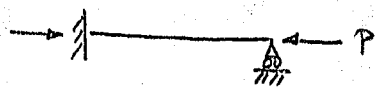
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\lambda L & \sin\lambda L & L & 1 \\ -\lambda^2\cos\lambda L & -\lambda^2\sin\lambda L & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כדי למצוא פיתרון $\neq$ 0 אז $A=B=C=D=0$ (ואז אורית של $v=0$ הפיתרון הפשוט) אז הדטרמיננטה של- DETERMINANT שווה לאפס. לכן, לפי הרמוז המלים, ה- DETERMINANT של-

$$L\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2\sin\lambda L & -\lambda^2\cos\lambda L \end{vmatrix} = L\lambda^4\sin\lambda L = 0$$

זוגי פעם $\sin\lambda L = 0$. אלה אורית שפיתרון המשפרי הוא של- $v = B\sin\lambda x$. לכן אפשרויות

התצורה המקסימלית עקיפה וגורלית. ואלה הערכים P הוא P_E, אף הערך אותו קרוס.



ושום תנאי הקצוות ערכו-קורת כבכורת

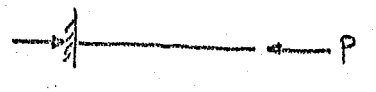
נותן המשוואה הקריטית $\tan\lambda L = \lambda L$

$$P_{\text{קריסה}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad 2.05 = 2.05 P_E$$



המשוואה הקריטית $\sin\frac{\lambda L}{2}\left(\cos\frac{\lambda L}{2} - \frac{\lambda L}{2}\sin\frac{\lambda L}{2}\right) = 0$

$$P_{\text{קריסה}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} 4 = 4P_E$$

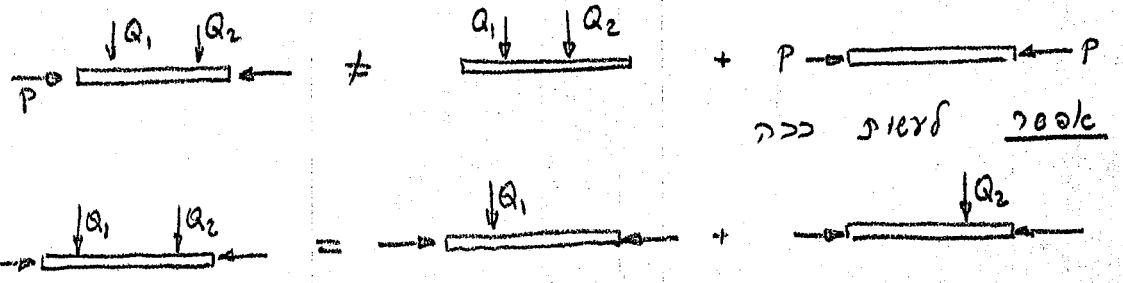


המשוואה הקריטית $\cos kL = 0$

$$P_{\text{קריסה}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}P_E$$

כאן, למרות שכללי אחת עומס הצירית נכללת, העומס הקריטי שגורם לקריסה יהיה יותר נמוך. רוטות שתנאי הקצוות מפריעים לעומס הקריטי.

אלא על פי שלו אפשר להשתמש בסופרפוזיציה בצורת



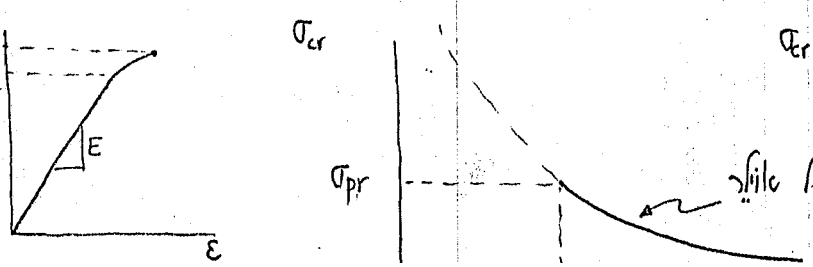
אפשר לעשות ככה

הערות קבלני את התוצאות הללו על קצוי שניהם בתוך הקלקולטור הנ"ל על תמוך בדרך כלל, $P_{cr} = C\frac{\pi^2 EI}{L^2}$ והמספר C נקרא בקצוי הקצוות. אלא $C = (L'/L)^2$

כאן L' = אורך האפקטיבי של הקורה. לדוגמה $C = 1/4$ לכן $L' = 2L$

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL'^2} = \frac{\pi^2 E(\rho^2 A)}{A(L')^2} = \frac{\pi^2 E}{(L'/\rho)^2}$$

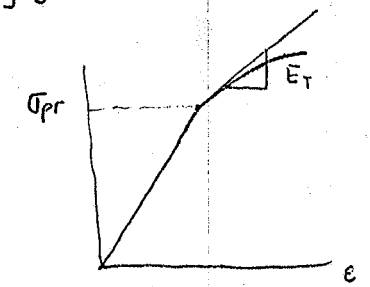
- $I = A\rho^2$ - ρ הוא רדיוס ההתמדה.
- המקדם L'/ρ הוא קצוי הגמישות של הקורה וקורא לזה מקדם הדקות slenderness ratio
- רוטות ש- $\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L'/\rho)^2}$



$$\left(L/\rho\right)_{cr} = \pi\sqrt{E/\sigma_{pr}}$$

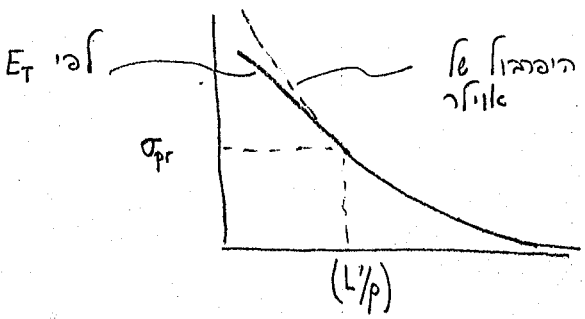
המאומץ הקריטי יגדל יהיה $\left(L/\rho\right)_{cr} > \left(L/\rho\right)_{\text{שלוח}}$ ובוחרים לקבל את הערך הקריטי. אם שווה ל P_{cr}/A יהיה יותר גדול.

לתקן בצה, כדי לגרום ל $\left(L/\rho\right)_{cr} < \left(L/\rho\right)_{\text{שלוח}}$ משתמשים בדוגמן הטנגנט, אחרי נקודת הפרופורציה את σ_{pr}.

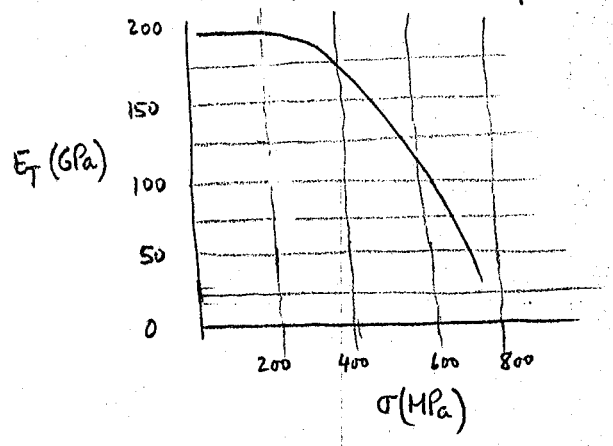


1- בדרך ניסיונית מקבלים את E_T.

$$\sigma_{t,cr} = \frac{\pi^2 E_T}{\left(L/\rho\right)^2}$$



לפניה מעוינת קיבלו את הקשר בין E_T למאמץ



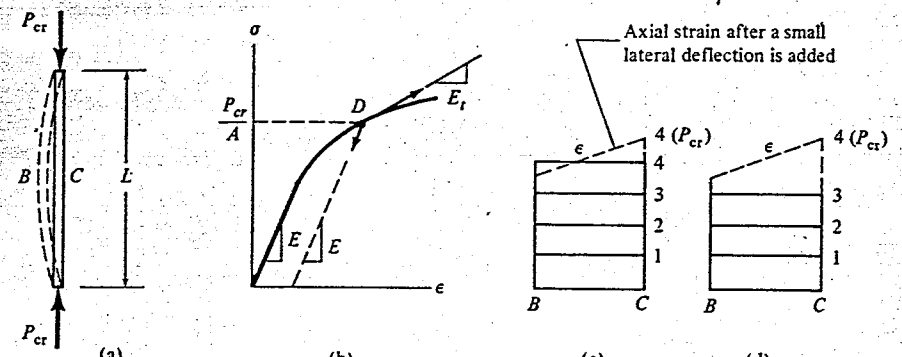


FIGURE 12.4.1. (a) Buckling of a pin-ended column under centroidal axial load. (b) Compressive stress–strain diagram, showing loading and unloading paths from point D, which corresponds to inelastic buckling. (c) Distribution of axial strain across the column at increasing load levels, according to double-modulus theory. (d) Possible distribution of axial strain across the column in tangent modulus theory.

cross section. Therefore, the column must bend before reaching the double-modulus load. But this is in contradiction to a basic assumption in double-modulus theory. The contradiction is resolved by noting that lateral deflection may occur *simultaneously* with application of the last increment of load. There need be no unloading on the convex side, and modulus E_t may prevail all across the section (Fig. 12.4.1d). Under near-perfect test conditions the collapse load slightly exceeds the theoretical tangent-modulus load, but it does not reach the double-modulus load.

In summary, inelastic buckling of a straight, axially loaded column does not occur at a unique value of axial load P. Instead, buckling begins at the tangent-modulus load and is complete (meaning that collapse takes place) before the theoretical double-modulus load is reached. Tests of real columns, which have larger imperfections than laboratory specimens, are in excellent agreement with tangent modulus theory.

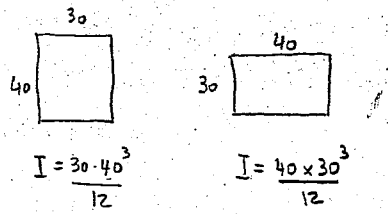
Euler did not realize that bending stiffness EI could be calculated rather than obtained by experiment. However, he anticipated Engesser by remarking in 1757 that EI represents a resistance to bending that need not pertain only to elastic bodies [12.4].

Example 12.4.1. A column has a solid rectangular cross section, 40 mm by 30 mm. It is 200 mm long, free at the top, and fixed at the base. Material properties are shown in Fig. 12.4.2. What centroidal axial compressive load at the top will make the column buckle?

The appropriate equation is $P_{cr} = \pi^2 EI/4L^2$, where

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{40(30)^3}{12} = 90{,}000 \text{ mm}^4 \qquad (12.4.2)$$

because buckling will take place about the weaker axis of the cross section.



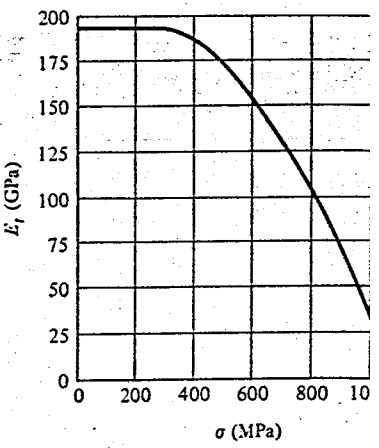


FIGURE 12.4.2. Tangent modulus E_t versus compressive stress σ for a particular steel, obtained from a stress–strain plot.

P_{cr} = 1077 kN, or $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ = 898 MPa. This stress is consid higher than the proportional limit stress, which appears to be about 32 in Fig. 12.4.2. Therefore, buckling is inelastic, the effective modu pends on load, and an iterative method of calculation is needed to fi as follows.

Assume that σ_{cr} will be, say, 600 MPa. At this stress, Fig. 12.4.2 E_t = 160 GPa. Hence

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{4L^2} = 888 \text{ kN} \qquad \frac{P_{cr}}{A} = 740 \text{ MPa} \qquad (1$$

As P_{cr}/A exceeds the assumed σ_{cr} of 600 MPa, another trial is neede Assume that σ_{cr} = 660 MPa; then

$$E_t = 142 \text{ GPa} \qquad P_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{4L^2} = 788 \text{ kN} \qquad \frac{P_{cr}}{A} = 657 \text{ MPa} \qquad (1$$

Now the assumed value of σ_{cr} agrees well enough with the calculated and P_{cr} = 788 kN is accepted as the tangent modulus buckling load.

Creep Buckling. As the name implies, creep buckling theory deals material that creeps, that is, a material whose strain changes with time at c stress. A creeping column may display a small but gradually increasing deflection, then fail suddenly by buckling. The phenomenon is explai examination of creep curves (Fig. 12.4.3). One may enter the creep cu a certain time, say t_1, and read the strain for each of several stress Stress–strain data thus obtained is then plotted as a stress–strain curve, s the curve labeled t_1 in Fig. 12.4.3. Repetition of this procedure at severa produces a set of isochronous stress–strain curves (stress versus strain at c time). These curves show that at a given stress level, the tangent m decreases with time. This implies that however light the load, a creeping c will eventually buckle if we wait long enough for its tangent modulus to d

משקל W שנופל על קורה שורם למצבים דינמיים והמצבים הללה
יותר שכיחים ממצב שמשקל W לותף על הקורה בלבד

הצומס הדינמי נחשב כ

$$P_{dyn} = W\left(1 + \sqrt{1 + 2H/\Delta_{st}}\right)$$

h - גה מהמק השנבי בין המשקל M לקורה.

Δ_{st} - גה התגובה הסטטית של הקורה שנגרמה מישום המשקל על הקורה.

דוגמא -

$$\Delta_{st} = \frac{WL^3}{48EI}$$

המצלף הדינמי כאן -

① למצוא הצומס הדינמי
② למצוא המומנט המקס.
③ למצוא המצלף

$$\sigma_{max} = \frac{My}{I} = \frac{P_{dyn}\frac{L}{4}\cdot(h/2)}{4\cdot b\frac{h^3}{12}} = \frac{3P_{dyn}\cdot L}{2bh^2}$$

הערות לישום הנוסחה הנ"ל.

- אין צורך לגרסיה הנקודתי הנ"ל שהם בסמיכות
- לגרניטת המערכת נשבית כאשר המשקל המערכת לא התחשב
- לתצוגה על המערכת יש יחס לניטרי לגובה הצומס המיושם ואין אלכתית שום גוף דינמי או סטטי

1. Write the second-order differential equation for the bending of the column shown in Fig. P1-2 and use it to determine the critical load of the column. At its lower end the column is completely fixed. At the upper end the column is prevented from rotating, but free to translate laterally. (ans: $P_{cr}=\pi^2EI/L^2$)

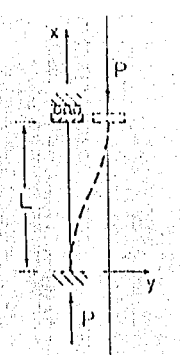
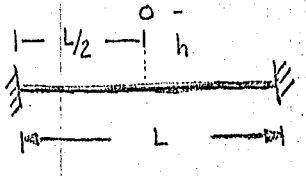


Fig. P1-2

2. Find an expression for the maximum stress when a ball weighing W Newtons is dropped onto a fixed-fixed beam.



3. . A linearly elastic beam-column having a flexural rigidity EI, is subjected to a thrust P and a moment M_0 as shown in Fig. A below.

(a) Determine the lateral displacement v(x).

(b) From part (a), write the solution for the system subjected to a force P acting as shown in Fig. B.

(c) Determine Δ_c, the horizontal displacement of point C, assuming small rotations. (Assume also that the horizontal displacement of point B is negligible).

(d) Determine the bending moment M(x).

(g) Explain why, although the beam is made of a linearly elastic material, the results of part (c) are non-linear.

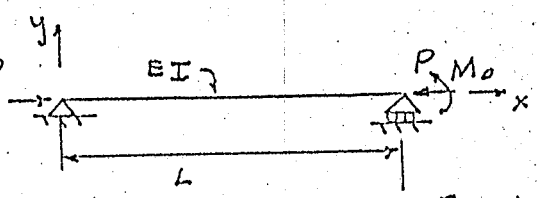


Fig. A

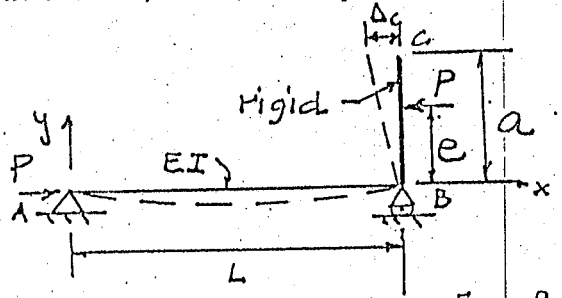


Fig. B

Answers :

(a) $y(x)=-\frac{M_0}{P}\left[\frac{\sin Kx}{\sin KL}-\frac{x}{L}\right]$, $K^2=\frac{P}{EI}$

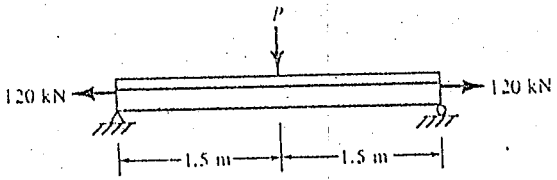
(c) $\Delta_c=\frac{ac}{L}\left[1-L\sqrt{P/EI}\cot\left(L\sqrt{P/EI}\right)\right]=\frac{ac}{L}(1-KL\cot KL)$

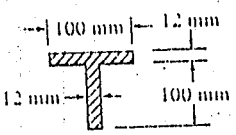
(d) $M(x)=M_0 \sin kl/\sin kL$

*12.10 A T section carries an axial tensile force of 120 kN, applied through the centroid of the cross section. The allowable stress in tension or compression is 130 MPa. Let $E = 200$ GPa. What transverse force P can be applied at midspan if the beam is

(a) Stem down (as shown)?

(b) Stem up?





PROBLEM 12.10

1.



$EI\frac{d^4v}{dx^4}+P\frac{d^2v}{dx^2}=0$ מהנוסחה שמצאנו בשיעור שעבר

והפיתרון הוא

$v=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x+Cx+D$

$\lambda^2=P/EI$

תנאי השפה הם:

① תנועה $v(x=0)=0$

② שיפוע $\frac{dv}{dx}(x=0)=0$

③ שיפוע $\frac{dv}{dx}(x=L)=0$

④ גזירה: $EI\frac{d^3v}{dx^3}(x=L)+P\frac{dv}{dx}(x=L)=0$

מכיוון ש $\frac{dv}{dx}=0$ כאשר $x=L$, לכן ④ ניתנת כ $\frac{d^3v}{dx^3}=0$ כאשר $x=L$

מקבלים

$$\begin{aligned}
&A+D=0 && ①\\
&\lambda B+C=0 && ②\\
&-A(\lambda\sin\lambda L)+B(\lambda\cos\lambda L)+C=0 && ③\\
&A\lambda^3\sin\lambda L-B\lambda^3\cos\lambda L=0 && ④
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&\lambda&1&0\\-\lambda\sin\lambda L&\lambda\cos\lambda L&1&0\\\lambda^3\sin\lambda L&-\lambda^3\cos\lambda L&0&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כדי לקבל תוצאות שלא טריוויאליות הדטרמיננט חייב להיות שווה ל 0.

לפי הערוך הקודם:

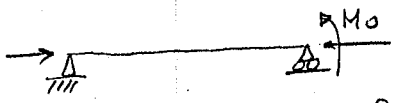
$$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&\lambda&1&0\\-\lambda\sin\lambda L&\lambda\cos\lambda L&1&0\\\lambda^3\sin\lambda L&-\lambda^3\cos\lambda L&0&0\end{vmatrix}=0$$

לכן

$$\lambda^4\sin\lambda L=0$$

לכן $\lambda\neq0$ (כדי שהפיתרון לא יהיה $v=0$); לכן $\sin\lambda L=0$ $\Leftarrow$ $\lambda L=n\pi$ או $P_E=\left(\frac{\pi}{L}\right)^2EI$

3.



$v=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x+Cx+D$ $\quad\lambda^2=P/EI$

לפי תנאי השפה:

① $v(x=0)=0$ ③ $v(x=L)=0$

② $EI\frac{d^2v}{dx^2}(x=0)=M=0$ ④ $EI\frac{d^2v}{dx^2}(x=L)=-M_0$

$$\begin{aligned}
&A+D=0 && ①\\
&-A\lambda^2=0 && ②\\
&A\cos\lambda L+B\sin\lambda L+CL+D=0 && ③\\
&EI\left(-A\lambda^2\cos\lambda L-B\lambda^2\sin\lambda L\right)=-M_0 && ④
\end{aligned}$$

$A=0$ $\Leftarrow$ $D=0$ $\Leftarrow$ $B\sin\lambda L+C=0$ $\Leftarrow$ $B\left(EI\lambda^2\sin\lambda L\right)=M_0$ $\Leftarrow$ $B=\frac{M_0}{EI\lambda^2\sin\lambda L}$

ולכן $C=-\frac{M_0}{EI\lambda^2L}$

לכן,

$$v=\frac{M_0}{EI\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda L}-\frac{x}{L}\right)$$

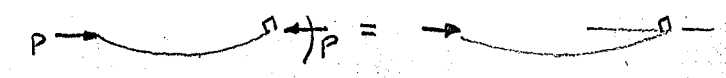
$$\boxed{v=\frac{M_0}{P}\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda L}-\frac{x}{L}\right)}$$

לקבל $M(x)$, צורה פשוטה לפי x: $M=EI\frac{d^2v}{dx^2}=EI\frac{M_0}{P}\lambda^2\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda L}=-M_0\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda L}$

מכיוון נתון לפי הסכמת הסימנים,

$M(x)=-M_0\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda L}$

כדי לקבל θ_A, בדיוק באותו $\theta=\frac{dv}{dx}=\frac{M_0}{EI\lambda\sin\lambda L}(1-\cos\lambda L)$

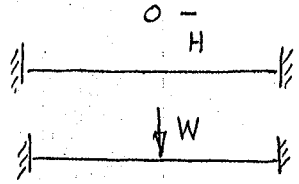


לכן $\theta\big|_{x=L} = \frac{Pa}{D}\left(\frac{1}{\lambda}-L\cot\lambda L\right)$ וכי הזווית קטנה $\Delta_c = a\theta\big|_{x=L}$

לקורה בגודל אנכית על $90°$. לכן,

$$\Delta_c = \frac{ae}{L}\left(1-\lambda L\cot\lambda L\right)$$

2.



מתנור את

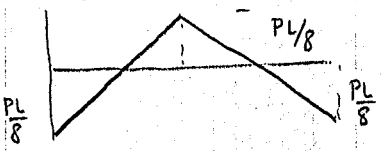
מיתרים את

והתגובה היא $\Delta_{st} = v = \frac{WL^3}{192EI}$

לפי הנוסחה $P_{dyn} = W\left(1+\sqrt{1+2H/\Delta_{st}}\right)$, כאשר נמצאנו את Δ_{st}, נמצאנו את P_{dyn}.

לנמצא את המומנט המקס. לפי הנוסחה שנתונה ב- COOK & YOUNG, $v = \frac{P}{48EI}(3Lx^2-4x^3)$

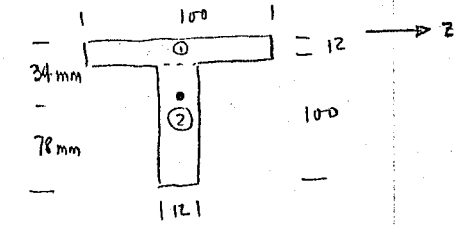
ו- $EI\frac{d^2v}{dx^2} = M$. לכן, $M = \frac{P}{48}(6L-24x)$. כאשר $x=0$ $M=\frac{PL}{8}$; כאשר $x=\frac{1}{2}$, $M=-\frac{PL}{8}$, וגרף המומנט



לכן יש שלושה מקומות שבהם המומנט הוא מקסימלי, והמאמץ המקסימלי הוא $\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{PL}{8}\frac{b}{\frac{1}{12}bh^3}$

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{3}{4}\frac{PL}{bh^3}}{\frac{3}{4}\frac{LW}{bh^3}\left(1+\sqrt{1+\frac{2H}{WL^3/192EI}}\right)}$$

12.10



שטח החתך הוא $2400\ mm^2 = 2(100\times12)\ mm$

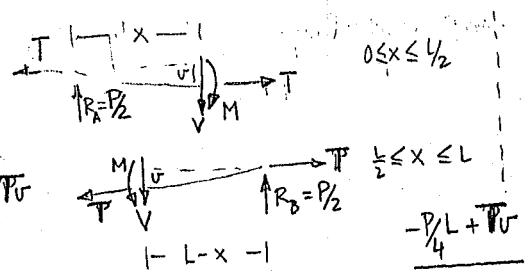
מרכז הכובד הוא

	A	y	Ay
①	100×12	6	7200
②	100×12	62	74400
	2400		81600

$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{A} = 34\ mm$

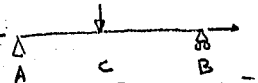
העומס הקריטי פרש $T_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ מפני המאכים, שאחד נייח ואחד נייד.

בכלל העומס הדרוש, לגמומנט בקורה הוא המומנט שנמצא בקורה בלי העומס הדרוש, נוסף המומנט שנוצר מהעומס הדרוש, שהוא P; ש השני התגובה בשולחן, אקוים שמתאזנים את המומנט

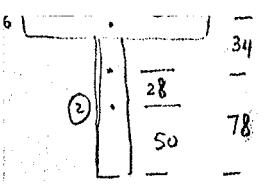


לכן, המומנט המקס. נמצא ב- $x=\frac{1}{2}$ והוא $-\frac{PL}{4} + Tv$

כדי למצוא את $v\big|_{x=\frac{1}{2}}$, ודרוש משוואת הדיפרנציאלית $v = A\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x + Cx + D$ ו- $\lambda^2 = \frac{T}{EI}$ בכל חלק מהקורה.



כאן A-C, $v_L = A\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x + Cx + D$ צורת אומרת שצריך להשתמש ב- C-B. קרוי השפה $v_R = \bar{A}\cosh\lambda(x-\frac{1}{2}) + \bar{B}\sinh\lambda(x-\frac{1}{2}) + \bar{C}(x-\frac{1}{2}) + \bar{D}$, $v_L(x=0)\overset{(1)}{=}0$, $v_L''(x=0)\overset{(2)}{=}0$, $v_R(x=1)\overset{(3)}{=}0$, $v_R''(x=1)\overset{(4)}{=}0$. ב- C $v_L(x=\frac{1}{2})\overset{(5)}{=}v_R(x=\frac{1}{2})$; $v_L'(x=\frac{1}{2})\overset{(6)}{=}v_R'(x=\frac{1}{2})$; $v_L''(x=\frac{1}{2})\overset{(7)}{=}v_R''(x=\frac{1}{2})$; $EIv_L'''(x=\frac{1}{2}) - Tv_L''(x=\frac{1}{2}) \overset{(8)}{=} EIv_R''' - Tv_R'' + P$. שלה תקבל רביעות, שלה שמונה משוואות לקבל $A,B,C,D,\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D}$. M-(1), (2), (4) $\Rightarrow A=D=\bar{A}=\bar{D}=0$. M- (7) $\Rightarrow B=-\bar{B}$. M- (6) $\Rightarrow \bar{C}=C$; M- (5), (7) $\Rightarrow$



	I	A	d^2	I_{tt}
①	$\frac{1}{12}(100)(12)^3$	1200	$(28)^2$	955200
②	$\frac{1}{12}(12)(100)^3$	1200	$(28)^2$	1940800

$2,896\times10^{6}\ mm^4$

$x=\frac{1}{2}$

$$v\Big|_{x=1/2} = P\left\{\frac{\sinh\lambda\frac{1}{2}}{2T\lambda\cosh\lambda\frac{1}{2}} - \frac{L}{4T}\right\}$$

$2EI\lambda^3\cosh\lambda\frac{1}{2}$ $2EI\lambda^2$

בדיק לפרט λ לתשב ולת T. ולם בדיק לפרט I.

$$\lambda = \sqrt{\frac{120,000}{(200\times10^3)(2.896\times10^{-6})}} = .4552\ ,\quad T_E = \frac{\pi^2EI}{L^2} = 635164N > T.$$

$$v\Big|_{x=1/2} = P\left\{\frac{0.7371}{2(120,000)(1.2423)(.4552)} - \frac{3}{4(120000)}\right\}$$

$$= P\,(8.19\times10^{-7}\ m/N)$$

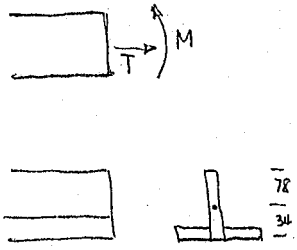
לכן המומנט יהיה $M = -\frac{PL}{4} + T\cdot P\times8.19\times10^{-7}$

$$M = P\left[-0.75 + .09828\right] = -.65172P$$

התפלגות המומנט המקסימלי.

$$\sigma = \frac{T}{A} + \frac{Mc}{I}$$

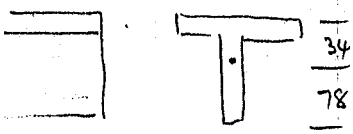
שלם בורת התתק כמו משורג שאלה:



$$\sigma_{\text{עליון}} = \frac{120,000}{2400\times10^{-6}} - \frac{0.65172(.078)P}{2.896\times10^{-6}} = -130\times10^6 \qquad P = 10,250\ N$$

$$\sigma_{\text{תחתון}} = \frac{120,000}{2400\times10^{-6}} + \frac{0.65172(.034)P}{2.896\times10^{-6}} = 130\times10^6 \qquad P = 10,451N$$

שלם בורת התתק כמו משורג שאלה:

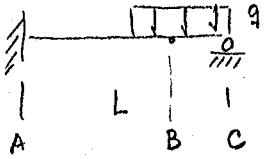


$$\sigma_{\text{עליון}} = \frac{120,000}{2400\times10^{-6}} - \frac{0.65172(.034)P}{2.896\times10^{-6}} = -130\times10^6 \qquad P = 23,515N$$

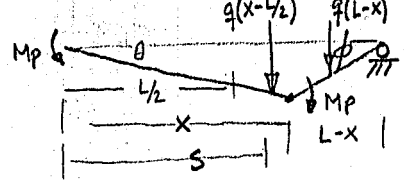
$$\sigma_{\text{תחתון}} = \frac{120,000}{2400\times10^{-6}} + \frac{0.65172(.078)P}{2.896\times10^{-6}} = 130\times10^6 \qquad P = 4556\ N$$

לכן, העומס הגבוה ביותר הוא כאשר לשלח התתק יש בורה כמה ⊤

11.26



כאשר שהמומנט מגיע לM_p, פרק פלסי קורה בסמך התמום ובם בנקודה B
בדיק למצוא את מקום נקודה B ומהיכן העומס המפורס שגורם ל-M_p



$$\theta x = \phi(L-x)$$

$$\phi = \frac{x\theta}{L-x}$$

$$s = \tfrac{1}{2}(x+\tfrac{1}{2})$$

מלפיום ϕ ו-s ביחסים ופותרים בשביל q
לפי עקרון העבודה הוירטואלית

$$\phi\tfrac{2}{2}(x-1)(x-1)q + s\theta\,(\tfrac{1}{2}-x)q = (\phi+\theta)M_p + \theta M_p$$

$$q = \frac{8M_p(12-x)}{7(L^2-4x^2-x15)}$$

כדי למצוא את ה-q שגורם לM_p, גוזרים q לפי x
ומקבלים ש- $2L+x19-4x^2=0$. מכאן יש לפשוט את
$\frac{19\pm\sqrt{19^2-16}}{8}=x$. שמים x בנוסחה של q כדי לקבל $q=19.18\frac{M_p}{L^2}$
שווי מקבל בחלק BC נותן ש-R_2 שווה ל$\frac{6.194M_p}{L^2}$

$$v = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x + Cx + D$$

לפי תנאי השפות על הקורה.

כדי לקבל את הדרך לפתור את הבעיה נציב ב-

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} + Pv = M_t$$

כאשר $P=0$

$$EI\frac{d^2v_t}{dx^2} = M_t$$

פה M_t הוא המומנט שהיו מעומסים אנכיים בלבד, ו-v_t הוא התגובה בכוון y שנובעת מהעומס האנכיים. מניחים שבעקרת עיקום התגובה יהיה אותו סדר עם או בלי הכוח האופקי P.

לכן, לפי תנאי השפה, כאן קורה על סמך נייד וסמך נייד, מניחים ש- $v = \bar{v}\sin\frac{\pi x}{l}$

ו- $v_t = \bar{v}_t\sin\frac{\pi x}{l}$. $\bar{v}$, ו- $\bar{v}_t$ הם ה- AMPLITUDE של v ו- v_t. לפי הנוסחאות למעלה

$$EI\frac{\pi^2}{l^2}\bar{v}_t - P\bar{v} = -EI\frac{\pi^2}{l^2}\bar{v}$$

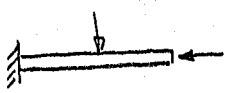
מפני ש- $P_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, $P_E\bar{v}_t = (P-P_E)\bar{v}$ או

$$\bar{v} = \frac{\bar{v}_t}{1 - P/P_E}$$

המומנט עם כן עקב אחרי נוסחא דומה לזה

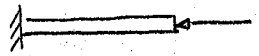
$$M = \frac{M_t}{1 - P/P_E}$$

אם P תיוצר, $\bar{v} > \bar{v}_t$ ו- $M > M_t$. אם P שלילי, $\bar{v} < \bar{v}_t$ ו- $M < M_t$





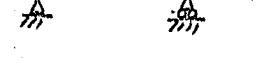
ביתר וקבל את v מניח העומס או בכוון מקום אחר. קורא לזה $\bar{v}_t$.



v יהיה קבל P_E לקורה עומסה כמו בקורה

$$v = \frac{\bar{v}_t}{1 - P/P_E}$$

בתרגיל בית 12.10



כי P היה שלילי.

$$T_E = \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad \bar{v}_t\Big|_{x=l/2} = \frac{PL^3}{48EI}, \quad \text{ו-} \quad v = \frac{\bar{v}_t}{1 + T/T_E}$$

כמו שאמרנו בשבר שסך כל האנרגיה הוא האנרגיה שאגרה מהמומנטים הפנימיים והאנרגיה שהגיעה מהכוחות החיצוניים. הפוטנציאל הכולל,

$$\Pi = U - W_e = U + \Omega$$

U - האנרגיה האלסטית ו- W_e העבודה מהכוחות החיצוניים. לשיווי משקל

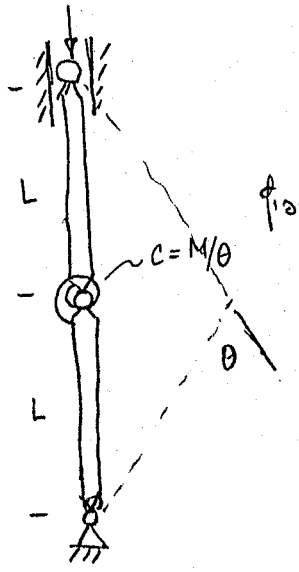
$$\delta\Pi = \delta U - \delta W_e = 0$$

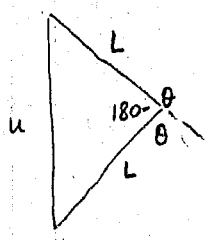
למצב יציב (STABILITY), צריך לבדוק $\delta^2\Pi$, כי לפי TAYLOR SERIES

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \dots$$

שיווי משקל דורש $\delta\Pi = 0$ ומצב יציב נייטרלי דורש ש $\delta^2\Pi = 0$ ואז ניתן את העומס הקריטי.

דוגמא: למצוא העומס הקריטי לדוגמא דרכה חופשי אחת. שתי המוטות קשיחים עם קפיצי השפת נ"ד. קפיץ לינארי סיבובי בקשיחות $C = M/\theta$ קושר את שתי המוטות, θ זווית בין המוטות, M המומנט הקפיץ שם הכוח P כך למטה





$$u = \sqrt{2L^2 - 2L^2\cos(180-\theta)}$$
$$= 2L\cos\theta/2$$

מצי שהמוטות קשיחים $\Rightarrow \delta U = 0$

עבודת הכוח P והמומנט M $\Rightarrow \theta M - \frac{1}{2}P(2L - 2L\cos\theta/2)$; עבודת הקפיץ היא - הפוטנציאל

$$\cos\theta/2 \sim 1 - \frac{1}{2!}(\theta/2)^2 + \dots$$

לכן $\Pi = \frac{1}{2}C\theta^2 - 2LP\left(1 - \cos\theta/2\right) = \frac{1}{2}C\theta^2 - 2LP\left(\frac{\theta^2}{8}\right)$

$$\delta\Pi = \delta\theta\left(C\theta - \frac{LP\theta}{2}\right) = 0$$

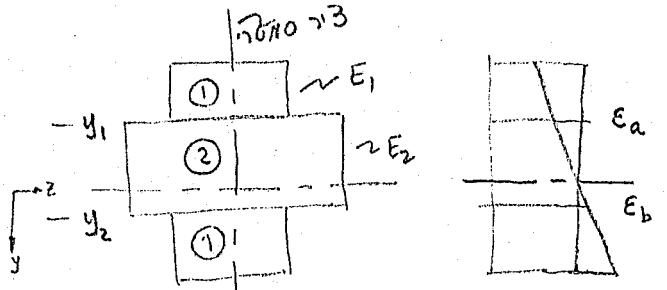
לכן, או $\theta = 0$ או $P = 2C/L$. צריך למצוא $\delta^2\Pi$

$$\delta^2\Pi = \delta\theta^2\left(C - \frac{LP}{4}\right)\theta + \delta\theta^2\left(C - \frac{LP}{4}\right) = 0$$

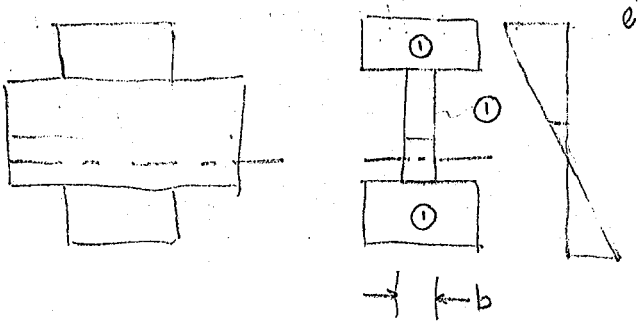
מצי ש- $\delta\theta \neq 0$ כאשר $\theta = 0 \Leftarrow C - \frac{LP}{4} = 0$ ואז $P_{קריטי} = \frac{2C}{L}$

בשונה מהנדסה אזרחית: קורה מבטון - בטון המחוזק בברזל הומוגנית בנויה

- נניח שיש חתך מורכב משני חומרים
- לפי הקורה בפועל, ההנחה היסודית מתפיסה שישור נשאר ישר ... אזי פועלת ... שאישור שני חומרים שונים יהיו משתנה משור שלהי הכפיפה.



- נניח שרוצים לבנות חתך הומוגני מסוים שאך שינוי למידות חלק ① ולפי שינוי לגובה לחלק ② ...
- נניח ש- $n = E_2/E_1$ ו- n פחות מהחד.
- מאשר שני החומרים שונים מפני ש- $E_1 \neq E_2$ אבל, דבר, החומרים פועלים יחד לשני, הגיבור הוא שותף
- מפני שהגיבור שותף דבר בחלק החדש צריך לשנות שותף גיבור.
- מגיבור שחומר ② נוגע הוא $\int_{-y_1}^{y_2} \sigma_x \cdot dy \cdot b_2 = \int_{-y_1}^{y_2} E_2 \epsilon_2 \cdot b_2 \cdot dy$. לכן חומר ① $\int_{-y_1}^{y_2} E_1 \epsilon \cdot b \, dy$



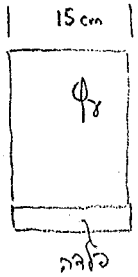
$$E_1 b = E_2 b_2$$
$$b = \frac{E_2}{E_1} b_2 = n b_2$$

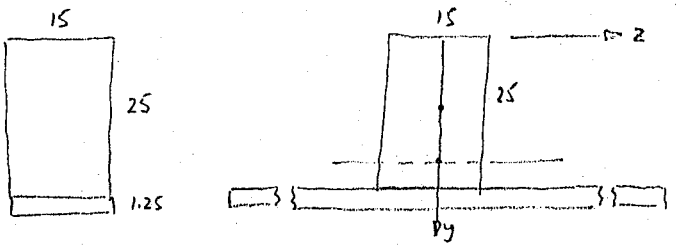
- החתך החדש נקרא החתך השקול הנקרי (Equivalent Section)
- עכשיו יכולים להשתמש ב- $\sigma_{max} = \frac{Mc}{I}$ בחלק הלא נשתנה. בחלק החדש $\sigma_{max} = \frac{Mc}{nI}$
- להתלהב חומר ① לחומר ②, b_1 ישתנה ל- $a = b_1 \frac{E_1}{E_2} = b_1/n$

באותו מקום תלבושתם כלפי המומנט אותו דבר.
- מפני שהכוח שווה בקורה המקורית והקורה השקולה הנקרי, והכוח הפנימי נשאר

דוגמא: המומנטים המקסימלי בעץ ובפלדה

קורה תיבה מומנט כפיפה של 27,115 N-m מסביר הציר האנכי
חלק התחתון הוא מפלדה שהמודול Young $E_s = 2.0686 \times 10^{11}$ Pa
חלק העליון הוא מעץ שהמודול Young $E_w = 1.0343 \times 10^{10}$ Pa
קורה מורכבת מפני חומרים יש חתך השקול כבשיטוק



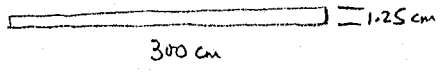


1. לחשב את המיקום של מרכז הכובד
2. לחשב את מומנט ההתמד הכולל
3. לחשב את מומנט ההתמד האינרציה
4. לחשב את המתחים

1. מחליפים את הפלדה בבטון

$E_s/E_w = 20$

$E_s b_s = E_w \cdot b_w$



לכן מידת החלק המוחש

	$\bar{y}$	A	$\bar{y}A$
①	12.5	375	4687.5
②	25.63	375	9611.25
		750	14298.75

$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma A} = 19.065 cm$

$I_{tt} = I_{zz} + A d^2$

	I_{zz}	A	d^2	I_{tt}
①	$\frac{1}{12}(15)(25)^3$	375	$(19.065-12.5)^2$	$19531.25 + 16162.21 = 35693.46$
②	$\frac{1}{12}(300)(1.25)^2$	375	$(19.065-25.63)^2$	$48.83 + 16137.6 = 16186.43$
				$51879.89\ cm^4$

- המאמץ המקסימלי בקרש הוא

$\frac{27115 \cdot 19.065 \cdot 100}{51879.89} = \frac{Mc}{I} = \sigma_{w_{max}}$

$996.431\ N/cm^2 =$

$9964313\ N/m^2 = \sigma_{w\ max}$

- המאמץ המקסימלי בפלדה הוא
המרחק בקרש השקול מלמעלה כפול n

$n \sigma_w = (\sigma_s)_{max}$

$\frac{20 \cdot 27115 \cdot 100 \cdot 7.185}{51879.89} = (\sigma_s)_{max}$

$7510.47\ N/cm^2 =$

$75104737\ N/m^2 = \sigma_{s\ max}$

בגישור הסמוך ליניו חומרים (interface)

$310.19 \frac{N}{cm^2} = \frac{27115 \cdot 5.935 \cdot 100}{51879.89} = \frac{My}{I} = \sigma_w$

$6203.85 \frac{N}{cm^2} = 20 \cdot \frac{27115 \cdot 5935 \cdot 100}{51879.89} = \sigma_s$

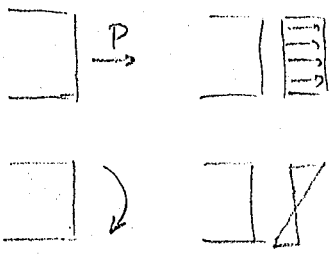
$\sigma_s = 20\, \sigma_w$

$3.\times 10^{-4} = \frac{3101900}{} = \sigma_w / = \epsilon_w$ $\qquad \sigma_s / = \epsilon_{\cdot} - 62038500 = 3.\times 10^{-4}$

יכולת נשיאת עומסים אלסטית של חתכים (ELASTIC LOAD CARRYING CAPACITY OF SECTIONS)

כדי למצוא את יכולת הנשיאה האלסטית של חתכים צריך לדעת את כל העומסים הפועלים על שטח-החתך. (TO KNOW LOAD CARRYING CAPACITY, NEED TO KNOW LOADS ACTING ON CROSS-SECTION)

אנו, יכולים למצוא את המאמצים דרך המשוואות הרגילות. כזכור אומרת ש-לעומס סיבי המאמץ הוא



$$\sigma_x = P/A$$

לעומס - שעוה כפיפה

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

ביחד שניהם נותנים העומסים הפועלים על שטח-החתק. אנחנו יכולים לתכנן (DESIGN) את שטח-החתק לפי המאמץ המקסימלי.

The two give the load working on the cross-section

what if axial load only $\sigma_x = P/A$ נניח שרק העומס הסיבי פועל על הקורה. מה המאמץ המקסימלי? ואיפה הוא פועל? ברור מקום בשטח-החתק. לכן יש ש-המאמץ מגיע ל-מאמץ

where is it

lower-bound define for ductile

בהנחה, הקורה פועלת כ-קורה אלסטית ו- $\sigma_{x_{max}} = \sigma_{yp} = P/A$

- לכן, אם יש שטח-חתק מסוים שאנחנו צריכים להשתמש בו, יכולים למצוא את העומס המקסימלי: $P = \sigma_{yp} A$

To find max load for given A

- אם יש עומס מסוים שאנחנו צריכים לתמוך, יכולים למצוא את שטח-החתק: $A = \sigma_{yp}/P$

To find cross-section to given load.

בדרך כלל, על רוב שהמאמץ מגיע ל- σ_{yp}. אנחנו מתכננים (DEFINE) מאמץ מסוים

Defining safety factor

$$\sigma_{allow} = f\,\sigma_{yp}$$

σ_{allow} - מאמץ המותר

f - מספר הצדדה בחות מאחד שמקטין את המאמץ המקסימלי לביטחון בתיכון האלסטי - המקדם בטיחות (SAFETY FACTOR)

לכן: צריכים להחליף σ_{yp} בכול המשוואות ב- σ_{allow}

replace all σ_{yp} by σ_{allow}

$$P_{max} = f\sigma_{yp} A = \sigma_{allow} \cdot A$$

$$A_{\text{תיכנון}} = P/f\sigma_{yp} = P/\sigma_{allow}$$

for bending

עם קורות כפיפות גם עושים את החישוב והתיכנון הזה

נניח ש"ט רק עומס שקורה בכיפה. מהו המאמץ המקסימלי ואלו מקרו הוא פועל

- כאשר האלמנט המקסימלי מגיע ל-σ_{yp}, σ_{yp}, הכניעה (To become ductile) להתנהגות אלסטו-פלסטית

$$\sigma_{max} = \sigma_x = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} = \sigma_{yp}$$

SECTION MODULUS

S - מודול החתך $S = I/c$

- לכן אם יש שטח-חתך מסוים שאנחנו צריכים להשתמש בו, S יודע לנו ובולים למצוא את מומנט הכפיפה המקסימלי

$$S\sigma_{yp} = M_{max}$$

והשאלה שאלה ל- M_{max} היא $Q = M_{max}/l$

- אם יש מומנט מסוים, אפשר למצוא את ה- מודול החתך $S = \frac{M}{\sigma_{yp}}$

- כמו שציינו, לא משתמשים, בדרך כלל, באלמנט הכניעה אלא באלמנט המותר σ_{allow}

לכן $M_{max} = S \cdot \sigma_{yp} \cdot f = S \cdot \sigma_{allow}$ או $Q_{כפיפה\ מקס} = \frac{S \cdot \sigma_{allow}}{l}$

$S_{תיכנון} = \sigma_{yp} \cdot f / M = M / \sigma_{allow}$ או $S_{תיכנון} = \frac{l \cdot Q_{כפיפה}}{\sigma_{allow}}$

נניח ש- Q ו- P פועלים יחד

לכן $\sigma_{x\ max} = P/A \pm \frac{Mc}{I} = P/A \pm \frac{Qlc}{I}$

כאשר $\sigma_{x\ max} = \sigma_{yp}$ הגענו לקריטריון הפלסטי.

דוגמא: קורה בשטח חתך מלבני

$$\sigma_{yp} = \sigma_{x\ max} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Ql \cdot h/2}{A \cdot h^2/12} = \frac{P}{A} + \frac{6Ql}{A \cdot h}$$

ר.ב. - יש חומרים שבירים (BRITTLE) שלא סובלים מאיבוד חתך לפני שהם נקרעים באלמנט. לכן התמוטטות או נכשלת כאשר האלמנט מגיע לאלמנט הסופי (ULTIMATE STRESS) באלמנט החומרים השבירים.

$\sigma_{max} = \sigma_x = \sigma_{UTS} = \frac{Mc}{I}$ או

$\sigma_{max} = \sigma_x = \sigma_{UTS} = P/A$

צריך להבהיר שחומר פלסטי יכול להיות גם לינארי וכאן צריך למצוא את הפיזור שנמצא ב-נקודה 0. חומר פריך ומוריס אחרים הולכים אחרי הדוגמא הבאה, כמו שכולן כבר למצוא את המאמץ הכניעה לחומרים הללו משתמשים בשיטת היסוי (OFFSET METHOD) שהוא 0.2% לימין הנקודה 0 (נקודה c). משרטטין קו לינארי מקביל לפיזור שנמצא מנקודה 0. הנקודה שבה קווי חותך את הגרף (A) קורסת לנו את נקודת הכניעה.

אלא על פי שיכלנו את הקורה גם להתמוטט בצורה גבוהה ובאחת ולפתע, גם יכלנו את הקורה גם להתמוטט בשבירה, על פה נדון בהמשך.

נדגיש על שני מדגים שאנו צריכים לפתור בעיית כפיפה קורה.

① **שאלה**: למצוא העומס המקסימלי שאפשר לפזול על הקורה עבור קורה נתונה ומומר נתון.

$\sigma_{allow} = \pm 1.2 \times 10^8 Pa$

$M_{max} = \frac{qL^2}{2} = \frac{2\times10^4 (4)^2}{2} = 16\times10^4 N\text{-}m$

$I = \frac{bh^3}{12} \quad c = \frac{h}{2} \quad S = I/c = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6} = \frac{10\times(20)^2}{6} = 6.67\times10^2 cm^3 = 6.67\times10^{-4} m^3$

$\sigma_{max} = \frac{M}{S} = \frac{16\times10^4 N\text{-}m}{6.67\times10^{-4} m^3} = 2.4\times10^8 N/m^2 > \sigma_{allow}$

לכן הקורה תתמוטט!

תשובה: לאבטל את העומס המקסימלי, שאותו נוכל לקרוא עומס סי... והגאומטריה שלה נתונים.

$$M_{max} = q\frac{L^2}{2} = \sigma_{allow} \cdot S$$

$$q_{allow} = \frac{2\sigma_{allow} \cdot S}{L^2} = \frac{2(1.2\times10^8)(6.67\times10^{-4})}{4^2} = 1.0\times10^4 N/m$$

(העומס המפוזר distributed load)

$$q_{allow} = q/2$$

לכן רואים שהתשובה כאן יותר מאה שאותה והקורה תאוזן, כי שהקורה לא תיכשל, העומס המפורש צריך להיות ½ ממה שאבטל.

תיכון: לקדוח חורים על הקורה לפי הנתונים - העומס וכך הלאה.

מהו q על הקורה שאפשר לאזן עומס הניתן

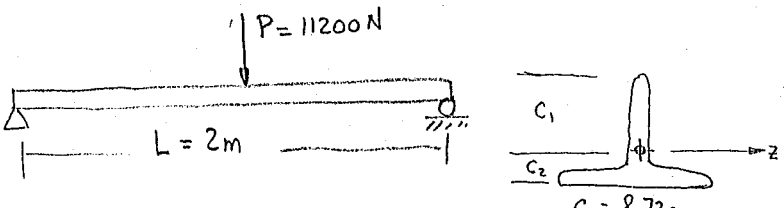
$$S_{allow} = \frac{M_{max}}{\sigma_{allow}} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4}{6}b^3$$

לכן

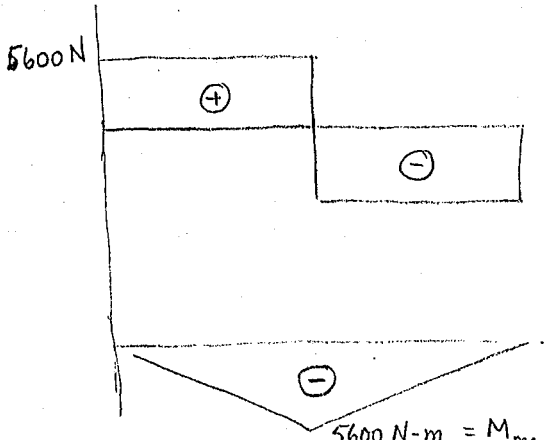
$$b = \sqrt[3]{\frac{6}{4}\frac{M_{max}}{\sigma_{allow}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}\cdot\frac{qL^2}{2\sigma_{allow}}} = \sqrt[3]{\frac{0.75\times2\times10^4\cdot4^2}{1.2\times10^8}} = 12.6\ cm$$

פתרון ב'



$c_1 = 8.72cm$
$c_2 = 3.28\ cm$
$I_{zz} = 366\ cm^4$



נתון: הקורה הרשו"ה
אין הסדוי 21 ⊥
נתונים המאזים המותרים
σ_{allow} מתח $= 10^8 N/m^2 = 100\ MPa$
σ_{allow} לחץ $= 1.8\times10^8 N/m^2 = 180\ MPa$

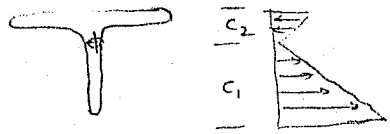
$$\sigma_{max}\text{ לחץ} = \frac{Mc_1}{I_{zz}} = \frac{5600\times8.72\times10^{-2}\ m}{366\times10^{-8}\ m^4} = 1.334\times10^{+8}\ Pa$$

$$\sigma_{max}\text{ מתח} = \frac{Mc_2}{I_{zz}} = \frac{5600\times3.28\times10^{-2}\ m}{366\times10^{-8}\ m^4} =$$

$$(M_{allow})_{\text{לחץ}} = \frac{(\sigma_{allow})_{\text{לחץ}} \cdot I_{zz}}{c_1} = \frac{(1.8\times10^8)(366\times10^{-8})}{8.72\times10^{-2}} = 7555\ Nm$$

$$(M_{allow})_{\text{מתח}} = \frac{(\sigma_{allow})_{\text{מתח}} I_{zz}}{c_2} = \frac{10^8\times(366\times10^{-8})}{3.28\times10^{-2}} = 11,159\ Nm$$

ומה יהיה אם הפכים הפרופיל?



$$(M_{allow}) = \frac{(\sigma_{allow})_{\text{לחץ}} \cdot I_{zz}}{c_2} = \frac{(1.8\times10^8)(366\times10^{-8})}{3.28\times10^{-2}} = 20,085\ Nm$$

$$(M_{allow}) = \frac{(\sigma_{allow})_{\text{מתח}} I_{zz}}{c_1} = \frac{(10^8)\times(366\times10^{-8})}{8.72\times10^{-2}} = 4,197\ Nm$$

בדוגמא הראשונה: $\frac{P_{allow}L}{4} = M_{allow} = 7555\ N\text{-}m$

והכוח שיגרום לימונק הפת הוכל $P_{allow} = \frac{4M}{L} = 15,110\ N$

בדוגמא השניה: $\frac{P_{allow}L}{4} = M_{allow} = 4,197\ Nm$

והכוח הוכל

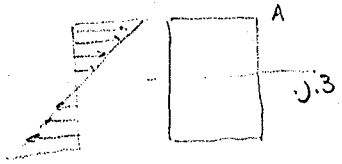
$P_{allow} = 4M/L = 8,394\ N$

לכן, הפרופיל $\top$ יכול לספוג כוח יותר גדול מהפרופיל של $\top$

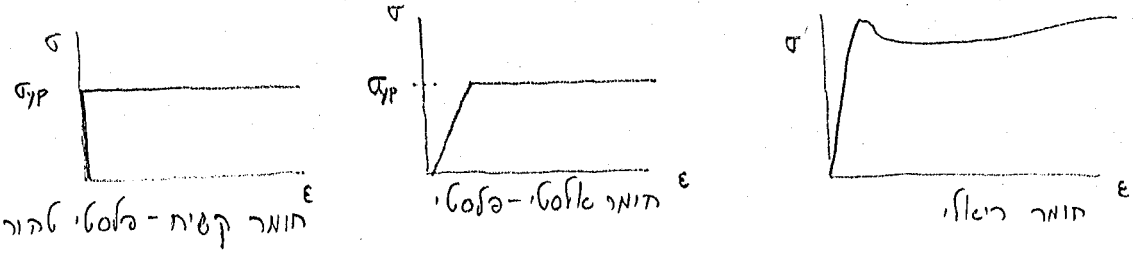
התנהגות פלסטית של חתכים.

נאמרנו ש-שלת החתך מתמדל להיבנן להיכידה כאשר המאמץ המקסימלי, מגיע למאמץ הכניעה: $\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \sigma_{yp}$

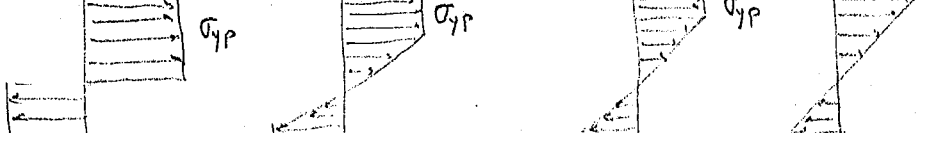
בלמן ההוא, המאמצים בשלת-החתך עדיין לינאריים



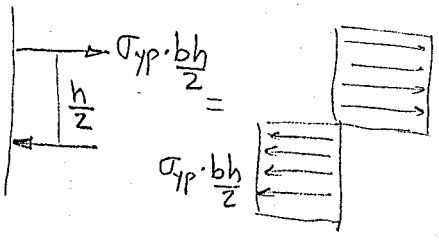
תלוי בהגיעה תיאורית:



נניח שמשתמשים בתיאוריה אלסטי-פלסטי. לכן, כאשר המאמץ מגיע למאמץ הכניעה המאמץ ניפול בשלה הפת. וכאשר היחס מתחיל לגדל, המאמצים מתחת המיתר A מתחילים לגדל עד שמגיעים למאמץ הכניעה וניפולים גם כאשר מגדילים את העומס



כדי לחשב את התנגדות הפלסטית



$$M_p = \sigma_{yp}\cdot\frac{bh}{2}\cdot\frac{h}{2} = \sigma_{yp}\cdot\frac{bh^2}{4}$$

אבל הזכרון שנאבד כאשר המאמץ המקסימלי, בכל הפלטה הוא σ_{yp}

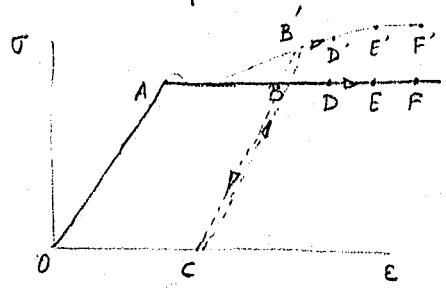
$$M_{yp} = \frac{\sigma_{yp}\cdot I}{c} = \frac{\sigma_{yp}\cdot bh^3/12}{h/2} = \sigma_{yp}\cdot\frac{bh^2}{6}$$

לכן

$$\underline{\underline{M_p = \frac{3}{2}M_{yp}}}$$

והעומס המקסימלי כאשר כל הפלטה סביב שלת מאמץ הכניעה הוא 50% יותר ממה שנאבד בהתחלת הכניעה.

נ.ב.: כאן הגיע הזמן לומר מה קורה כאשר מסירים (remove) את העומס? בדיוק כלל בדיוק לאבדון אותו סימטריות של הפלטה.



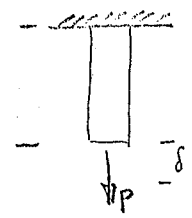
1. יש אזור קבועה שניטרלית $\Rightarrow \overline{OC}$
2. המעבר בין המאמץ והעיבור הוא מקביל למעבר הלינארי $\Rightarrow OA \parallel BC$
3. כאשר מאמיסים את הגוף בהתרה, המעבר הוא על BC בהצורה של B ולאחר-כך הוא ממשיך כרגיל.
4. אי-ק מתקיים את אזור הלינארי (offset distance)

$$\delta = \frac{PL}{AE} = L\cdot\frac{\sigma}{E}$$

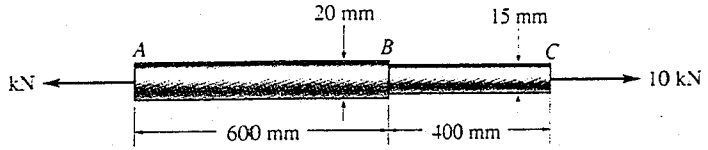
- באזור שמאיים לכניעה $\Rightarrow \delta_{yp} = L\cdot\frac{\sigma_{yp}}{E}$
- שלת מניחים שהעומס הוא שלטי - פלסטי אידיאלי שלו כ- σ_{yp}

שהעומס הולך וגדל באזור הלינארי, המאמץ ניסבר כ- σ_{yp}

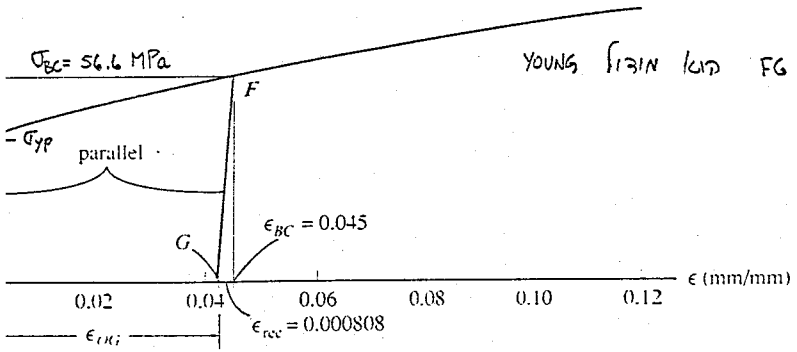
והאזור הלינארי הוא ההבדל בין δ ו- δ_{yp}; δ מקבלים מניסויות



An aluminum rod shown in Fig. 9–19*a* has a circular cross section and is subjected to an axial load of 10 kN. If a portion of the stress–strain diagram for the material is shown in Fig. 9–19*b*, determine the approximate elongation of the rod when the load is applied. If the load is removed, does the rod return to its original length? Take E_{al} = 70 GPa.



(a)



(b)

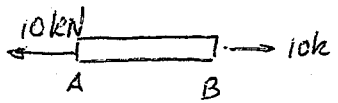
Fig. 9–19

SOLUTION

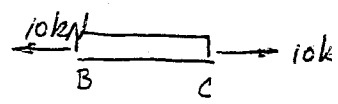
For the analysis we will neglect the *localized deformations* at the point of load application and where the rod's cross-sectional area suddenly changes. (These effects will be discussed in Sec. 10.1.) Throughout the midsection of each segment the normal stress and deformation are uniform.

In order to study the deformation of the rod, we must obtain the strain. This is done by first calculating the stress, then using the stress–strain diagram to obtain the strain. The normal stress within each segment is

$$\sigma_{AB} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi\,(0.01\text{ m})^2} = 31.8\text{ MPa}$$



$$\sigma_{BC} = \frac{P}{A} = \frac{10(10^3)\text{ N}}{\pi\,(0.0075\text{ m})^2} = 56.6\text{ MPa}$$



From the stress–strain diagram, the material in region *AB* is strained *elastically* since σ_{YP} = 40 MPa > 31.8 MPa. Using Hooke's law,

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E_{al}} = \frac{31.8(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0.0004543\text{ mm/mm}$$

The material within region *BC* is strained plastically, since σ_{YP} = 40 MPa < 56.6 MPa. From the graph, for σ_{BC} = 56.6 MPa,

$$\epsilon_{BC} \approx 0.0450\text{ mm/mm}$$

The approximate elongation of the rod is therefore

$$\Delta = \Sigma\epsilon L = 0.0004543(600\text{ mm}) + 0.045(400\text{ mm})$$
$$= 18.3\text{ mm} \qquad Ans.$$

When the 10-kN load is removed, segment *AB* of the rod will be restored to its original length. Why? On the other hand, the material in segment *BC* will recover elastically along line *FG*, Fig. 9–19*b*. Since the slope of *FG* is E_{al}, the elastic strain recovery is

$$\epsilon_{rec} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{al}} = \frac{56.6(10^6)\text{ Pa}}{70(10^9)\text{ Pa}} = 0.000808\text{ mm/mm}$$

The remaining plastic strain in segment *BC* is then

$$\epsilon_{OG} = 0.0450 - 0.000808 = 0.0442\text{ mm/mm}$$

Therefore, when the load is removed the rod remains elongated by an amount

$$\Delta' = \epsilon_{OG} L_{BC} = 0.0442(400\text{ mm}) = 17.7\text{ mm} \qquad Ans.$$

Statically Indeterminate Axially Loaded Member

When a bar is fixed-supported at one end and is subjected to an axial force, the force equilibrium equation applied along the axis of the bar is *sufficient* to find the reaction at the fixed support. A problem such as this, where the reactions can be determined strictly from the equations of equilibrium, is called *statically determinate*. If the bar is fixed at *both ends*, however, as in Fig. 10–11*a*, then two unknown reactions occur, Fig. 10–11*b*, and the force equilibrium equation becomes

$$+\uparrow \Sigma F = 0; \qquad F_B + F_A - P = 0$$

In this case the bar in Fig. 10–11*a* is called *statically indeterminate*, since the equilibrium equation(s) are not sufficient to determine the reactions.

In order to establish an additional equation needed for solution, it is necessary to consider the geometry of the deformation. Specifically, an equation that specifies the conditions for displacement is referred to as a *compatibility* or *kinematic condition*. For the bar in Fig. 10–11*a*, a suitable compatibility condition would require the relative displacement of one end of the bar with respect to the other end to be equal to zero, since the end supports are fixed. Hence, we can write

$$\Delta_{A/B} = 0$$

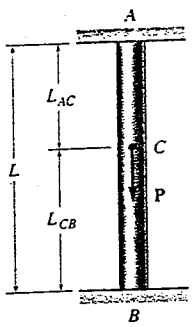
This equation can be expressed in terms of the applied loads by using a *load-displacement relationship*, which depends on the material behavior. For example, if linear-elastic behavior occurs, Eq. 10–2 can be used. Realizing that the internal force in segment AC is $+F_A$, and in segment CB the internal force is $-F_B$, the compatibility equation can be written as

$$\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$$

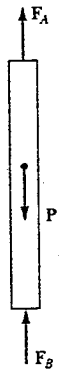
Assuming that AE is constant, we can solve the above two equations for the reactions, which gives

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right) \quad \text{and} \quad F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

To summarize the above procedure, the unknown forces in statically indeterminate problems must be determined by satisfying both equilibrium and compatibility requirements for the bar. To do so it is necessary to transform the compatibility conditions, which involve displacement, into equations that involve force. This is done by using load-displacement relations that describe the material behavior.



(a)



(b)

Fig. 10–11

Superposition of Forces. For some types of problems it may be easier to write the compatibility equation using the superposition of the forces acting on the free-body diagram. This method of solution is often referred to as the *flexibility* or *force method of analysis*. To show how it is applied, consider again the bar in Fig. 10–11*a*. In order to write the necessary equation of compatibility, we will first choose any one of the two supports as "redundant" and temporarily remove its effect on the bar. The word *redundant*, as used here, indicates that the support is not needed to hold the bar in stable equilibrium, so that when it is removed, the bar becomes statically determinate. Here we will choose the support at B as redundant. By using the principle of superposition, the bar having its original loading on it, Fig. 10–11*c*, is then equivalent to the bar subjected only to the external load $\mathbf{P}$, Fig. 10–11*d*, plus the bar subjected only to the redundant load $\mathbf{F}_B$, Fig. 10–11*e*. Although not shown, notice that the reaction at the support A satisfies force equilibrium, $F_A = P - F_B$, as determined either from Fig. 10–11*b* or from the *sum* of the reactions at A in Fig. 10–11*d* and 10–11*e*.

If the load $\mathbf{P}$ causes B to be displaced *downward* by an amount Δ_B, Fig. 10–11*d*, the reaction $\mathbf{F}_B$ must be capable of displacing the end B of the bar *upward* by an amount δ_B, Fig. 10–11*e*, such that no displacement occurs at B, Fig. 10–11*c*, when the two loadings are superimposed.

$$(+\downarrow) \qquad 0 = \Delta_B - \delta_B$$

This equation represents the compatibility equation for displacements at point B, for which we have assumed that displacements are positive downward.

Applying the load–displacement relationship, we have $\Delta_B = PL_{AC}/AE$ and $\delta_B = F_B L/AE$. Consequently,

$$0 = \frac{PL_{AC}}{AE} - \frac{F_B L}{AE}$$

$$F_B = P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right)$$

From the free-body diagram of the bar, Fig. 10–11*b*, the reaction at A can now be determined from the equation of equilibrium,

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad P\left(\frac{L_{AC}}{L}\right) + F_A - P = 0$$

Since $L_{CB} = L - L_{AC}$, then

$$F_A = P\left(\frac{L_{CB}}{L}\right)$$

These results are the same as those obtained previously, except that here we have applied the condition of compatibility and then the equilibrium condition to obtain the solution. Also note that the principle of superposition can be used here since the displacement and the load are linearly related ($\Delta = PL/AE$), which assumes, of course, that the material behaves in a linear-elastic manner.

No displacement at B

(c)

Displacement at B when redundant force at B is removed

(d)

Displacement at B when only the redundant force at B is applied

(e)

תורת החוזק 2

תרגיל מס 3

2.100 The cylindrical rod AB has a length $L = 2$ m and a 32 mm diameter; it is made of a mild steel which is assumed to be elastoplastic with $E = 200$ GPa and $\sigma_Y = 250$ MPa. A force P is applied to the rod until its end A has moved down by an amount δ_m. Determine the maximum value of the force P and the permanent set of the rod after the force has been removed, knowing that (*a*) $\delta_m = 3$ mm, (*b*) $\delta_m = 6$ mm.

(a) 201 kN; 0.5 mm
(b) 201 kN; 3.5 mm

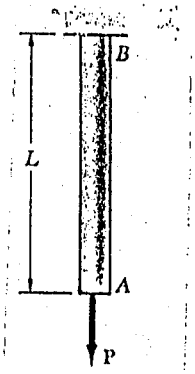


Fig. P2.100 and P2.101

2.102 Rod ABC consists of two cylindrical portions AB and BC; it is made of a mild steel which is assumed to be elastoplastic with $E = 200$ GPa and $\sigma_Y = 250$ MPa. A force P is applied to the rod and then removed to give it a permanent set $\delta_p = 2$ mm. Determine the maximum value of the force P and the maximum amount δ_m by which the rod should be stretched to give it the desired permanent set.

176.7 kN 3.84 mm.

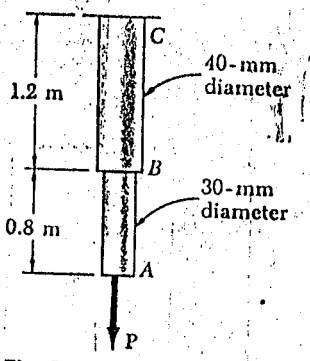


Fig. P2.102 and P2.103

2.104 Rod AB consists of two portions, AC and CB, each 200 mm long and of 1.9×10^{-3} m^2 cross-sectional area. Portion AC is made of a mild steel with $E = 200$ GPa and $\sigma_Y = 250$ MPa, and portion CB of a high-strength steel with $E = 200$ GPa and $\sigma_Y = 350$ MPa. A load P is applied at C as shown. (*a*) Assuming both steels to be elastoplastic, draw the load-deflection diagram for point C. (*b*) If P is gradually increased from zero to 1.080 MN and then reduced back to zero, determine the maximum deflection of C, the maximum stress in each portion of rod, and the permanent deflection of C.

$\delta_m = 0.318$ mm & $\sigma_{AC} = 250$ MPa $\sigma_{CB} = -318$ MPa
$\delta_p = 0.0342$ mm

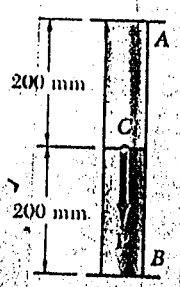


Fig. P2.104

3.76 The solid shaft shown is made of a mild steel which is assumed to be elastoplastic with $G = 77$ GPa and $\tau_Y = 145$ MPa. Determine the maximum shearing stress and the radius of the elastic core caused by the application of a torque of magnitude (*a*) $T = 10$ kN · m, (*b*) $T = 15$ kN · m.

(a) 120.7 MPa, 39.5 mm
(b) 145 MPa, 23.7 mm

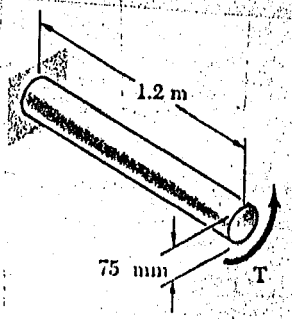


Fig. P3.76

3.84 The hollow shaft shown is made of a steel which is assumed to be elastoplastic with $G = 77$ MPa and $\tau_Y = 145$ MPa. Determine the magnitude T of the torque and the corresponding angle of twist (*a*) at the onset of yield, (*b*) when the plastic zone is 10 mm deep.

(a) 5.96 kN m, 17.98°
(b) 7.31 kN·m, 27.°

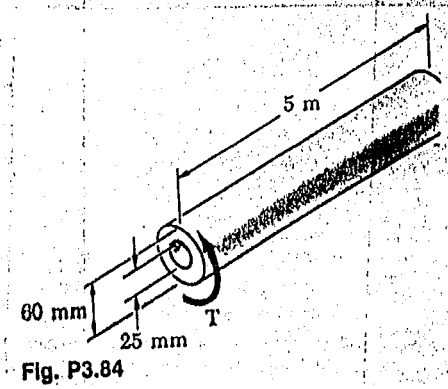


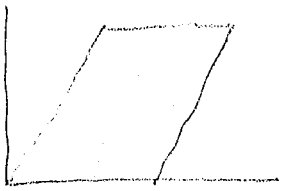
Fig. P3.84

$\sigma_y = P/A$

$P = \sigma_y \cdot A = \sigma_y \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 250\times10^6 Pa \left(\frac{3.14159 \times (.032)^2}{4}\right) = 201,062N$

$A = \frac{\pi d^2}{4} = 8.042 \times 10^{-4} m^2$

$P = 201\ kN$ לפי התשובה של שלמה - בלמה, אז כאלו



$\delta_{yp} = 2.5mm = 1.25\times10^{-3} \cdot 2000\ mm = \epsilon \cdot L = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{250MPa}{200GPa} = 1.25\times10^{-3}$

הוא הארוך האלסטי, הוא התארכות האלסטית בלבד

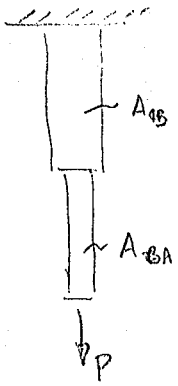
אם התארכות היתה 3mm, אז δ בלמה, הנשאר הוא

$3 - 2.5 = 0.5\ mm$

אם התארכות היתה 6mm, אז התוספת הוא $\delta_{ym} - 6mm$

δ בלמה $= 3.5\ mm$

2.102



$A_{BA}\ \frac{\pi d_{BA}^2}{4} = 7.069\times10^{-4} m^2 = \frac{\pi(.03)^2}{4}$

$A_{CB} = \frac{\pi d_{CB}^2}{4} = 1.257\times10^{-3} m^2 = \frac{\pi(.04)^2}{4}$

מכיוון ש- $A_{CB} > A_{BA}$ קודם $\sigma_{yp} = \frac{P}{A_{BA}}$

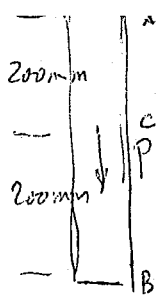
לכן $P = A_{BA} \cdot \sigma_{yp} = 7.069\times10^{-4} \times 250\times10^6 = 176.725kN$

$$\delta = \frac{PL_{BA}}{A_{BA}E} + \frac{PL_{CB}}{A_{CB}\cdot E}$$

$$= \sigma_{yp}\cdot\frac{L_{BA}}{E} + \frac{P}{A_{CB}}\cdot\frac{L_{BC}}{E}$$

$$\delta = 250\times10^6\left(\frac{0.8}{200\times10^9} + \frac{A_{BA}}{A_{CB}}\cdot\frac{1.2}{200\times10^9}\right) = 1.844\times10^{-3} m$$

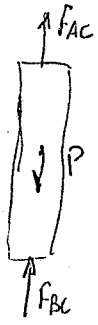
סה"כ δ בלמה, $2_{mm} = \delta$ סה"כ, $3.84mm = 2_{mm} + \delta$



$A_{AC} = A_{BC} = 1.7 \times 10^{-3}\ m^2$

$\sigma_{yp_{AC}} = 250\ MPa$ $\quad E_{AC} = E_{BC} = 200\ GPa$

$\sigma_{yp_{BC}} = 350\ MPa$



$$F_{AC} + F_{BC} = P$$

$$\frac{F_{AC} L_{AC}}{E_{AC} A_{AC}} - \frac{F_{BC} L_{BC}}{E_{BC} A_{BC}} = 0$$

$$F_{AC} = \frac{P L_{BC}}{L} \qquad F_{BC} = \frac{P L_{AC}}{L}$$

$$F_{AC} = P/2 \qquad F_{BC} = P/2$$

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A_{AC}} \qquad \sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}}$$

$$\epsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E_{AC}} \qquad \epsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{BC}}$$

כשהוא מגיע לנקודה B, $(250MPa = \sigma_{yp_{AC}} > \sigma_{AC})$ ולכן

$(1.9 \times 10^{-3})(250MPa) = A_{AC} \cdot \sigma_{yp_{AC}} = F_{AC}$ ולכן,

$$\delta_{AC} = .475\ MN = F_{AC}$$

$$.25mm = 2.5 \times 10^{-4}\ m = \frac{250MPa \cdot .200}{200\ GPa} = \frac{\sigma_{yp} L_{AC}}{E_{AC}}$$

$$.95MN = 2F_{AC} = P$$

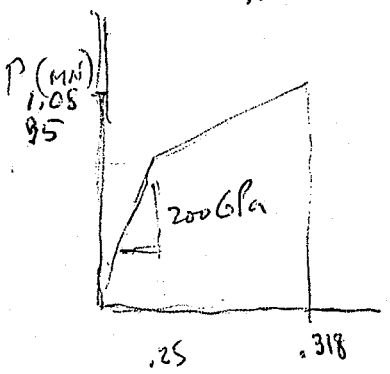
כשהכוח מגיע ל-0.9MN חלק AC מתחיל להיות פלסטי,

ולכן מתקיים $\sigma_{yp} = 250MPa$ הוא

$$\frac{\sigma_{AC}}{E_{AC}} = 1.25 \times 10^{-4} = \epsilon_{AC}$$

$$-250\ MPa = \sigma_{AC} = \sigma_{BC} \quad \Rightarrow \quad .475MN = P/2 = F_{BC}$$

$$-1.25 \times 10^{-4} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{BC}} = \epsilon_{BC}$$



כאשר $P = .95MN$ חלק AC הגיע לנקודת הכניעה, $\sigma_{yp} = 250MPa$ הוא

$F_{AC} = .475MN$ חלק BC עדיין אלסטי, $\sigma_{yp_{BC}} > \sigma_{BC}$, $P = 1.08\ MN$ כאשר $F_{BC} = P - F_{AC}$

$F_{BC} = 1.08 - .475MN = .605\ MN \Rightarrow \sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = -318.42\ MPa$

$\sigma_{yp_{AB}} = 250MPa$ $\quad \sigma_{BC} = -318.42MPa$

$\epsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E_{BC}} = -1.592 \times 10^{-3}\ \frac{mm}{mm}$ ההתכווצות על BC הוא

$\delta_{BC} = \epsilon_{BC} \cdot L_{BC} = -0.318 \times 10^{-3}\ m$ ולכן הכוח על BC הוא

$-0.318mm$ כאשר מורידים את הכוח, חלק AC מאבד את מקורו $\delta_{AC} = .25mm$ ולכן

תורת החוזק 2
תרגיל מס 4

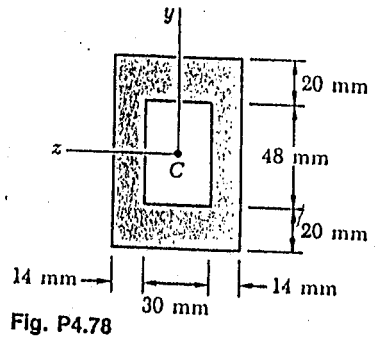


Fig. P4.78

4.78 and 4.79 A beam of the cross section shown is made of a steel which is assumed to be elastoplastic with $E = 200$ GPa and $\sigma_Y = 300$ MPa. For bending about the z axis, determine the bending moment and the radius of curvature at which (*a*) yield first occurs, (*b*) the plastic zones at the top and bottom of the beam are 20 mm thick.

(a) 20.6 kN·m ; 29.3m (b) 26.9 kN·m ; 16. m .

לשאלה: רדיוס הקימורים ומומנט הכפיפה

רדיוס הקימורים $\frac{EI}{M}$ לחלק האלסטי

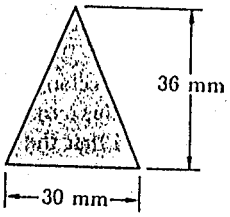
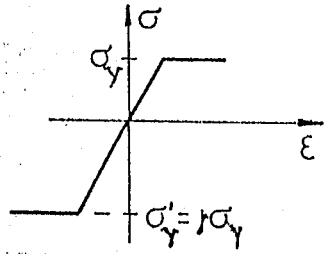


Fig. P4.88

4.88 and 4.89 Determine the plastic moment M_p of a steel beam of the cross section shown when the beam is bent about a horizontal axis. Assume the steel to be elastoplastic with a yield strength of 200 MPa.

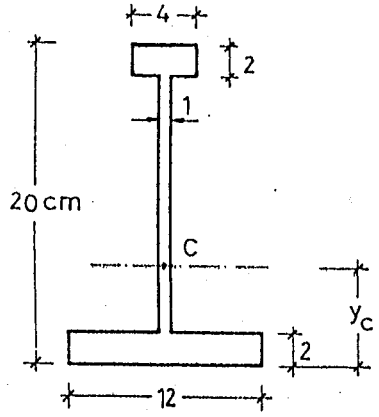
759 N·m .



2.6 בתרגיל: חתך מלבני (bxh) בתון לכפיפה.
החומר - אלסטי פלסטי - אידיאלי, אבל
עם גבול נזילה σ'_y בלחיצה גדול פי γ
מגבול הנזילה σ_y במשיכה.

דרוש:
א) לחשב את מקומו של קו האפס ואת M_{pl}
ב) האם גודלו של M_{pl} שווה במקרה של מומנט חיובי ושלילי?

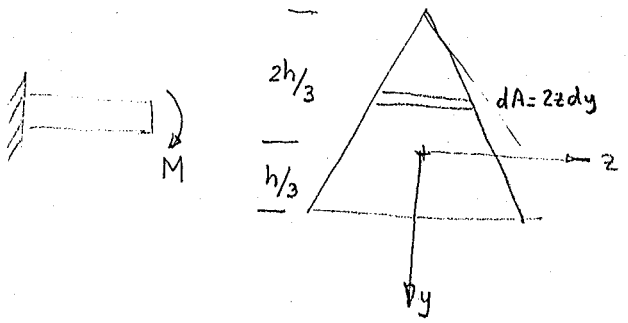
תשובה:
א) $x = h/(\gamma + 1)$;
$$M_{pl} = \sigma_y \frac{bh^2}{2} \frac{\gamma}{\gamma+1}$$



2.16 בתרן: קורת פלדה על 2 סמכים
במיפתח $\ell = 4.0$m עמוסה עומס
מחולק שווה q. חתך הקורה לפי
הציור. $\sigma_y = \pm 240$ MPa ;

דרוש:
א) לחשב את q המותר לפי השיטה
האלסטית,
ב) כנייל, לפי השיטה הפלסטית.

מוצאים את המשוואה בין y ו-z



$z=0 \quad y=-\frac{2h}{3}$

$z=b/2 \quad y=h/3$

m (שיפוע) $=\frac{h/3-(-\frac{2h}{3})}{b/2-0}=\frac{2h}{b}$

$$\boxed{y=\frac{2h}{b}z-\frac{2h}{3}}$$

הכוח בחלק מעל הציר z

$$\iint\sigma dA=\int\int\frac{\sigma_{max}\cdot y}{(-2h/3)}2z\,dy$$

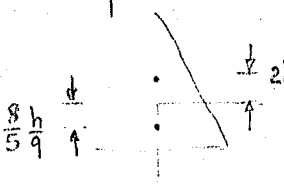
מפני שהמשתנה לינארי בימים y. לכן $\sigma=\frac{\sigma_{max}\cdot y}{(-2h/3)}$

$$=\int_{-2h/3}^{0}\frac{2\sigma_{max}}{(-2h/3)}y\left[\frac{y+\frac{2h}{3}}{2h/b}\right]dy=\frac{2\sigma_{max}}{-4h^2/3b}\left(y^3/3+\frac{2h}{3}y^2/2\right)\Big|_{-\frac{2h}{3}}^{0}=\frac{2\sigma_{max}}{-4h^2/3b}\left[-\left(\frac{-8h^3}{81}\right)-\frac{4h^3}{27}\right]=\frac{2\sigma_{max}\cdot 3bh}{81}=\frac{2\sigma_{max}\cdot bh}{27}$$

הכוח בחלק מתחת הציר z

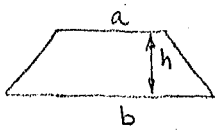
$$\iint\sigma dA=\int\int\frac{\sigma_{max}\cdot y}{(-2h/3)}2z\,dy=\int_0^{h/3}\frac{2\sigma_{max}\,y}{(-2h/3)}\frac{\left(y+\frac{2h}{3}\right)}{(2h/b)}dy=\frac{2\sigma_{max}}{-4h^2/3b}\left(y^3/3+\frac{h}{3}y^2\right)_0^{h/3}=\frac{2\sigma_{max}}{-4h^2/3b}\left[\frac{h^3}{81}+\frac{h^3}{27}\right]=-\frac{2\sigma_{max}bh}{27}$$

לכן סכ"ה של הכוחות הוא אפס, ומכאן הכוחם זה הציר הנטרלי. הכוח בכול חלק הוא $\frac{\sigma_y\cdot bh}{2\cdot 2}=16\,kN$ והמומנט בהתלת הכניסה הוא הכוח



כפול הזרוע $\frac{4h}{9}\left(=\frac{2h}{9}+\frac{5}{8}\frac{4h}{9}\right)$, לכן המומנט הוא $\frac{6.8\,\sigma_y\cdot bh^2}{24\cdot 3}=217.6\,N\cdot m$

עבור



$\bar{I}$ $\bar{y}$ מרכז הכובד $\bar{y}$ נמצא $\frac{h}{3}\frac{2b+a}{b+a}$ מהבסיס התחתון.

כאשר המומנט הכי גדול מגיע ל-σ_{yk}, כלומר, שולי כוח על שטח-החתך, הציר הנטרלי, צריך לחתוך השטח לשניים, כאשר שטחית המתוח הוא $\frac{bh}{4}$.

$$\frac{bh}{4}=\iint dA=\int 2z\,dy=\int_{-2h/3}^{y}\frac{2\left(\bar{y}+\frac{2h}{3}\right)}{2h/b}\bar{y}\,dy=\frac{b}{h}\left(\bar{y}^2/2+\frac{2h}{3}\bar{y}\right)_{-2h/3}^{y}=\frac{b}{h}\left(y^2/2+\frac{2h}{3}y-\frac{4h^2}{18}+\frac{4h^2}{9}\right)=\frac{b}{h}\left(y^2/2+\frac{2h}{3}y+\frac{4h^2}{18}\right)$$

לכן $\frac{bh}{4}=\frac{b}{h}\left(y^2/2+\frac{2hy}{3}+\frac{4h^2}{18}\right)$ ו- $y^2/2+\frac{2h}{3}y-\frac{2h^2}{72}=0$

$$y=-\frac{2h}{3}\pm\sqrt{\frac{4h^2}{9}+\frac{1}{2}\left(\frac{2h^2}{72}\right)}=-\frac{2h}{3}\pm\sqrt{h^2/2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow -1.37377h$

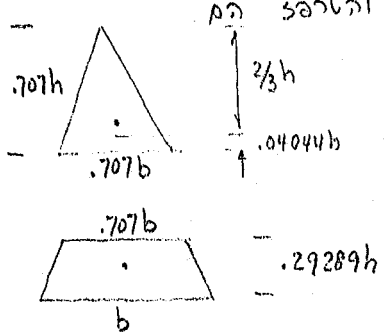
התשובה השנייה בלתי אפשרית

מפני ש $z=\frac{b}{2h}\left(y+\frac{2h}{3}\right)=\frac{b}{2h}\sqrt{\frac{z^2}{2}}=\frac{b}{2\sqrt{2}}$, כאשר $y=0.040444h$ לכן המשולש והטרפז הם

- מרכז הכובד של המשולש הוא $0.2357h$ מהבסיס, מרכז הכובד של הטרפז הוא: $0.1548h$ מהבסיס העליון והמרחק בין שני המרכזים הוא $.3905h$.

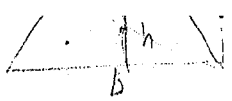
- לכן הכוח של כל חלק הוא $\frac{\sigma_y\cdot bh}{4}=54\,kN$ והמומנט הוא

$$M_{pl}=\frac{\sigma_y\cdot bh}{4}(.3905h)=759.18\,Nm$$



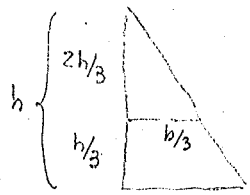
מקדם הצורה Shape factor

$$\frac{M_{pl}}{M_y}=\frac{759.18}{217.6}\approx 3.5$$



$\frac{1}{2}\left(\frac{2a+b}{a+b}\right)h$

A	d	=	
$\frac{1}{2}a\cdot h$	$h/3$		$\frac{1}{6}ah^2$
$\frac{1}{2}b\cdot h$	$2h/3$		$\frac{2bh^2}{6}$
$\frac{1}{2}(a+b)h$			$\frac{1}{6}(2b+a)h^2$



$h : b/2 :: 2h/3 : b/3$

To find for trapezoid

$$\frac{\frac{1}{6}(2b+a)h^2}{\frac{1}{2}(a+b)h}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2b+a}{a+b}\cdot h = \frac{1}{3}\left[\frac{2\cdot b/2 + b/3}{b/3+b/2}\right]\frac{h}{3}$$

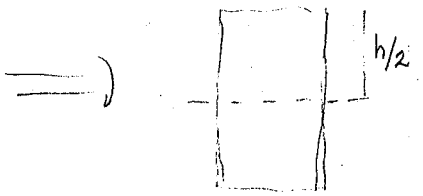
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{60+20}{30+25}\cdot 12 = \frac{80}{55}\cdot 4 = \frac{1}{3}\left[\frac{4b/3}{5b/6}\right]h/3 = \frac{8}{5}\frac{h}{9}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{2}+1}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{2}$$

$$\frac{.292894h}{3}\left(\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}b\right)+b}{\frac{1}{\sqrt{2}}b+b}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(.292894h)$$

$$\frac{2b+\frac{1}{\sqrt{2}}b}{\frac{1}{\sqrt{2}}b+b} = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+1} = \frac{1+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

2.6



כאשר המומנט מגיע ל- q_y למעלה ההתנדנדה המלבן מתניע להבנר. אבל למטה מקוו הנטרלי הוטו אדיין מלוטש.

הכוח למעלה הוטו $= \int \sigma\, b\, dy$ והציר הנטרלי יהיה במו מלבן שאין הבדל מבד המתנות לבד הלחוץ כאשר כל השטח הוטו פלסטי, למלך מעל הציר הכוח יהיה $(s-h)\cdot q\cdot y_0$ והכוח למלך התחתון יהיה $s\cdot q\cdot y_0$ ושניהם בריבים להיות שווים אובל בסימן המפוך. לכן



$$(s-h)q y_0 = (s\cdot q y_0) = s\cdot q y_0 R +$$

$$s-h = sR+$$

$$s = h/1+R$$

בין מרכז הבובד של שני החלקים המרחק הוטו $\frac{h}{2} = \frac{h}{2(1+R)} + \frac{Rh}{2(1+R)}$.

לכן $M_{pl} = \frac{h}{2}\cdot\frac{1+R}{h}\cdot q y_0 R = \frac{h^2 q y_0 R}{2(1+R)}$ בהתלת הבניה $M = \frac{9}{6}h^2 q\cdot y_0$

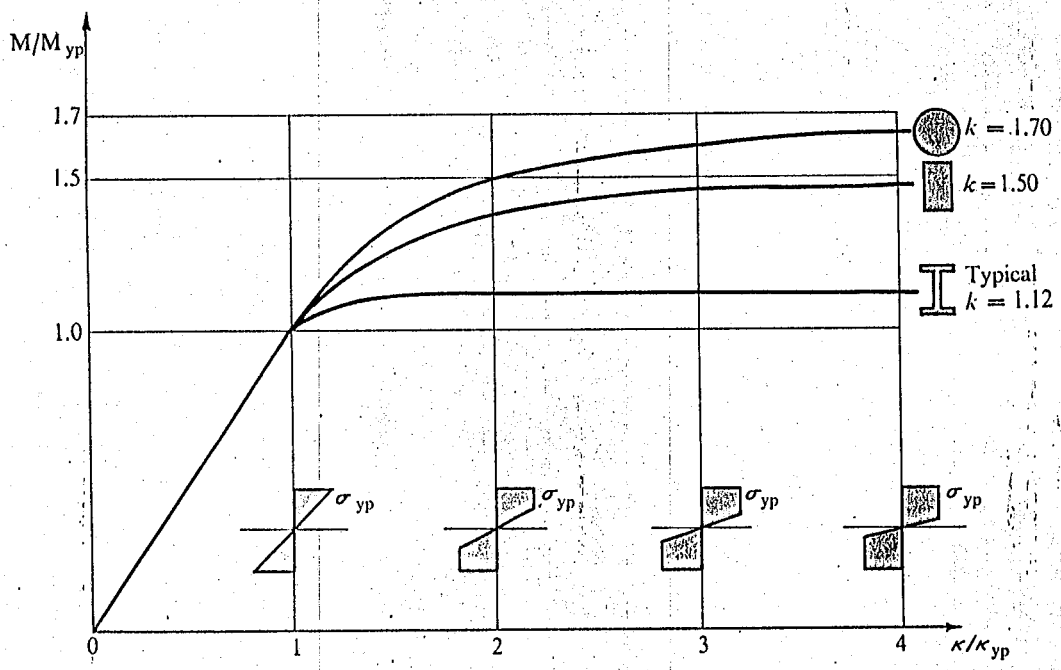


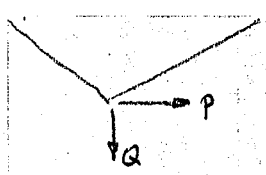
Fig. 12-23. Moment-curvature relations for circular, rectangular, and I cross sections. $M_p/M_{yp} = k$, the shape factor.

Fig. 11-18.) Note especially the rapid ascent of the curves toward their respective asymptotes as the cross sections plastify. This means that very soon after exhausting the elastic capacity of a beam, a rather constant moment is both achieved and maintained. This condition is likened to a plastic hinge. In contrast to a frictionless hinge capable of permitting large rotations at no moment, the plastic hinge allows large rotations to occur at a constant moment. This constant moment is approximately M_p, the ultimate or plastic moment for a cross section.

Using plastic hinges, a sufficient number may be inserted into a structure at the points of maximum moments to create a kinematically admissible collapse mechanism. Such a mechanism, permitting unbounded movement of a system, enables one to determine the ultimate or limit carrying capacity of a beam or of a frame. This approach will now be illustrated by several examples, confining the discussion to beams.

When the limit analysis approach is used for the selection of members, the working loads are multiplied by a load factor larger than unity to obtain the limit loads for which the calculations are performed. This is analogous to the use of the factor of safety in elastic analyses. In structural steel work the term *plastic design* is commonly applied to this approach.

IF WE LOOK AT THE CASE



WE FOUND THAT

$$u = \frac{L}{AE}(1.3969P - .1295Q)$$

$$v = \frac{L}{AE}(-.1295P + .6883Q)$$

נוכל לכתוב את זה כ-

$$u = \delta_{uu}P + \delta_{uv}Q$$

$$v = \delta_{vu}P + \delta_{vv}Q$$

קורלים ל- $\delta_{uu}, \delta_{uv}=\delta_{vu}, \delta_{vv}$

מקדמים אלו (flexibility coeffs), כי הם נותנים את הקשר בין התגובה לעומס

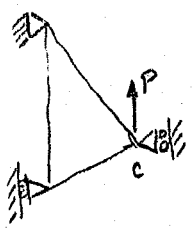
$$\text{תגובה} = \text{עומס} \cdot \text{מקדם אלסטיות}$$

$$\text{לדוגמא } u = \delta_{uu}P$$

δ_{ij} - נותן את היחס בין התגובה i ל- כוח P_j. ורואים ש- $\delta_{ij}=\delta_{ji}$

זה נשפן מקסוול-בטי. זה קורה רק במצב אלסטי.

IN THE FOLLOWING CASE AT C WE FOUND



$$0 = \frac{AE}{L}(1.6v_A - 0.6v_C)$$

$$P = \frac{AE}{L}(-0.6v_C + 1.4v_A)$$

נוכל לכתוב את זה כ-

$$Q = S_{uu}v_A + S_{uv}v_C$$

$$P = S_{vu}v_A + S_{vv}v_C$$

קורלים ל- $S_{uu}, S_{uv}=S_{vu}, S_{vv}$

מקדמים קשיחות (stiffness coeff.) כי הם נותנים את הקשר בין העומס לבין התגובה

$$\text{עומס} = \text{תגובה} \cdot \text{מקדם קשיחות}$$

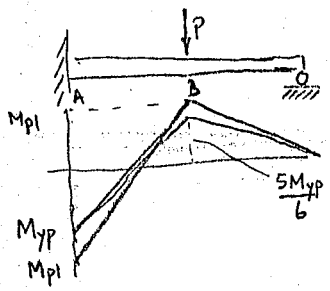
$$\text{לדוגמא } P = v_i S_{uu}$$

S_{ij} - נותן את היחס בין העומס P_i לתגובה v_j. רואים ש- $S_{ij}=S_{ji}$

זה נשפן מקסוול-בטי.

TO CALCULATE COLLAPSE LOAD

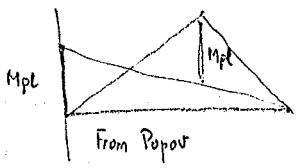
עומס הקריסה



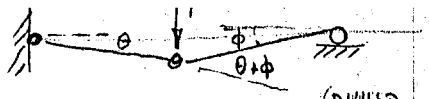
HIGHEST MOMENT AT A $\frac{3PL}{16}$ & $P_{yp} = \frac{16M_{yp}}{3L}$

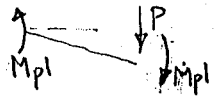
MOMENT AT B $5PL/32$

- WHEN $P > P_{yp}$ PLASTIC REGION FROM A SPREADS UNTIL B REACHES PLASTICITY
- P CONTINUES TO INCREASE UNTIL PLASTIC HINGES (פרק פלסטי) FORM AT A & B & $M = M_{pl}$ AT BOTH PLACES
- WHEN THIS HAPPENS COLLAPSE LOAD IS REACHED
- TRYING TO INCREASE P CAUSES PT. B TO MOVE DOWN BUT P = CONSTANT
- NO ADDITIONAL HINGES AS LONG AS NO STRAIN HARDENING
- IT IS A MECHANISM W/ 2 HINGES



המבנה הוא מנגנון עם שני פרקים





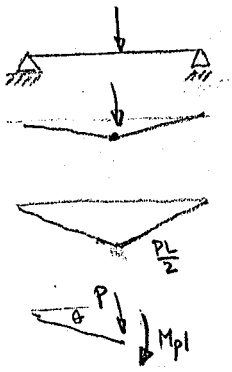
$$M_{pl}\theta + M_{pl}(\theta+\phi) = P\frac{L}{2}\theta$$

$$3M_{pl}\theta = \frac{PL}{2}\theta$$

$$P = \frac{6M_{pl}}{L}$$

HERE θ IS A VIRTUAL DISPL. THAT TAKES PLACE AFTER COLLAPSE MECHANISM OCCURS

IF

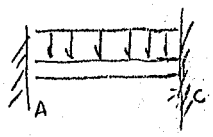


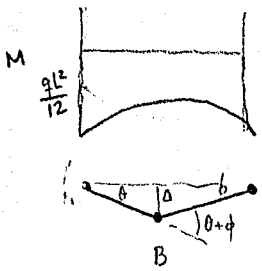
HIGHEST MOMENT IS $\frac{PL}{2}$ AT D FOR SIMPLY SUPPORTED

$$M_{pl}\theta + M_{pl}\cdot 2\theta = \frac{PL}{2}\theta$$

$$P = \frac{M_{pl}\cdot 4}{L}$$

IF





- HIGHEST MOMENT IS $\frac{qL^2}{12}$ @ A & C , 3 HINGES FORM
- ASSUME YOU DONT KNOW WHERE

$$qX_B\cdot\theta\frac{X_B}{2} + q(L-X_B)\phi\left(\frac{L-X_B}{2}\right) = M_{pl}\theta + M_{pl}(\theta+\phi) + M_{pl}\phi$$

- LET LOAD IN EACH SECTION BE CONCENTRATED AT CENTROID
- DUE TO SYMMETRY $\phi = \theta$ & $X_B = L/2$

$$q\frac{L^2}{8} + q\frac{L^2}{8} = 4M_{pl}$$

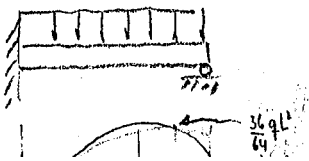
$$q_{pl} = \frac{16M_{pl}}{L^2}$$

$$q_{yp}\frac{L^2}{12} = M_{yp} \qquad q_{yp} = \frac{12M_{yp}}{L^2}$$

$\Delta = X_B\theta$

$\Delta = \phi(L-X_B)$

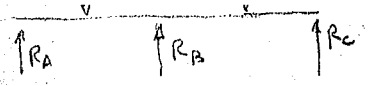
שוב עלינו לעזוב את הדוגמה ולחזור לשיטה הסטטית. הפעם נמצא את המומנט המקסימלי ונשווה אותו ל M_{pl}, ומכאן נמצא את העומס q_{pl} שגורם לכך.



IF $X_B = 1/2$ $\quad q_{PL} = \frac{12M_{pl}}{L^2}$

$X_B = 5/8L$ WHERE MAX DEFLECTION $\quad q_{PL} = \frac{11.733\,M_{pl}}{L^2}$

$X_B = .586L$ WHERE $\frac{dq}{dx_B} = 0$ $\quad q_{PL} = \frac{11.657\,M_{pl}}{L^2}$

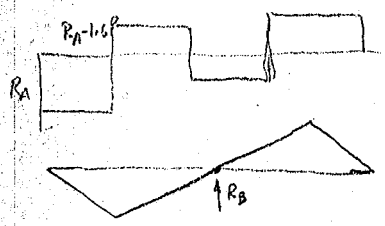


$$2.6P = R_A + R_B + R_C$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot 2L - P(1.6)L + PL - R_C \cdot 2L$$

$$\Rightarrow (R_A - R_C)2L = .6PL$$

$$R_A - R_C = .3P$$



$$U = \frac{1}{2EI}\left\{\int_0^L \frac{R_A^2 x^2}{2}dx + \int_0^L \left[\frac{R_A L + (R_A - 1.6P)x}{2}\right]^2 dx + \int_0^L \left[(2R_A L - 1.6PL) + (R_A - 1.6P + R_B)x\right]^2 dx + \int_0^L \left\{3R_A L - 3.2PL + R_B L + (R_A - 2.6P + R_B)x\right\}^2 dx\right\}$$

$$\frac{\partial U_C}{\partial R_B} = 0 = \frac{1}{EI}\int_0^L \left[(2R_A L - 1.6PL) + (R_A - 1.6P + R_B)x\right]x\,dx + \int_0^L \left\{3R_A L - 3.2PL + R_B L + (R_A - 2.6P + R_B)x\right\}(L + x)\,dx$$

$$\frac{1}{EI}\left[(2R_A L - 1.6PL)\frac{L^2}{2} + (R_A - 1.6P + R_B)\frac{L^3}{3} + (3R_A L - 3.2PL + R_B L)\frac{(L+x)^2}{2}\Big|_0^L + (R_A - 2.6P + R_B)\left(\frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^L\right] = 0$$

$$\left(\frac{7}{6}L^3\right) \qquad \frac{3L^2}{2} \cdot L$$

$$\frac{L^3}{EI}\left\{R_A - 0.8P + \frac{R_A}{3} - \frac{1.6P}{3} + \frac{R_B}{3} + \frac{9R_A}{2} + 4.8P + 1.5R_B + \frac{5}{6}R_A - \frac{13}{6}P + \frac{5}{6}R_B\right\} = 0$$

$$R_A(1 + \tfrac{1}{3} + 4.5 + \tfrac{5}{6}) - P(0.8 + \tfrac{1.6}{3} - 4.8 + \tfrac{13}{6}) + R_B(\tfrac{1}{3} + 1.5 + \tfrac{5}{6}) = 0$$

$$\frac{20}{3}R_A - 8.3P + R_B \cdot 3 = 0$$

$$20R_A + 8R_B = 24.9P$$

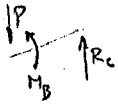
$$20R_A + 10R_B = 38P$$

$$2R_B = 13.1P$$

$$R_B = 6.55P$$

$$R_A =$$

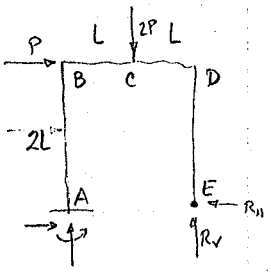
$$2R_A + R_B = 3.8P$$



$$\sum M \quad M_B = PL - R_C \cdot 2L = \frac{3M_p L}{L} - R_C \cdot 2L = M_p \quad R_C = \frac{2M_p}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \qquad P_p \cdot L - M_B + R_C \cdot 2L = 0$$

$$\frac{3M_p - M_B}{2} = R_C \qquad \frac{3M_p - M_p}{2} = R_C = M_p \checkmark$$



$$M_A = -R_V \cdot 2L + 4PL$$

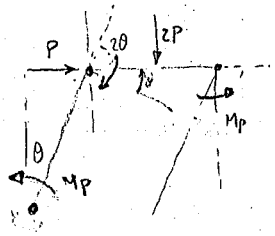
$$M_B = -R_V \cdot 2L + R_H \cdot 2L + 2PL$$

$$M_D = 2R_H L$$

$$M_C = 2R_H L - R_V L$$

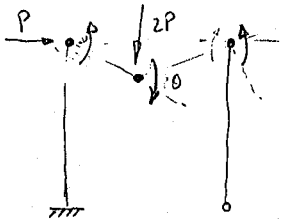
$$\Rightarrow M_A - 2M_C + 2M_D = 4PL$$

$$M_B - 2M_C + M_D = 2PL$$



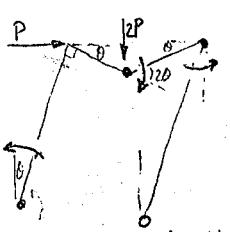
$$P \cdot 2l\theta = M_p\theta + M_p \cdot \theta + M_p\theta$$

$$P = \frac{3M_p}{2L}$$



$$2P \cdot \theta l = M_p\theta + M_p \cdot 2\theta + M_p\theta$$

$$P = \frac{2M_p}{L}$$



$$P \cdot 2\theta l + 2P \cdot \theta l = M_p\theta + M_p \cdot 2\theta + M_p 2\theta$$

$$P = \frac{5M_p}{4L}$$

$M_A = M_D = M_p \quad M_C = -M_p$

$M_B = ? \quad P = \frac{5M_p}{4L}$

$$M_B = -\frac{M_p}{2}$$

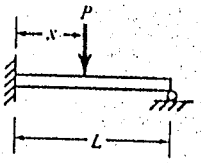
$M_A = M_p = M_D \quad M_C = ? \quad P = \frac{3M_p}{2L} \Rightarrow M_C = -\frac{3}{2}M_p$

$M_B = M_D = M_p$

$M_C = -M_p, \; P = \frac{2M_p}{L}$

$M_A = ? \Rightarrow M_A = 4M_p$

*11.18– 11.20 For each beam shown, find an expression for collapse load P_p versus its location x. For what value of x is P_p a minimum? $x = 0.586L$



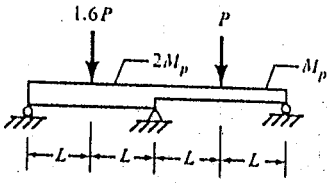
PROBLEM 11.18

11.25, *11.26, 11.27, *11.28, 11.29, 11.30, *11.31–11.33, *11.34, 11.35, *11.36–11.38, *11.39–11.41, *11.42, *11.43, *11.44

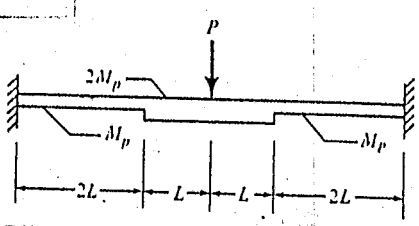
In the structures sketched, the fully plastic bending moment capacity is M_p throughout the structure unless otherwise noted.

(a) Find the collapse load by examining various assumed mechanisms. That is, find the least upper bound.

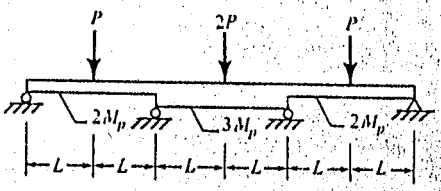
(b) Check your answer by seeing if all bending moments associated with your proposed collapse mechanism are at or below the fully plastic bending moment.



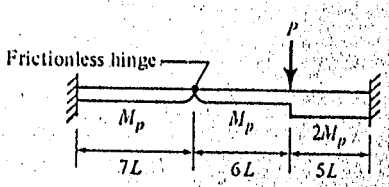
PROBLEM 11.27



PROBLEM 11.29



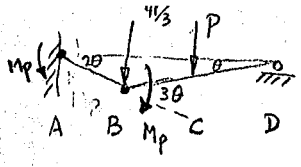
PROBLEM 11.30



PROBLEM 11.34

$P_p = 0.714\, M_p/L$

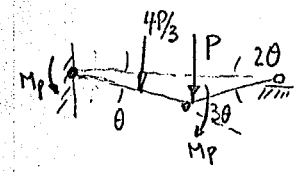
אם המפרק הפלסטי הוא A ו- B



$$\frac{4P}{3}\cdot(2\cdot L/3) + P\cdot L/3\cdot\theta = M_p\cdot 2\theta + M_p\cdot 3\theta$$

$$P = \frac{45}{11}\frac{M_p}{L} = 4.09\ M_p/L$$

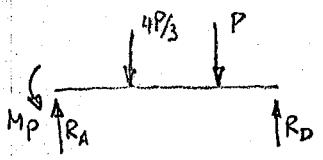
אם המפרק הפלסטי הוא A ו- C



$$\frac{4P}{3}\cdot(\theta\cdot L/3) + P\cdot 2\theta\cdot L/3 = M_p\cdot\theta + M_p\cdot 3\theta$$

$$P = 3.60\frac{M_p}{L}$$

לכן $P_{\text{מסצרת}} = 3.60\frac{M_p}{L}$



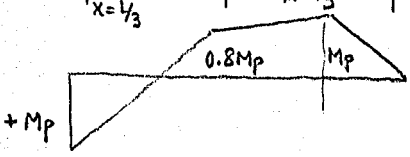
לבדוק המומנט ב $x=L/3$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_D = 0 \qquad -M_p - \frac{4P}{3}\cdot\frac{2L}{3} - P\cdot\frac{L}{3} + R_A\cdot L = 0$$

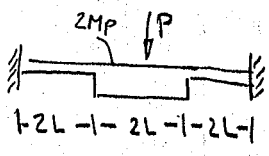
$$R_A = \frac{M_p}{L} + \frac{11}{9}\frac{P}{} = \frac{M_p}{L} + \frac{11}{9}\left(3.60\frac{M_p}{L}\right) = 5.4\frac{M_p}{L}$$

$$M\big|_{x=L/3} = M_p - R_A\cdot L/3 = M_p - \frac{5.4}{3}M_p = -0.8\,M_p \quad < M_p$$

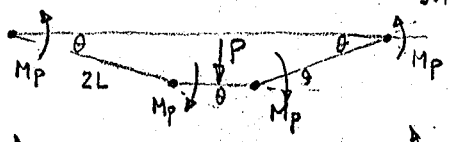
מפני שערך זה של המומנט ב $x=L/3$ בתוך א-M_p,
לכן צריך לשנות את הכוח המסצרתי.



11.29

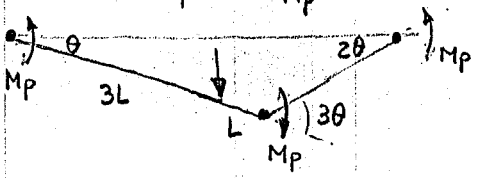


אפשרויות



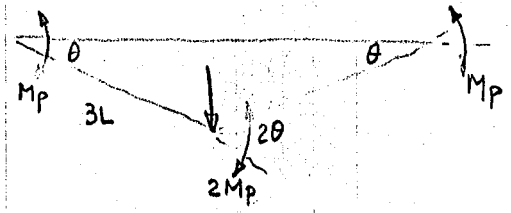
$$P\cdot 2L\theta = M_p\cdot\theta + M_p\theta + M_p\theta + M_p\theta$$

$$P = 2M_p/L$$



$$P\cdot 3L\theta = M_p\cdot\theta + M_p\cdot 3\theta + M_p\cdot 2\theta$$

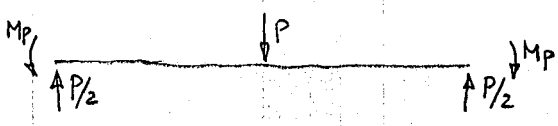
$$P = 2M_p/L$$



$$P\cdot 3L\theta = M_p\theta + 2M_p\cdot 2\theta + M_p\cdot\theta$$

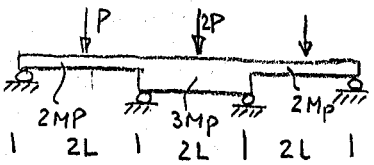
$$P = 2M_p/L$$

מבני הסטטיכיות

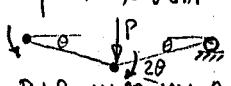


ויכוללים להתעלות ש-|M| בחלקים הקרובים פחות מ-M_p ובחלק הקצה |M| פחות מ-$2M_p$

11.30



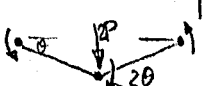
אם המפרק מופיע בחלק הימני



$$P\cdot L\theta = 2M_p\theta + 2M_p\theta$$

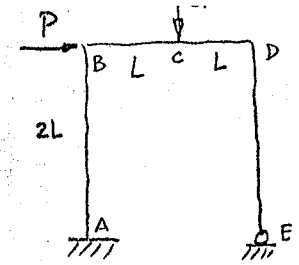
$$P = 6M_p/L$$

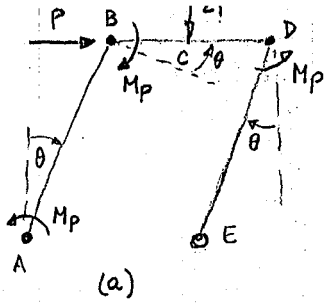
אם המפרק מופיע במרכז



$$2P\cdot L\theta = 2M_p\theta + 3M_p\cdot 2\theta + 2M_p\theta$$

$$P = \frac{5M_p}{L}$$





(a)

$$P\cdot 2\theta L = M_P\theta + M_P\theta + M_P\theta$$

$$P = \frac{3M_P}{2L}$$

כדי לגדור את M_C כלשהי

$M_A = M_D = M_P$

$M_B = -M_P$

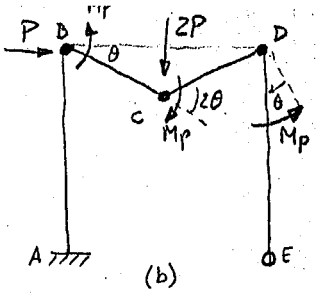
$$M_A - 2M_C + 2M_D = 4PL$$

$$M_P - 2M_C + 2M_P = 4\left(\frac{3M_P}{2L}\right)L$$

$$M_C = -\frac{3}{2}M_P$$

המינימום בלתי אפשרי

$|M_C| > M_P$



(b)

$$2P\cdot L\theta = M_P\theta + M_P\cdot 2\theta + M_P\theta$$

$$P = 2M_P/L$$

כדי לגדול את M_A כלשהי

$M_B = M_D = M_P$, $M_C = -M_P$

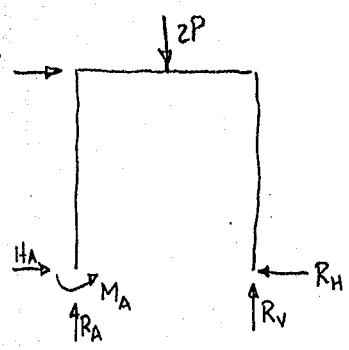
$$M_A - 2M_C + 2M_D = 4PL$$

$$M_A + 2M_P + 2M_P = 4\left(\frac{2M_P}{L}\right)L$$

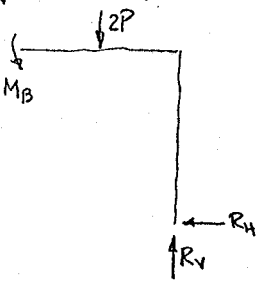
$$M_A = 3M_P$$

המינימום בלתי אפשרי

$M_A > M_P$



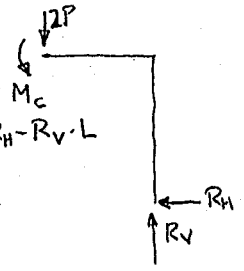
$$M_A = -R_V\cdot 2L + P(2L) + 2P\cdot L$$



$$M_B = 2P\cdot L + R_H\cdot 2L - R_V\cdot 2L$$



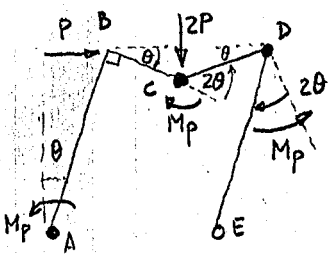
$$M_D = +2L\cdot R_H$$



$$M_C = 2L\cdot R_H - R_V\cdot L$$

$$\Rightarrow M_A - 2M_C + 2M_D = 4PL$$

$$\Rightarrow M_B - 2M_C + M_D = 2PL$$



$$P\cdot 2L\theta + 2P\cdot L\theta = M_P\theta + M_P\cdot 2\theta + M_P\cdot 2\theta$$

$$P = \frac{5M_P}{4L}$$

כדי לגדול את M_B כלשהי

$M_C = -M_P$, $M_A = M_D = M_P$

$$M_B - 2M_C + M_D = 2PL$$

$$M_B + 2M_P + M_P = 2\left(\frac{5M_P}{4L}\right)\cdot L$$

$$M_B = -\frac{M_P}{2}$$

מפני ש- M_B בתוך M_P ו- P הוא המומנט הדרוש
מאזורו הנה יכול לקרות

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1{,}000 + \tfrac{1}{3}(100)M_B}{10}\right) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{2{,}880 + 108M_B + 54M_C}{18}\right)$$

or $$(28\tfrac{2}{3})M_B + 3M_C = -260$$

Using condition (b) for the span BC provides another equation, $t_{BC} = 0$, or

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{(18)}{2}(+40)\frac{(18+12)}{3} + \frac{(18)(+M_B)}{2}\frac{(18)}{3} + \frac{(18)(+M_C)}{2}\frac{2(18)}{3}\right] = 0$$

or $$3M_B + 6M_C = -200$$

Solving the two reduced equations simultaneously,

$$M_B = -20.4 \text{ ft-lb} \quad \text{and} \quad M_C = -23.3 \text{ ft-lb}$$

where the signs agree with the convention of signs used for beams. These moments with their proper sense are shown in Fig. 12-17(b).

After the redundant moments M_A and M_C are found, no new techniques are necessary to construct the moment and shear diagrams. However, particular care must be exercised to include the moments at the supports while computing shears and reactions. Usually, isolated beams as shown in Fig. 12-17(b) are the most convenient free bodies for determining shears. Reactions follow by adding the shears on the adjoining beams. In units of kips and feet, for free body AB:

$$\sum M_B = 0 \circlearrowleft +, \quad 2.4(10)5 - 20.4 - 10R_A = 0, \quad R_A = 9.96 \text{ kips} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \circlearrowright +, \quad 2.4(10)5 + 20.4 - 10V'_B = 0, \quad V'_B = 14.04 \text{ kips} \uparrow$$

For free body BC:

$$\sum M_C = 0 \circlearrowleft +, \quad 10(6) + 20.4 - 23.3 - 18V''_B = 0,$$

$$V''_B = 3.17 \text{ kips} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \circlearrowright +, \quad 10(12) - 20.4 + 23.3 - 18V_C = 0,$$

$$V_C = R_C = 6.83 \text{ kips} \uparrow$$

Check:

$$R_A + V'_B = 24 \text{ kips} \uparrow \quad \text{and} \quad V''_B + R_C = 10 \text{ kips} \uparrow$$

From above, $R_B = V'_B + V''_B = 17.21$ kips ↑.

The complete shear and moment diagrams are in Figs. 12-17(e) and (f), respectively.

12-6. THE THREE-MOMENT EQUATION

Generalizing the procedure used in the preceding example, a recurrence formula, i.e., an equation which may be repeatedly applied for every two adjoining spans, may be derived for continuous beams. For any

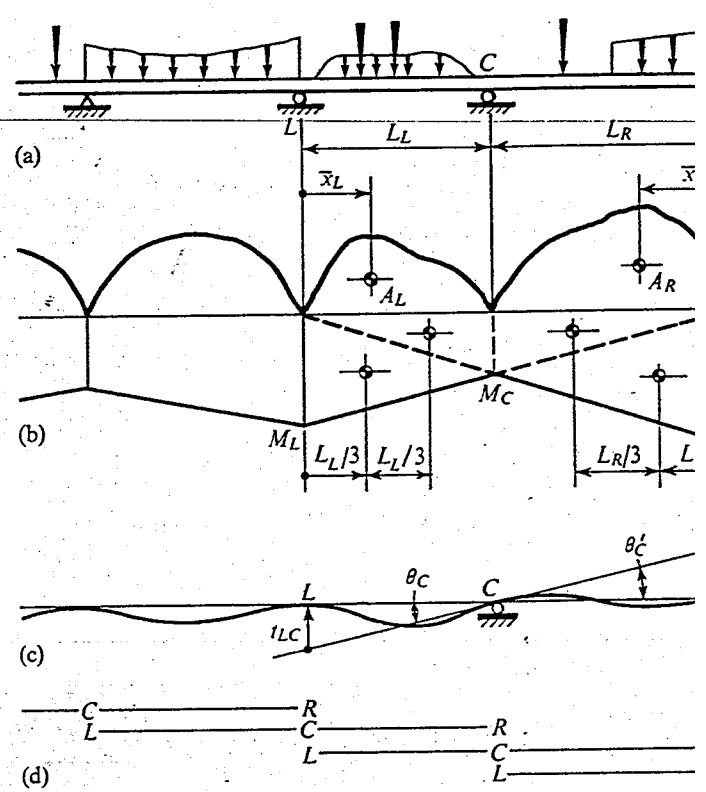


Fig. 12-18. Derivation of the three-mome

n number of spans, $n - 1$ such equations may be written. This gives enough simultaneous equations for the solution of redundant moments over the supports. This recurrence formula is called the *three-moment equation* because three unknown moments appear in it.

Consider a continuous beam, such as shown in Fig. 12-18(a), subjected to any transverse loading. For any two adjoining spans, as LC and CR, the bending-moment diagram is considered to consist of two parts. The areas A_L and A_R to the left and to the right of the center support C, Fig. 12-18(b), correspond to the bending-moment diagrams in the respective spans if these spans are treated as being simply supported. These moment diagrams depend entirely upon the nature of the known forces applied within each span. The other part of the moment diagram of known shape is due to the unknown moments M_L at the left support, M_C at the center support, and M_R at the right support.

Next, the elastic curve in Fig. 12-18(c) must be considered. This curve is continuous for any continuous beam. Hence the angles θ_C and θ'_C, which define, from the respective sides, the inclination of the same tangent to the elastic curve at C, are equal. By using the second moment-area theorem to obtain t_{LC} and t_{RC}, these angles are defined as $\theta_C = t_{LC}/L_L$ and $\theta'_C = -t_{RC}/L_R$, where L_L and L_R are span lengths on the left and on

the right of C, respectively. The negative sign for the second angle is necessary since the tangent from point C is above the support R and a positive deviation of t_{RC} locates a tangent below the same support. Hence, following the steps outlined,

$$\theta_C = \theta'_C \qquad \text{or} \qquad t_{LC}/L_L = -t_{RC}/L_R$$

and

$$\frac{1}{L_L}\frac{1}{EI_L}\left(A_L\bar{x}_L + \frac{L_L M_L}{2}\frac{L_L}{3} + \frac{L_L M_C}{2}\frac{2L_L}{3}\right)$$

$$= -\frac{1}{L_R}\frac{1}{EI_R}\left(A_R\bar{x}_R + \frac{L_R M_R}{2}\frac{L_R}{3} + \frac{L_R M_C}{2}\frac{2L_R}{3}\right)$$

where I_L and I_R are the respective moments of inertia of the cross-sectional area of the beam in the left and the right spans. Throughout each span, I_L and I_R are assumed constant. The term $\bar{x}_L$ is the distance from the left support L to the centroid of the area A_L, and $\bar{x}_R$ is a similar distance for A_R measured from the right support R. The terms M_L, M_C, and M_R denote the unknown moments at the supports.

Simplifying the above expression, the three-moment equation* is

$$L_L M_L + 2\left(L_L + \frac{I_L}{I_R}L_R\right)M_C + \frac{I_L}{I_R}L_R M_R = -\frac{6A_L\bar{x}_L}{L_L} - \frac{6A_R\bar{x}_R}{L_R}\frac{I_L}{I_R} \qquad (12\text{-}12)$$

This equation 12-12 applies to continuous beams on unyielding supports, with the beam in each span of constant I. In a particular problem, all terms, with the exception of the redundant moments at the supports, are constant. A sufficient number of simultaneous equations for the unknown moments is obtained by successively imagining the supports of the adjoining spans as L, C, and R as shown in Fig. 12-18(d). However, in these equations the subscripts of the M's must correspond to the actual designation of the supports, such as A, B, C, etc. Also note that at pinned ends of beams the moments are known to be zero. Likewise, if a continuous beam has an overhang, the moment at the first support is known from statics. Fixed supports will be discussed in Example 12-16. For symmetrical beams symmetrically loaded, work may be minimized by noting that moments at symmetrically placed supports are equal.

In deriving the three-moment equation, the moments at the supports were assumed positive. Hence an algebraic solution of simultaneous equations automatically gives the correct sign of moments according to the convention for beams.

* The three-moment equation was originally derived by E. Clapeyron, a French engineer, in 1857, and sometimes is referred to as Clapeyron's equation.

12-7. SPECIAL CASES

As a specific example of the evaluation of the constant terms on the right side of the three-moment equation, consider two adjoining spans loaded with the concentrated forces P_L and P_R, Fig. 12-19. Considering these spans simply supported, since the maximum moment in the left span is $+P_L ab/L_L$, and $\bar{x}_L = (L_L + a)/3$ one writes

$$-6A_L\frac{\bar{x}_L}{L_L} = -6\left(\frac{L_L}{2}\right)\frac{P_L ab}{L_L}\frac{(L_L + a)}{3L_L} = -P_L ab\left(1 + \frac{a}{L_L}\right) \qquad (12\text{-}13)$$

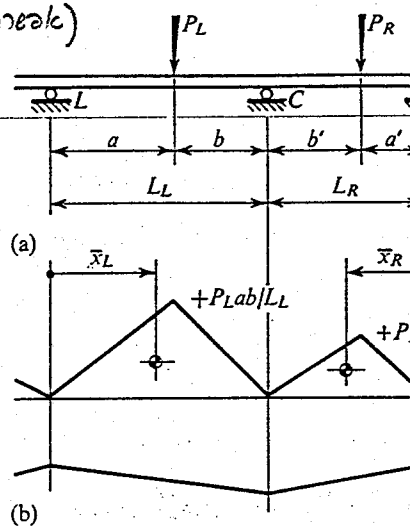


Fig. 12-19. Establishing the constants on the right hand of the three-moment equation for concentrated loads.

Similarly, by interchanging the role of the dimensions a and b in the right span, i.e., by always measuring a's from the outside support toward the force,

$$-6A_R\frac{I_L}{I_R}\frac{\bar{x}_R}{L_R} = -P_R a'b'\left(1 + \frac{a'}{L_R}\right)\frac{I_L}{I_R} \qquad (12\text{-}14)$$

If a number of concentrated forces occurs within a span, the contribution of each one of them to the above constant may be treated separately. Hence a constant term for the right side of the three-moment equation applicable for any number of concentrated forces applied within the spans is

$$-\sum_i P_{L_i} a_i b_i\left(1 + \frac{a_i}{L_L}\right) - \sum_i P_{R_i} a'_i b'_i\left(1 + \frac{a'_i}{L_R}\right)\frac{I_L}{I_R} \qquad (12\text{-}15)$$

where the summation sign designates the fact that a separate term appears for every concentrated force P_L in the left span, and similarly, for every force P_R in the right span. In both cases, a or a' is the distance from the outside support to the particular concentrated force, and b or b' is the distance to the force from the center support. If any one of these forces acts upward, the term contributed to the constant by such a force is of opposite sign.

The constant for the right side of the three-moment equation, when uniformly distributed loads are applied to a beam, is determined similarly. Thus, using the diagram in Fig. 12-20,

$$-6A_L\frac{\bar{x}_L}{L_L} = -6\left(\frac{2L_L}{3}\right)\left(\frac{p_L L_L^2}{8}\frac{L_L}{2L_L}\right) = -\frac{p_L L_L^3}{4} \qquad (12\text{-}16)$$

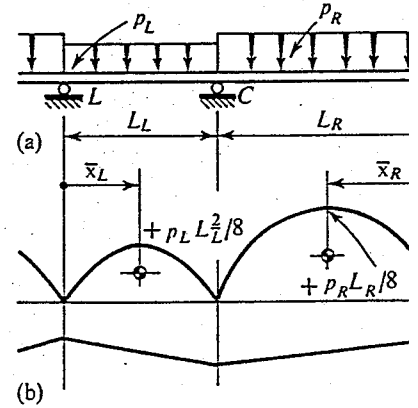
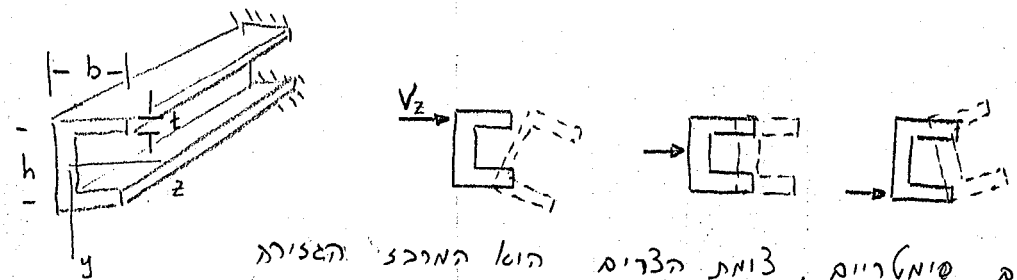
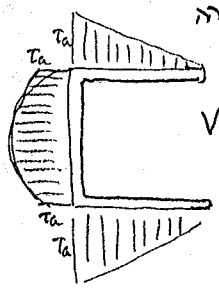


Fig. 12-20. Establishing the constants on the right hand of the three-moment equation for uniformly distributed loads.

מרכז גזירה - מקום שבו הגזירה בדיוק גורמת רק לפיתול



אם למשל יש שני ציריים סימטריים, ציר הסימטריה הוא המרכז גזירה



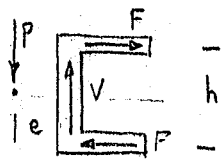
אם יש רק ציר אחד כמו בדוגמה כאן מפני שמאמץ הגזירה הוא כמו בדוגמה הקודמת, שהמאמץ הגזירה בדיוק התלכויות הוא ליניארי מאפס ומתחתיו ומתחתיו

• מניחים שהקירות דקים, שהמאמץ הגזירה בדיוק התלכויות הוא ליניארי מאפס ומתחתיו ומתחתיו

המאמץ בדוגמה הכוח בכול רגל הוא $\frac{\tau_a}{2}bt$ והגזירה הכוללת $V = \int_{-h/2}^{h/2}\tau t\,dy$

• מניחים שיכולים למדוד הרגליים והמסכת מקו האמצעי; ומאמץ הגזירה טנגנט לקיר

• מאמץ הפיסה מתמיד הכיוון הצומי;

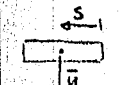


לכן, הפיתול שבגלל מהכוחות F הוא $F\cdot h$. כדי למנוע את הפיתול, צריך לשים כוח P, במרחק e מהמסכת. לפי שווי משקל $P=V$ ו- $Pe=Fh$

$$e = \frac{Fh}{V} = \frac{\tau_a bt/2 \cdot h}{V}$$

τ_a - מאמץ הגזירה האמצעי על הרגל וכפי שלמדנו בתורת התוכן 1

$$\tau_a = \frac{VQ}{It} = \frac{q}{t}$$



$Q = \int ydA$ על הרגל $= \int ytds = \bar{y}A = \frac{h}{2}\cdot bt$. קורטוט לצה המומנט הסטטי על חלק השטח המסוים

• $\bar{y}$ - המרחק ממרכז הכובד על הרגל לציר הנטרלי על הצוף

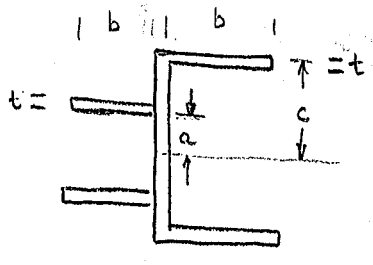
• q - כוח הגזירה

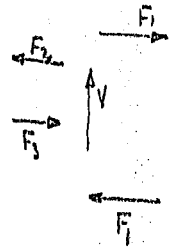
$$e = \frac{V(h/2\cdot bt)}{It}\cdot\frac{bt/2\cdot h}{V}$$

$e = \frac{b^2h^2t}{4I}$. פה $I \cong 2bt\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{th^3}{12}$ אם הרגל דקה מאוד

• המרחק e תלוי בשטח ולכן בצומם ולכן במקום שהצומם מיושם.

דוגמה





$$F_1\cdot 2c - F_3\cdot 2a = Pe$$

$$P=V$$

$$\frac{\tau_a}{2}\cdot bt\cdot 2c - \frac{\tau_b}{2}\cdot bt\cdot 2a = Ve$$

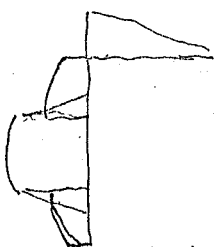
$$\frac{1}{2}\frac{VQ_a}{It}\cdot bt\cdot 2c - \frac{1}{2}\frac{VQ_b}{It}\cdot bt\cdot 2a = Ve$$

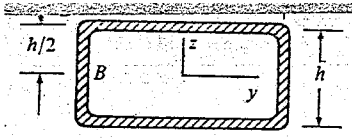
$$\frac{1}{2}\frac{V(bt\cdot c)}{It}\cdot bt\cdot 2c - \frac{1}{2}\frac{V(bt\cdot a)}{It}\cdot bt\cdot 2a = Ve$$

$$e = \frac{1}{2}\left\{\frac{2t^2(b^2c^2 - b^2a^2)}{It}\right\}$$

$$I = \frac{t(2c)^3}{12} + 2bt\cdot c^2 + 2bt\cdot a^2$$

$$2h^2(c^2-a^2)$$



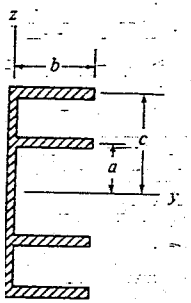


PROBLEM 9.31

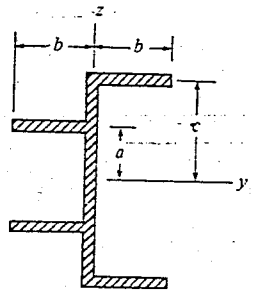
9.7

9.33, 9.34, 9.35, *9.36, 9.37–9.40, *9.41, *9.42, 9.43

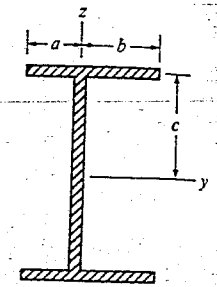
The open cross sections shown are all thin-walled, of constant thickness, and have one axis of symmetry. Assume a frictionless contact where overlaps appear. In each case find an expression for the location of the shear center. Check your answer by examining limiting cases where possible (as by letting dimension b approach zero, for example).



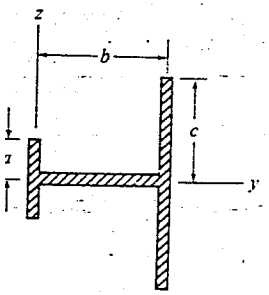
PROBLEM 9.32



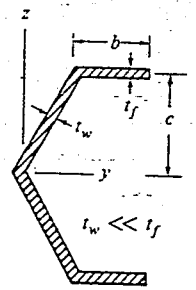
PROBLEM 9.33



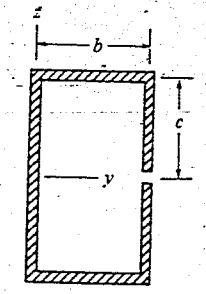
PROBLEM 9.34



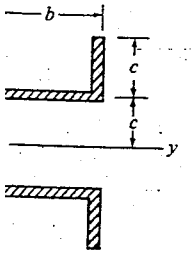
PROBLEM 9.35



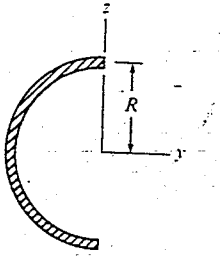
PROBLEM 9.36



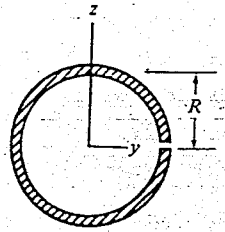
PROBLEM 9.37



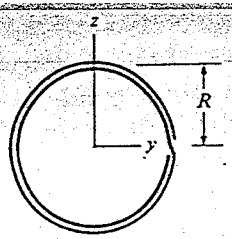
PROBLEM 9.38



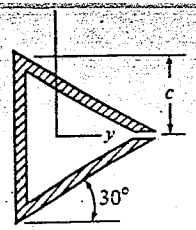
PROBLEM 9.39



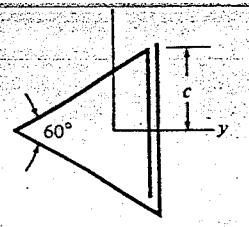
PROBLEM 9.40



PROBLEM 9.41



PROBLEM 9.42

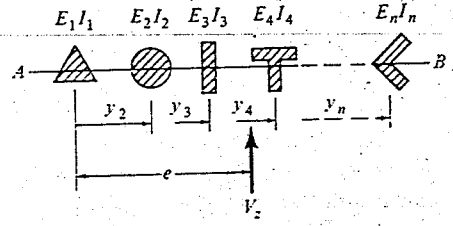


PROBLEM 9.43

9.44 (a) Several beams of arbitrary cross section have their centroids in a common plane AB. If somehow coupled together so that they share the same neutral axis, the composite beam will bend without twisting if e is as stated in the sketch. Derive this expression for e, in which y_i is the distance to the ith shear center.

(b) Use this formula to solve Problem 9.35.

(c) Use this formula to solve Problem 9.43.



$$e = \frac{E_2I_2y_2 + E_3I_3y_3 + \cdots + E_nI_ny_n}{E_1I_1 + E_2I_2 + E_3I_3 + \cdots + E_nI_n}$$

PROBLEM 9.44

Section 9.8

9.45 For an arbitrary open cross section, prove that $S_{\omega y} = S_{\omega z} = 0$ if axes yz are centroidal and pole P coincides with shear center S, as claimed above Eq. 8.10.5.

Suggestion: Set $e_y = e_z = 0$ in Eqs. 9.8.5.

9.46 Use Eqs. 9.8.5 to show that point P is the shear center in Figs. 9.7.2 and 9.7.3.

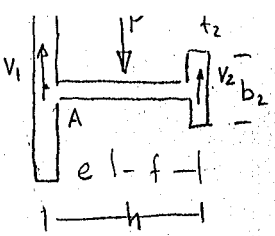
9.47 Use the method of Section 9.8 to locate the shear centers of the following cross sections.

(a) Problem 9.35.
(b) Problem 9.36.
(c) Problem 9.40
(d) Problem 9.42.

9.48 Imagine that the box section of Problem 9.31 is cut open at the lower left corner. Locate the shear center by the method of Section 9.8.

9.49 Locate the y and z coordinates of the shear center of the cross section shown. Dimensions are in millimeters. Thickness t is constant. Axes yz centroidal, and $I_y = 10.5(10)^6$ mm^4, $I_z = 20.8(10)^6$ mm^4, $I_{yz} = 6.00(10)^6$ mm^4.

*9.50 Imagine that the channel section of Fig. 9.7.1 is thin-walled, of constant thickness, with $h = b$, but that the upper flange has a modulus three times as great as that of the rest of the section. Locate the shear center.



$V_1+V_2=P$ ו-

$\Sigma M_A=0$ כאן, שלוין פיתרון, אם ניקח $V_2 \cdot h = Pe$

V_2 מהווה V_2. מפני שהמאמץ הגזירה הוא מקסימלי, $V_2 = \frac{2}{3} b_2 q_{t_{2max}}$

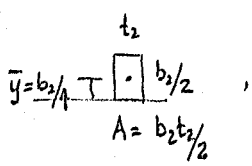
$$q_{t_{2max}} = \frac{VQ}{I} = \frac{PQ}{I}$$

לכן,

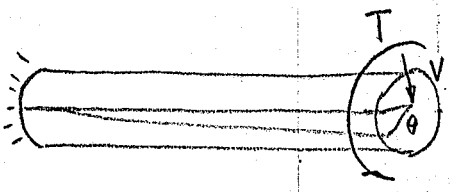
$$V_2 h = \frac{2}{3} b_2 q_{t_{2max}} h = \frac{2}{3} b_2 \frac{PQ}{I} h = Pe$$

$$e = \frac{2}{3} b_2 \frac{Qh}{I} = \frac{2}{3} b_2 \frac{h}{I} \left(\frac{b_2 t_2}{2} \cdot \frac{b_2}{4} \right) = \frac{b_2^3 t_2 h}{12 I}$$

נצכיר ש- Q המומנט הסטטי, שלקח השטח המסוים ציר הציר העיקרי, $\bar{y} = b_2/4$



אם הגזירה לכל נמצאת במרכז הגזירה פיתול קורה. אם רוצים מהות הפיתול:



בפיתול

$$Ve = T$$

מהות הפיתול היא

$$\theta = \frac{TL}{JG}$$

$$J = I_{yy} + I_{zz}$$

G - מודול הגזירה $\frac{E}{2(1+\nu)}$ בדרך כלל

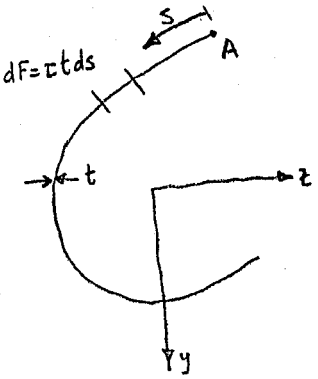
בדרך כלל צרם הגזירה q לקיר פתוח

$$q_{\text{פתוח}} = -\frac{z_V(Q_z - I_{yz}Q_y) + y_V(I_{zz}Q_y - I_{yz}Q_z)}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

$$Q_z = \int_0^s t y \, ds$$

$$Q_y = \int_0^s t z \, ds$$

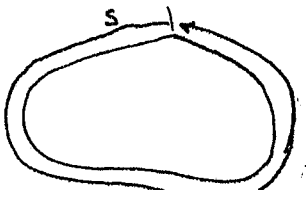
אם t משתנה מאיזה למקום כפונקציה של s

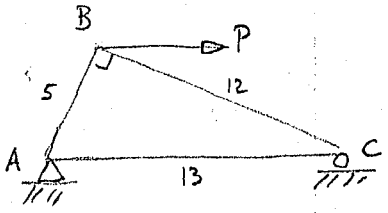


לקיר סגור $q = q_0 + q_{\text{פתוח}}$

1. q_0

$$q_0 = -\frac{\oint (t/t_{\text{פתוח}})\, ds}{\oint t/t \, ds}$$



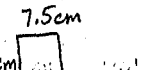


לפי שיטת הצמתים (רשום את הפתרון של הבעיה)

$F_{AB} = \frac{5}{13}P$ דחיסות

$F_{AC} = \frac{144}{169}P$ מתיחות

$F_{BC} = -\frac{12}{13}P$ בלתי ידוע



אם שטח חתך ..... מהנו העומס שיגרום לכניעת ? קדו $E=200GPa, \pm 300\,MPa = \sigma_y$

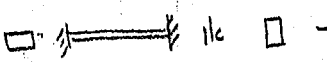
מבין ש- F_{AB} ו- F_{AC} דחיסות צריך לבדוק מהנו העומס שגורם לכניעה. מבין ש- F_{BC} בלתי ידוע צריך לבדוק מהנו העומס שגורם לכניעה בלחיצה ובמ בקריסה,

$$A = .1(.075) = 7.5\times10^{-3}\,m^2$$

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{5}{13}\frac{P}{(7.5\times10^{-3})} = 300\times10^6\,\frac{N}{m^2} \qquad P = \frac{(300\times10^6)(7.5\times10^{-3})\cdot 13}{5} = 5.4\times10^6 N$$

$$\sigma_{AC} = \frac{F_{AC}}{A} = \frac{144}{169}\frac{P}{7.5\times10^{-3}m^2} = 300\times10^6\frac{N}{m^2} \qquad P = (300\times10^6)(7.5\times10^{-3})\frac{169}{144} = 2.64\times10^6 N$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{AC}}{A} = -\frac{12}{13}\frac{P}{7.5\times10^{-3}m^2} = -300\times10^6\frac{N}{m^2} \qquad P = (300\times10^6)(7.5\times10^{-3})\cdot\frac{13}{12} = 2.44\times10^6 N$$

כדי לבדוק בקריסה יש שתי אפשרויות או  לכן, צריך למצוא את מומנט האינרציה הטוב ביותים



$$I = \frac{(7.5)}{12}10^3 \times 10^{-8} = 6.25\times10^{-6}\,m^4$$

$$F_{BC} = \frac{\pi^2(200\times10^9)(6.25\times10^{-6})}{(12)^2} = 85674\,N$$

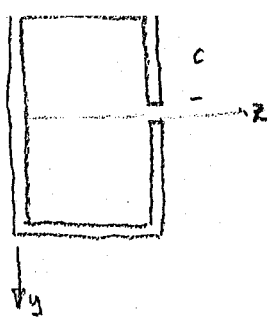
$$F_{BC} = \frac{12}{13}P \rightarrow \underline{P = 92813.\,N}$$

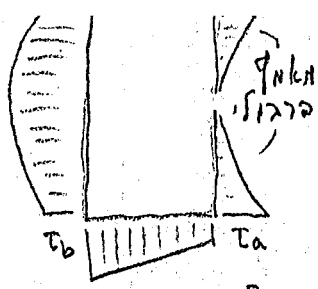
$$I = \frac{10(7.5)^3}{12}\times10^{-8} = 3.515\times10^{-6}\,m^4$$

$$F_{BC} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} = \frac{4(\pi^2)(200\times10^9)(3.515\times10^{-6})}{(12)^2} = 192766\,N$$

$$F_{BC} = \frac{12}{13}P \rightarrow P = 208830\,N$$

לכן BC תקרוס ראשונה כאשר $P = 92813\,N$

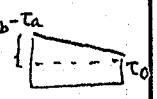




צורת מאומץ הפצירה
שמוגיע עי התתן

$$\tau_a = \frac{VQ_a}{It}$$

$$\tau_b = (\tau_b - \tau_a) + \tau_a = \frac{VQ_b}{It} + \frac{VQ_a}{It}$$



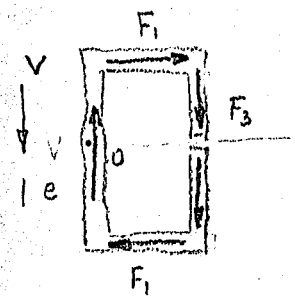
$$I = \frac{t(2c)^3}{12} + 2(bt)c^2 + 2\left[\frac{tc^3}{12} + tc\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

$$Q_a = \int_0 y\,dA = \int_{b-t/2}^{b+t/2}\int_0^c y\,(dy\,dz) = \frac{y^2}{2}t\Big|_0^c = \frac{c^2 t}{2}$$

$$Q_b = \int y\,dA = \bar{y}A = c\cdot bt$$

$$F_3 = \int \tau_a\,dA = \frac{V}{It}\int_0^c \frac{y^2 t}{2}\cdot t\,dy = \frac{V}{I}\frac{y^3}{6}t\Big|_0^c = \frac{Vtc^3}{6I}$$

$$F_1 = \frac{\tau_a + \tau_b}{2}(b\cdot t) = \frac{Vtbc}{2I}(b+c)$$



$$\Sigma M_0 = 2F_3\cdot b + F_1\cdot 2c - Ve = 0$$

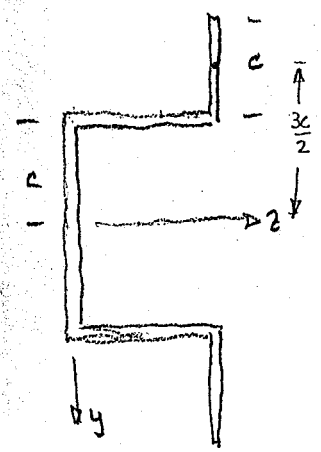
$$= 2\tau_a\frac{ct}{3}\cdot b + \left(\frac{\tau_a+\tau_b}{2}\right)bt\cdot 2c - Ve = 0$$

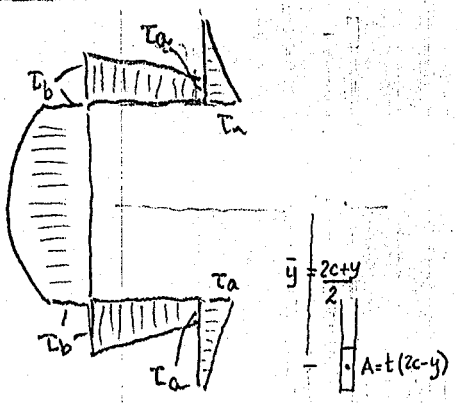
$$= \frac{2VQ_a}{It}\cdot\frac{ct}{3}\cdot b + \left(\frac{VQ_b}{2It} + \frac{2VQ_a}{2It}\right)bt\cdot 2c - Ve = 0$$

$$= \frac{V}{It}\left\{2\frac{c^2t}{2}\cdot\frac{ct}{3}\cdot b + \left(\frac{cbt}{2} + \frac{c^2t}{2}\right)bt\cdot 2c\right\} - Ve = 0$$

$$= \frac{V}{It}\left\{\frac{c^3t^2b}{3} + c^2b^2t^2 + c^3bt^2\right\} - Ve = 0$$

$$e = \frac{1}{It}\left\{\frac{4}{3}c^3t^2b + c^2b^2t^2\right\} = \frac{c^2bt}{I}\left(b + \frac{4}{3}c\right) = \frac{c^2bt\left(b+\frac{4}{3}c\right)}{c^2t\left(\frac{4}{3}c + 2b\right)} = \frac{b\left(b+\frac{4}{3}c\right)}{\left(\frac{4}{3}c+2b\right)}$$





$$\tau_a = \frac{VQ_a}{It} \qquad \tau_b = (\tau_b - \tau_a) + \tau_a = \frac{VQ_b}{It} + \frac{VQ_a}{It}$$

$$I = \frac{t(2c)^3}{12} + 2bt\,c^2 + 2\left[\frac{tc^3}{12} + tc\left(\frac{3c}{2}\right)^2\right]$$

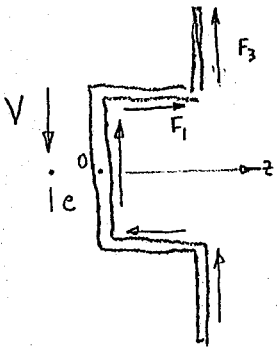
$$Q_a = \int y\,dA = t\frac{(2c-y)(2c+y)}{2} = \frac{t}{2}(4c^2 - y^2)\Big|_{y=c} = \frac{3c^2t}{2}$$

$$Q_b = cbt$$

כאן ניתן לראות הקודמת

$$F_3 = \int \tau_a\,dA = \frac{V}{It}\int_c^{2c}\frac{t}{2}(4c^2 - y^2)\cdot t\,dy = \frac{Vt}{2I}\left(4c^2y - \frac{y^3}{3}\right)_c^{2c} = \frac{5}{6}\frac{Vtc^3}{I}$$

$$F_1 = \frac{\tau_b+\tau_a}{2}bt = \frac{1}{2}\left(\frac{VQ_b}{It} + \frac{2VQ_a}{It}\right)bt = \frac{Vtbc}{2I}(b+3c)$$



$$\Sigma M_0 = -Ve + F_1\cdot 2c - 2F_3\cdot b = 0$$

$$= -Ve + \frac{Vtbc}{2I}(b+3c)\cdot 2c - 2\cdot\frac{5}{6I}Vtc^3\cdot b$$

$$e = \frac{tbc^2(b+3c) - \frac{5}{3}tc^3b}{\frac{64}{12}tc^3 + 2btc^2} = \frac{b}{2}\frac{\left(b+\frac{4}{3}c\right)}{\left(b+\frac{8}{3}c\right)}$$

המכללה האקדמית יהודה ושומרון

תורת הרוזק 1

תרגיל כוס' 2

1. The stress distribution on the rectangular cross-section shown in Fig. 1 is given by $\sigma_{xx}=1000y-500z+800$ kPa, $\sigma_{xy}=200z$ kPa, $\sigma_{xz}=0$.
What is the net internal force system on this cross-section ?

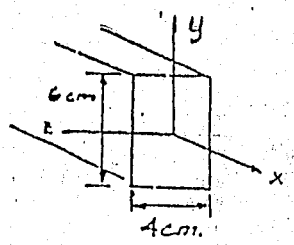


Fig. 1

Answer : $F=1920$ N, $V_y=V_z=0$
$M_y=-1600$ N-cm., $M_z=-7200$ N-cm., $T=-640$ N-cm.

2. Suppose the stress distribution on a cross-section of the circular cylinder of Fig. 2 is given by $\sigma_{xx}=\sigma_{xr}=0$, $\sigma_{x\theta}=k\sqrt{r}$, where k is unknown. What is the value of k in this case?

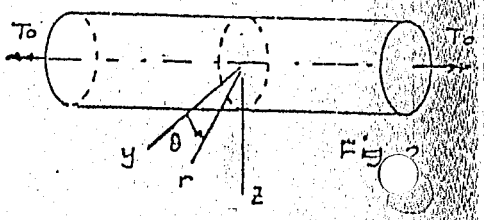


Fig. 2

Answer : $k=7T_0/4\pi R^{7/2}$

6.4 For the given state of stress, determine the normal and shearing stresses exerted on the oblique face of the shaded triangular element shown. Use a method of analysis based on the equilibrium equations of that element, as was done in the derivations presented in Sec. 6.2.

6.6 For the given state of stress, determine (*a*) the principal planes, (*b*) the principal stresses.

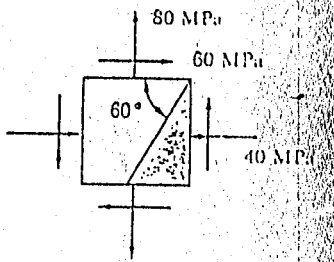


Fig. P6.4

6.12 For the given state of stress, determine (*a*) the orientation of the planes of maximum in-plane shearing stress, (*b*) the maximum in-plane shearing stress, (*c*) the corresponding normal stress.

6.14 For the given state of stress, determine the normal and shearing stresses after the element shown has been rotated through (*a*) 40° counterclockwise, (*b*) 15° clockwise.

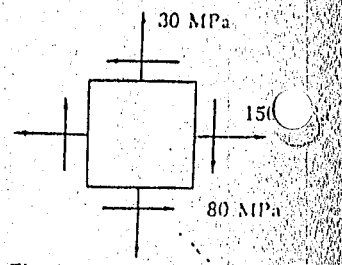
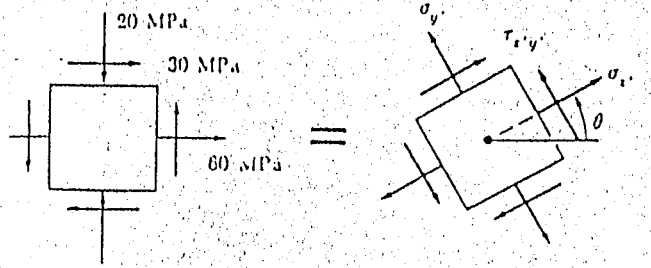


Fig. P6.6 and P6.10

6.56 For the state of plane stress shown, determine the range of values of θ for which the normal stress $\sigma_{y'}$ is equal to or less than +65 MPa.



P6.55 and P6.56

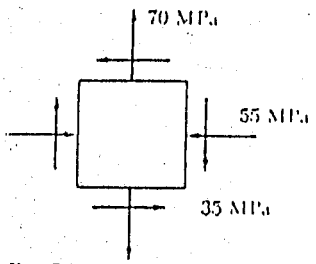


Fig. P6.14

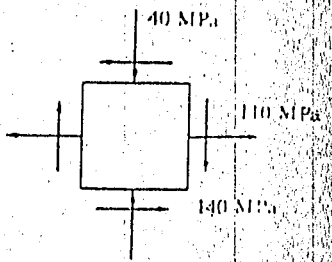
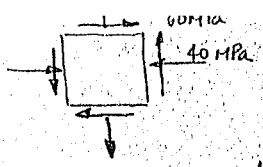


Fig. P6.8 and P6.12

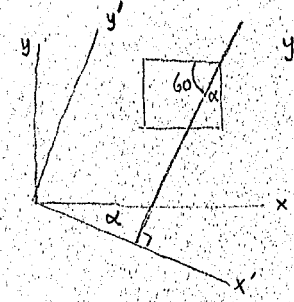
25
/2



$\sigma_x = -40$ MPa
$\tau_{xy} = 60$ MPa
$\sigma_y = 80$ MPa

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

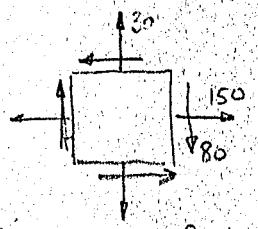


(א) לפי הציור $\alpha = -30°$, כי האלכסון הוא מקביל ל-y'.

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{-40+80}{2}\right) + \left(\frac{-40-80}{2}\right)\cos(-60) + 60\sin(-60)$$
$$= 20 + (-60)\cdot\frac{1}{2} + 60(-.866) = \underline{-61.96\ \text{MPa}}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{-40-80}{2}\right)\sin(-60) + 60\cos(-60)$$
$$= +60(-.866) + 60\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{-21.96\ \text{MPa}}$$

6.6



$\sigma_x = 150$ MPa
$\sigma_y = 30$ MPa
$\tau_{xy} = -80$ MPa

(א) למצוא את הכיוונים העיקריים ואת המאמצים העיקריים

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

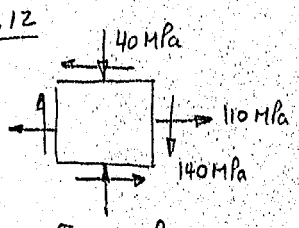
לכן

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{150+30}{2}\right) \pm \left[\left(\frac{150-30}{2}\right)^2 + (-80)^2\right]^{1/2}$$
$$= 90 \pm 100 \Rightarrow \quad \sigma_1 = 190.\text{-} \text{ MPa}$$
$$\sigma_2 = -10.\text{-}5 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2(-80)}{150-30} = -1.333$$

$$2\theta = -53.13 \qquad \theta = \underline{-26.57°} \qquad \theta_2 = \theta + 90° = \underline{63.43°}$$

6.12



$\sigma_x = 110$MPa
$\sigma_y = -40$ MPa
$\tau_{xy} = -140$ MPa

למצוא את הכיוונים של מאמץ הגזירה המקסימלי והמאמץ הנורמלי המקסימלי.

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \left[\left(\frac{110-(-40)}{2}\right)^2 + (-140)^2\right]^{1/2} = \pm 158.82\ \text{MPa}$$

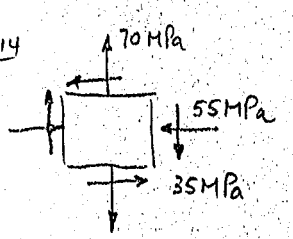
$$\tan 2\alpha = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} = -\frac{[110-(-40)]}{2(-140)} = \frac{-150}{-280} = 208.18°$$

מפני שהציור מתלקי שלוי הוא שלילי

$$\alpha = 104.09°$$
$$\alpha + 90° = 194.09° = 14.09°$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$= \frac{110-40}{2} + \left(\frac{110-(-40)}{2}\right)\cos 208.18 + (-140)\sin 208.18°$$
$$= 35 + 75\cos 208.18 - 140\sin 208.18 = 0$$

6.14

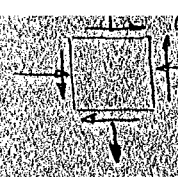


$\sigma_x = -55$MPa
$\sigma_y = 70$ MPa
$\tau_{xy} = -35$ MPa

בסעיף א' למצוא את המאמצים בשטר התלקין הולך ומסתובב $40°$ נגד השעון (מאמצים נורמלי וגזירה).
בסעיף ב' אותו תהליך בשטר התלקין הולך ומסובב $15°$ בכיוון השעון.

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \qquad \alpha = 40°$$
$$= \frac{-55+70}{2} + \left(\frac{-55-70}{2}\right)\cos 80 + (-35)\sin 80$$
$$= 7.5 - 62.5\cos 80 - 35\sin 80 = -37.82\ \text{MPa}$$

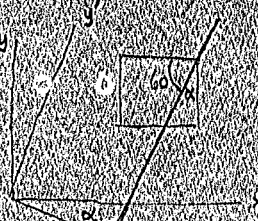
$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$



$\sigma_x = -40$ MPa
$\tau_{xy} = 60$ MPa
$\sigma_y = 80$ MPa

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$



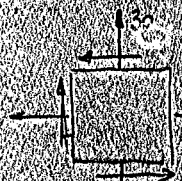
לפי הציור $\alpha = -30°$, כי הזווית נמדדת נגד כיוון השעון מציר x לציר y.

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{-40+80}{2}\right) + \left(\frac{-40-80}{2}\right)\cos(-60) + 60\sin(-60)$$
$$= 20 + (+60)\cdot\frac{1}{2} + 60(-.866) = \underline{-61.96\ \text{MPa}}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{-40-80}{2}\right)\sin(-60) + 60\cos(-60)$$
$$= 60(-.866) + 60\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{-21.96\ \text{MPa}}$$

6.6

(א) נתון מצב מישורי של מאמצים. מצאו את המאמצים העיקריים ואת הכיוונים העיקריים.



$\sigma_x = 150$ MPa
$\sigma_y = 30$ MPa
$\tau_{xy} = -80$ MPa

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

$$\sigma_{1,2} = \left(\frac{150+30}{2}\right) \pm \left[\left(\frac{150-30}{2}\right)^2 + (-80)^2\right]^{1/2}$$

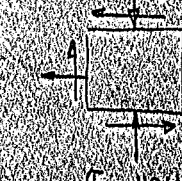
$\sigma_1 = 190.\ldots$ MPa

$= 90 \pm 100 \ldots$ $\sigma_2 = -10.\ldots$ MPa

$$\tan 2\theta = \frac{2(-80)}{150-30} = -1.333$$

$2\theta = -53.13$ $\quad \theta = -26.57°$ $\quad \theta_2 = \theta + 90° = \underline{63.43°}$

6.12



$\sigma_x = 110$ MPa
$\sigma_y = -40$ MPa
$\tau_{xy} = -140$ MPa

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$= \left[\left(\frac{110-(-40)}{2}\right)^2 + (-140)^2\right]^{1/2} = \pm 158.82\ \text{MPa}$$

$$\tan 2\alpha = -\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2\tau_{xy}} = -\frac{[110-(-40)]}{2(-140)} = \frac{-150}{-280} = 208.18°$$

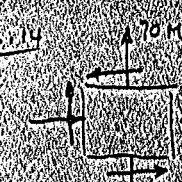
מצאנו את הזווית שבין הכיוון העיקרי לבין הכיוון שבו פועל τ_{xy}.

$\alpha = 104.09°$

$\alpha + 90° = 194.09° = 14.09°$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$= \frac{110-40}{2} + \left(\frac{110-(-40)}{2}\right)\cos 208.18 + (-140)\sin 208.18°$$
$$= 35 + 75\cos 208.18 - 140\sin 208.18 = 0$$

6.14



$\sigma_x = -55$ MPa
$\sigma_y = 70$ MPa
$\tau_{xy} = -35$ MPa

מצאו את המאמצים הנורמליים והמאמצים הגזירים הפועלים על מישור הנטוי בזווית $40°$ ביחס למישור שעליו פועל המאמץ σ_x (המישור האנכי). הציגו את התוצאות על גבי אלמנט דיפרנציאלי שצלעותיו נטויות בזווית $15°$ ביחס לצירים x ו-y.

$\alpha = 40°$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$
$$= \frac{-55+70}{2} + \left(\frac{-55-70}{2}\right)\cos 80 + (-35)\sin 80$$
$$= 7.5 + 62.5\cos 80 - 35\sin 80 = -37.82\ \text{MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

ה) $\alpha = -15°$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

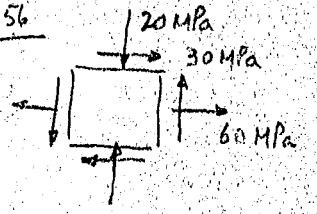
$$= 7.5 - 62.5\cos(-30) + (-35)\sin(-30) = 7.5 - 62.5(.866) - 35(-\tfrac{1}{2}) = -29.13\ \text{MPa}$$

$$\sigma_{y'} = I_{1\sigma} - \sigma_{x'} = (\sigma_x+\sigma_y) - \sigma_{x'} = 15 - (-29.13\ \text{MPa}) = 44.13\ \text{MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

$$= 62.5\sin(-30) + (-35)\cos(-30) = 62.5(-\tfrac{1}{2}) - 35(.866) = -61.56\ \text{MPa}$$

6.56



$\sigma_x = 60\ \text{MPa}$
$\sigma_y = -20\ \text{MPa}$
$\tau_{xy} = 30\ \text{MPa}$

$$\sigma_{x'} = \left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$= \frac{60-20}{2} + \frac{60+20}{2}\cos 2\alpha + 30\sin 2\alpha$$

$$\sigma_{x'} = 20 + 40\cos 2\alpha + 30\sin 2\alpha$$

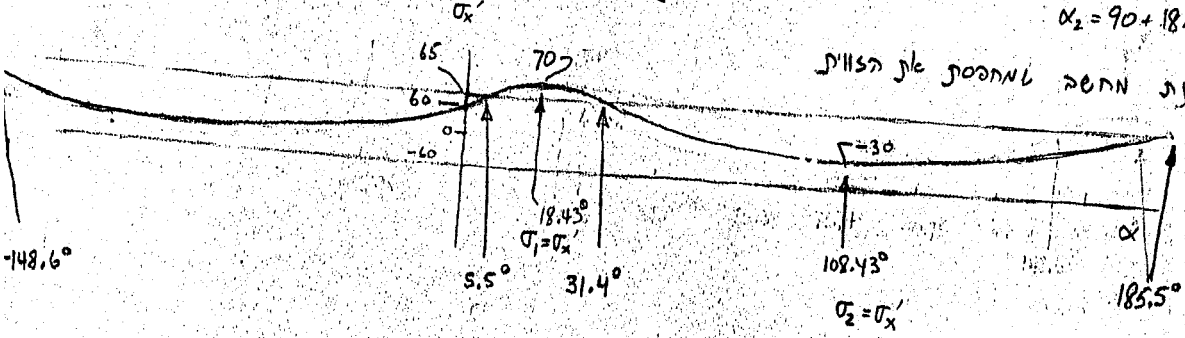
מעגל מוהר $\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \left[\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2}$

$$= \frac{60-20}{2} \pm \left[\left(\frac{60+20}{2}\right)^2 + 30^2\right]^{1/2} = 20 \pm \left[40^2+30^2\right]^{1/2} = 20 \pm 50 = \begin{cases} 70 \\ -30 \end{cases}\ \text{MPa}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{2(30)}{60+20} = \frac{60}{80} = 0.75$$

$2\alpha = 36.87°$ $\quad \alpha = 18.43°$

$\alpha_2 = 90 + 18.43° = 108.43°$



לא נשתמש בתוכנת מחשב ונתפנק את הציון

$$\cos 2\alpha = \cos(360+2\alpha) = \cos(-[360-2\alpha])$$

$\alpha = 5.5$ עם

$2\alpha = 360+2\alpha = 371$ ומכ מצה $185.5°$. רוצים ב- $180° = 185.5° - 5.5°$

$\alpha = 31.4$ עם

$-(360-2\alpha) = -297.2$ ומכ מצה $-148.6°$. רוצים ב- $-180° = -148.6° + 31.4°$

מדרות: הפכה (הסיבוב של הנקודה) ב- $31.4°$ ו- $-148.6°$ מהות

הפכה של $5.5°$ ו- $185.5°$ מהות

לכן, כי $5.5 \le \alpha \le 185.5$ $\quad 31.4° < \sigma_{x'}$

וכי $5.5 \le \alpha \le -148.6°$ $\quad \sigma_{x'} < 59$

3. The beam shown Fig. 3 has a rectangular cross-section and is subjected to bending couples at its end. The stress distribution on a cross-section is given by :

$$\sigma_{xx} = \begin{cases} -\sigma_0 & , y \geq c \\ -\sigma_0 y/c & , -c \leq y \leq c \\ \sigma_0 & , y \leq -c \end{cases}$$

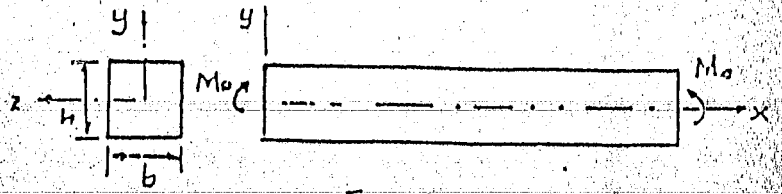


Fig. 3

where c is a constant ($0 \leq c \leq h/2$) and σ_0 is a known number.

(a) Sketch the stress distribution for a given c.

(b) For what value of c will M_0 have a maximum value? Determine $(M_0)_{max}$.

(c) Draw the stress distribution for σ_x when $M=(M_0)_{max}$.

Answer : (b) : $(M_0)_{max} = \sigma_0 bh^2/4$

answers:

6.4 $\sigma_b = -62.0$ MPa ; $\tau = 22.$ MPa

6.6 (a) $-26.6°$; $+63.4°$

(b) $\sigma_{max} = 190.$ MPa $(\theta = 26.6°)$

$\sigma_{min} = -10.$ MPa

6.10 (a) $18.4°$; $108.4°$

(b) 100. MPa

(c) 90. MPa

6.14 (a) -37.8 MPa ; 52.8 MPa ; 55.5 MPa

(b) -29.1 MPa ; 44.1 MPa ; -61.6 MPa

6.56 $-148.6° \leq \theta \leq 5.52°$

$31.4° \leq \theta \leq 185.5°$

$\sigma_{xx} = 1000y - 500z + 800$

$\sigma_{xy} = 200z$

$\sigma_{xz} = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$0 + 0 + 0 + X = 0 \Rightarrow X = 0$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$0 + ?$

$$\int \sigma_{xx}\, dy\, dz = \left(\frac{1000}{2}y^2 - 500yz + 800y\right)\Big|_{-3}^{3} dz$$

$$= \frac{1000}{2}(9-9) - 500z(3+3) + 800(3+3)$$

$$= (-3000z + 4800)\, dz$$

$$= -\frac{3000z^2}{2} + 4800z\Big|_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{3000}{2}(4-4) + 4800(2+2) = 19200 \text{ kPa-cm}^2$$

$$= 1.92 \times 10^7 \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$= 1920 \text{ N}$$

$$V_y = \int \sigma_{xy}\, dy\, dz = dz(200zy)\Big|_{-3}^{3} = 200z(6) = \int 1200z\, dz$$

$$= \frac{1200}{2}z^2\Big|_{-2}^{2} = 0$$

$$V_z = \int \sigma_{xz}\, dy\, dz = 0$$



$$M_z = \int \sigma_{xx} \cdot y\, dy\, dz = \left(\frac{1000}{3}y^3 - \frac{500}{2}y^2z + \frac{800}{2}y^2\right)\Big|_{-3}^{3} dz\Big|_{-2}^{2} = \frac{1000}{3}(27+27) - \frac{500}{2}z(9-9) + \frac{800}{2}(9-9) = \frac{1000}{3} \cdot 18z\Big|_{-2}^{2} = 72000 \text{ kPa-cm}^3$$

$$M_y = \int \sigma_{xx} \cdot z\, dy\, dz = \left(\frac{1000}{2}y^2 - 500yz + 800y\right)\Big|_{-3}^{3} \cdot z\, dz = -500 \cdot 6\, z^2/2 + 800(6)z^2/2\Big|_{-2}^{2} = -\frac{3000}{3}(8+8) = -16000 \text{ kPa-cm}^3$$

$$= -1.6 \text{ N-m}$$

$$T = M_x = \int \tau_{xy} \cdot z\, dy\, dz = \frac{200z^2}{3}y\Big|_{-3}^{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{200}{3}(8+8)(3+3)$$

$$= 400(16) = 6400 \text{ kPa-cm}^3$$

$$= 6.4 \times 10^6 \text{ Pa} \cdot 1 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$= 6.4 \text{ N-m}$$

$$= 72000 \text{ kPa-cm}^3 \times 1 \times 10^{-4}$$

$$= 7.2 \times 10 \text{ N-m}$$

$$= 72 \text{ N-m}$$

2.

המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

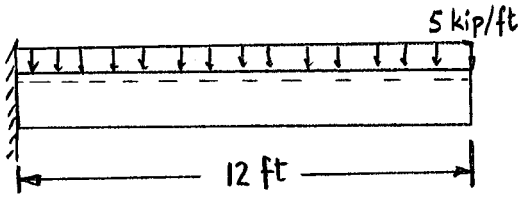
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

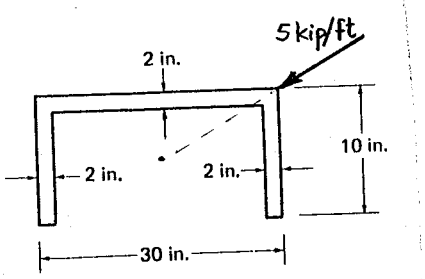
2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה.

3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים, מצאו את השקיעה ב-B 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI.

המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

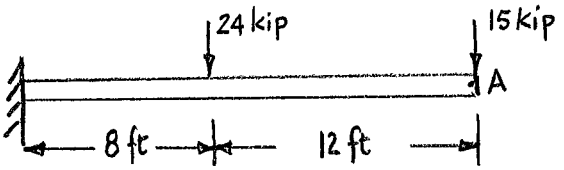
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



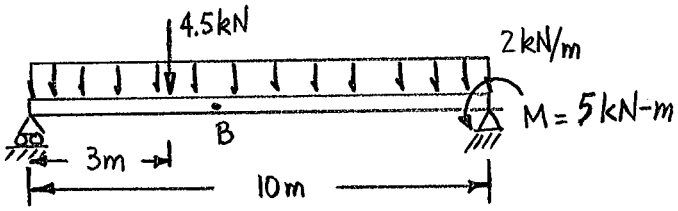


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

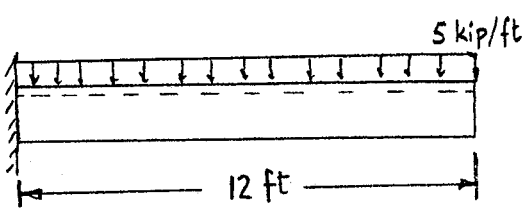


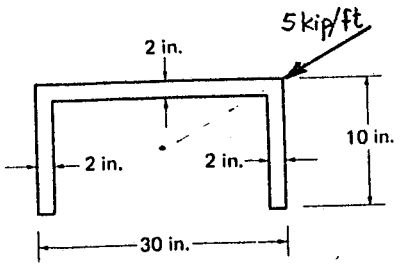
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

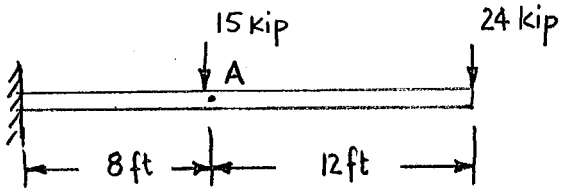
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



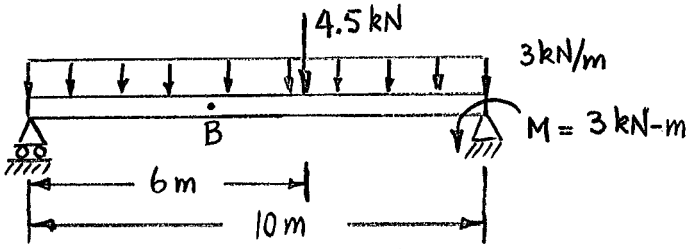


שטח חתך

2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A,לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ-29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000in^4$. (EI const)

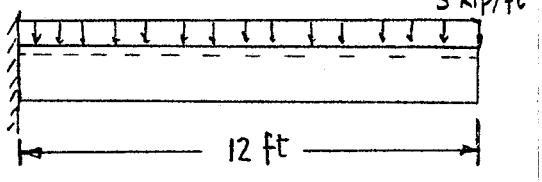


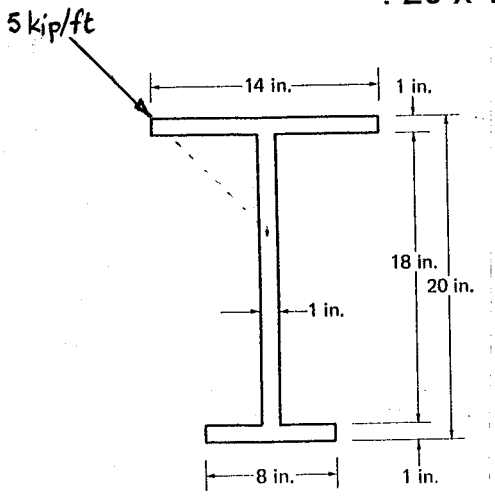
3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



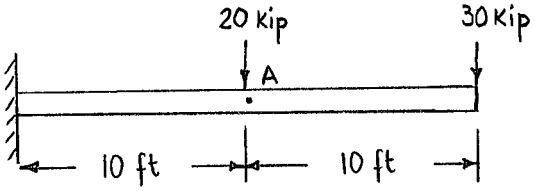
המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .

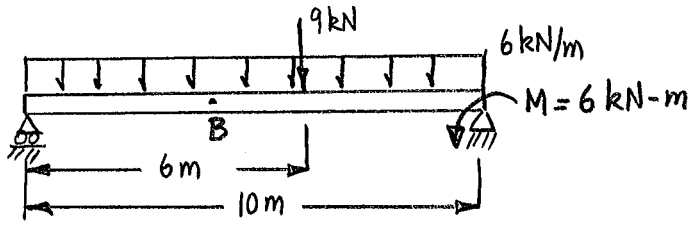




2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)

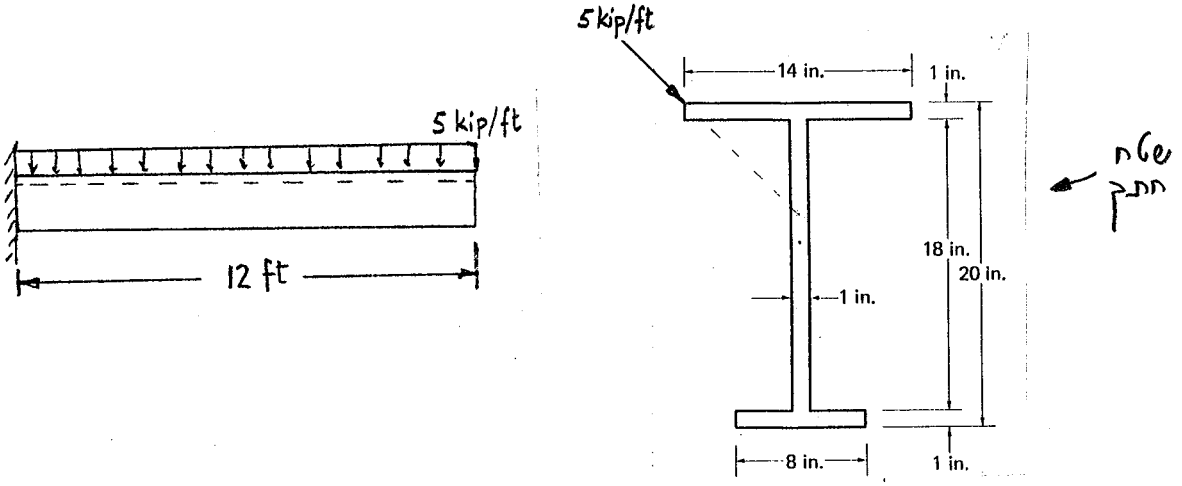


3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)

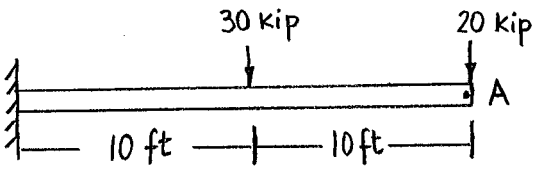


המכללה האקדמית להנדסה בנגב
בוחן ל חוזק חומרים 2
פרופ' עזרא לוי

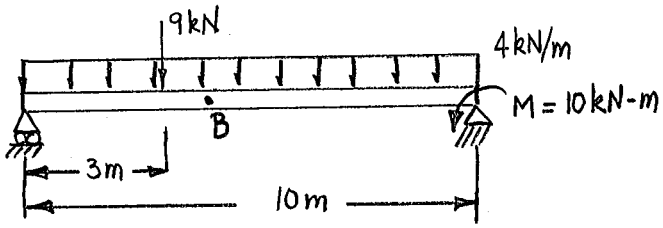
1) כוח מפורס משופע, שקו פעולתו עובר דרך מרכז הכובד של שטח החתך, פועל על הקורה המקובעת. ערכו של כוח מפורס הוא 5 Kip/ft .
מצאו את המאמץ המקסימלי, אם חומר הקורה הוא פלדה ומודול יונג שווה ל- 29×10^6 psi .



2) מיצאו את השיפוע והשקיעה בנקודה A, לקורה המקובעת שבתרשים לפי שיטת קורה צמודה. קחו מודול יונג כ- 29×10^6 psi ומומנט אינרציה כ- $2000\ in^4$. (EI const)



3) לקורה המועמסת כמשורטט בתרשים למטה, מצאו את השקיעה ב-B, 4 מטר מסמך נייד. תנו את תשובתכם/ן כפונקציה של EI. (EI const)



(1)

עבור $EA=\text{const}$ נדרש למצוא את התצוגה
התאוקית והתצוגה האנכית הפנות מבוא
P בשיטת אנרגיה. הכוח פועל בכיוון
ואורכו של כל מוט הוא L

ב) מה תהיה השפעה על מוט CA

(2)

מסבך מוטות עשוי מפלדה מאזנים הכוח P כמשורטט בציור. אם לכל מוט
יש שטח חתך שווה בקוטר של 7.5cm

א) מצאו את הכוח המקסימלי למרכיבה ומהשלה מוט בה יקרה.

ב) מה צריך להיות הקוטר כדי שיהיה מרכיבה ובנייה בו-זמנית במסבך

חשבו את P לפי התנאים הבאים: כל המוטות מאורכות מסיבה בשני הכיוונים
בשני קרניים בכיוון x, והתנועה בשני הקצוות שני קרניים בכיוון z.

$E=206\,GPa$, $\sigma_{yp}=250\,MPa$

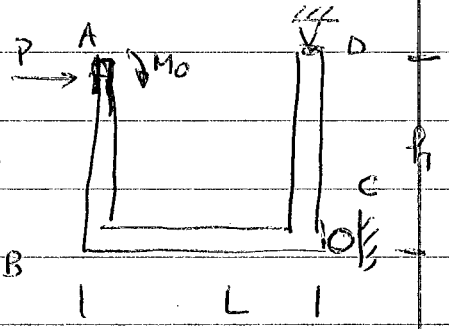
(3)

שתי קורות מאורכות זהות כמתואר
הקורות בעלות מפלדה
$E=200\,GPa$, $\sigma_y=360\,MPa$, $L_{AB}=3m$,
$L_{CD}=2m$

• מצאו הערכים המקסימלי, q, שיכול לפעול על CD
לפני קריסה בקורה AB.

• מבלו q כפונקציה של L ומצאו את q לפי התנאים הבאים

מסגרת ABCD, מחוברת בסיבוב ב- C ו- D משותפים



במומנט M_0 וכוח אופקי ב-A

א) שמשו במשפט קסטיליאנו להשיג את התזוזה האופקית של A. להתייחס רק להשפעות הכפיפות

ב) מצאו את השיפוע על קצה AB לאחר הדיר המשענת בנקודה A מפני כוח אופקי $P=1$ מושם ב-A