סטטיקה

פרק 1 - רקע היסטורי

המכניקה היא ענף הפיסיקה העוסק במצבם של גופים נחים או נעים הנתונים לפעולתו של כח. המכניקה הוא הנושא החשוב ביותר בתחום מדעי ההנדסה. עם תחילת פתוחה של המכניקה שימש שמה כשם נרדף להנדסה. הפתחויות הנרחבים בכל נושאי ההנדסה מבנים של גורדי שחקים, מכוניות, חלליות ומטוסים ועד ללמוד מבנה החומר ברמה האטומית ומתחתיה מתבססים על עקרונותיה של המכניקה.

המכניקה מתחלקת לשני תחומים עקריים: הסטטיקה והדינמיקה. נוכל לציין כמה מאבני הדרך ההיסטוריות של מדע זה:

287-212 BC - ארכמדס - חוק המנוף וחוק הצפה.

1548-1620 - Stevinus - מתמטיקאי פלמי - חבור וקטורים - חוק המקבילית, חוקי הסטטיקה הבסיסיים.

1564-1642 - גלילאו - דינמיקה.

1642-1727 - ניוטון - חוק הכבידה, חשבון אינפיניטסימלי, חוקי התנועה.

בנוסף למדענים אלו פעלו גם: ליאונרדו דה וינצ'י, Varignion,
Euler, Lagrange, D'alambert, Laplace, ואחרים.

מטרת הקורס שלפנינו ללמד את חוקי ועקרונות הסטטיקה ואת דרך יישומה בבעיות הנדסיות.

פרק 2 שקולי כחות ומומנטים

2.1 מבוא ועקרונות בסיסיים

לשם דיון בעקרונות הסטטיקה נצטרך לבצע הגדרות ועקרונות יסוד:

2.1.1 כח

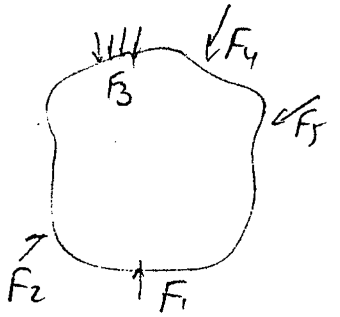
כח הינו פעולתו של גוף אחד על גוף שני. ניתן להגדירו גם כ: פעולה הנוטה לשמר או לשנות את מצבו של גוף או המנסה לעשותו.

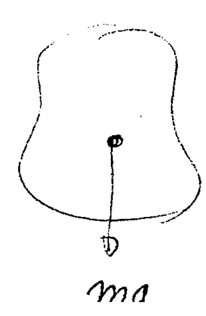
כח הינו גודל וקטורי שלו א. עצמה ב. כוון ג. נקודת אחיזה.

* ניתן להפעיל כח במגע (contact) מכני ישיר כגון משיכה או דחיפה של גוף או ע"י הפעלה מרחוק באמצעות שדה גרביטציוני חשמלי או מגנטי.

* כח נהוג לפעול "נקודתית" (או קרוב לכך במציאות) ואז יקרא כח מרוכז אך שהוא יכול להיות מחולק באופן רציף כגון: לחץ האויר בבלון ואז נקרא כח מחולק.

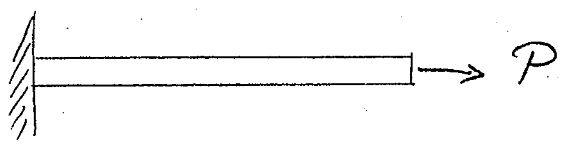
* ישנם כחות הפועלים על פני של הגוף במגע ישיר בד"כ והם מכונים כחות פנים וישנם כחות הפועלים על נפח הגוף למשל כח הכובד

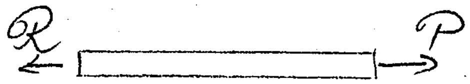




כוחות אלו מכונים כוחות גוף.

* כתוצאה מהפעלתו של כח על גוף נוצרות שתי תגובות
תגובה חיצונית לגוף ותגובה פנימית. נסתכל במוט
שבשרטוט. כתוצאה מהפעלת P נוצרת תגובה בקיר





המפעילה כח על המוט R
זוהי התגובה החיצונית להפעלתו של P על המוט. ברם קיימת
גם תגובה פנימית. בתוך המוט נוצרים מאמצים ועיבורים.
תורת הסטטיקה עוסקת בהשפעות החיצוניות בעוד שחוזק
החומרים, תורת האלסטיות הפלסטיות וכו', עוסקות בתגובה
הפנימית להפעלתו של כח.

2.1.2 עקרונות הסטטיקה הבסיסיים

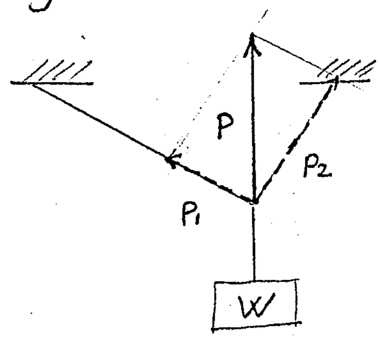
קיימים שלושה עקרונות (או אקסיומות) בסיסיות בתורת
הסטטיקה: חוק המקבילית, חוק הפעולה והתגובה ועקרון
ההתמדה

חוק המקבילית

חוק זה נוסח ב-1586 ע"י Stevinus:

השפעת שני כוחות, שקווי פעולתם נחתכים, הפועלים על
גוף שקולה להשפעתו של כח יחיד שהצגתו הוקטורית

הנה האלכסונה של מקבילית שצלעותיה הם שני הוקטורים המקוריים.

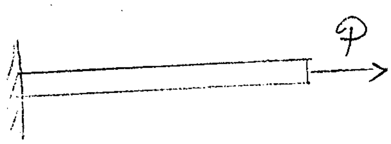


$$\vec{P_1}+\vec{P_2}=P$$

חוק הפעולה והתגובה

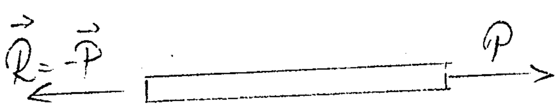
חוק זה הידוע גם כחוק השלישי של ניוטון (פעולה ותגובה) קובע כי: כשגוף א' מפעיל כח על גוף ב' אזי יפעיל גוף ב' על גוף א' כח השווה בעוצמתו וההפוך בכיוונו הפועל על אותו קו פעולה כמו הכח המקורי.

למשל: המוט מפעיל כח P על הקיר ולכן הקיר יפעיל כח R על המוט כך ש:



$$\vec{P}+\vec{R}=0$$
$$\vec{R}=-\vec{P}$$

וכשנדון בגוף המוט נוכל לראות כי בעצם פועלים עליו שני כחות.

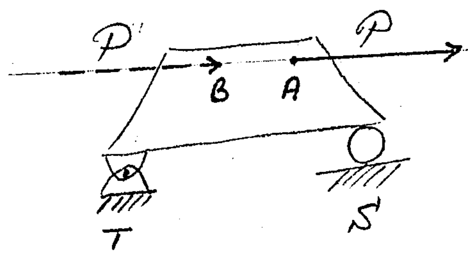


עקרון ההחלקה

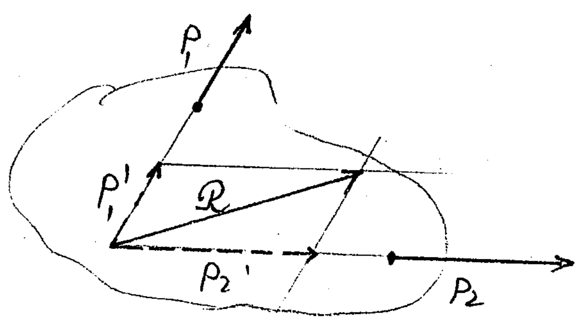
כשדנים בתגובה של גוף קשיח מעניין רק התגובה החיצונית להפעלתם של כוחות. הנסיון הפיסיקלי מלמד ש:

ניתן להפעיל כח בכל נקודה שהיא לאורך קו פעולתו מבלי לשנות את התגובה החיצונית להפעלתו על גוף נתון:

הפעלת P ב-A או ב-B תגרום לאותן תגובות בסמכים T ו-S.



עקרון ההחלקה עוזר לנו בחישובי שקולים של כוחות שונים פועלים בנקודה אחת:

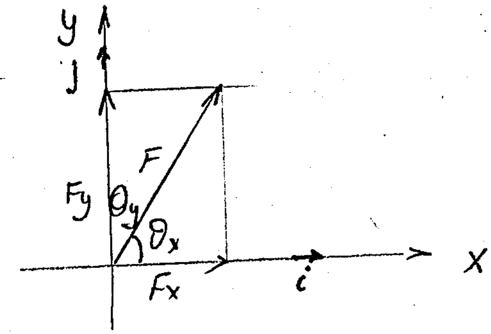


$$R = P_1' + P_2' = P_1 + P_2$$

2.2 רכיבים קרטזיים של וקטור

נתחיל את נתוחנו בבעיות דו-מימדיות בטרם נרחיב למקרה הכללי התלת מימדי.

וקטור (במישור) ניתן לפרק לאינספור זוגות של רכיבים בהתאם לכווני הרכיבים שנבחר. פירוק בסיסי וחשוב הוא הפירוק לרכיבים קרטזיים:



$F_x = F\cos\theta_x$ $\qquad$ $F_x = F\cos\theta_x$ $\qquad$ $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

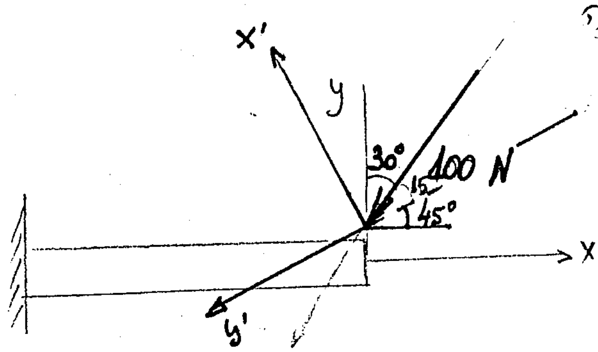
$F_y = F\cos\theta_y$ $\qquad$ $F_y = F\sin\theta_x$ $\qquad$ $\theta_x = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x}$

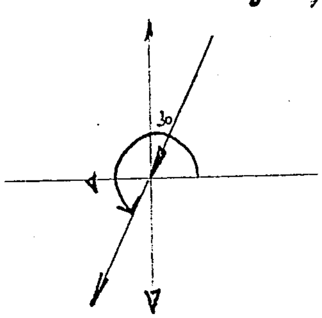
באמצעות i ו-j כוקטורי יחידה בכיוונים X ו-y ניתן לרשום

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = iF_x + jF_y$$

בחירת מערכת הצירים היא שרירותית ועל המהנדס להתאים בכל מקרה לבעיה הנדונה

<u>דוגמא א</u>



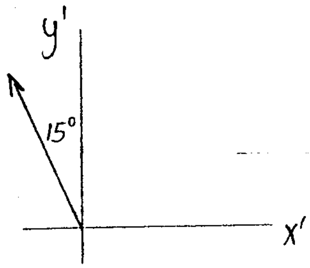


רכיבי F במערכת x,y :

F יוצר זווית של 240° עם ציר x לכן

$\theta_x = 240$ $\qquad$ $F_x = 100\cos(240°) = -100\cos 60 = -50\ N$

$\theta_y = 150$ $\qquad$ $F_y = 100\cos(150°) = -100\sin 60° = -86.60\ N$



רכיבי F במערכת y'x'

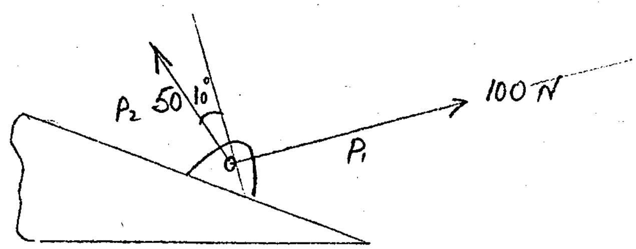
$\theta_x = 105°$ $\qquad$ $\theta_y = 15°$

$F_x = 100\cos 105° = -25.9$ New

$F_y = 100\cos 15° = 96.5\ N$

דוגמא ב'

בעזרת פירוק לרכיבים ניתן לחשב במהירות גם שקולי וקטורים



$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$R_x = P_{1x} + P_{2x}$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y}$$

$$P_{1x} = +100\ N$$

$$P_{1y} = 0$$

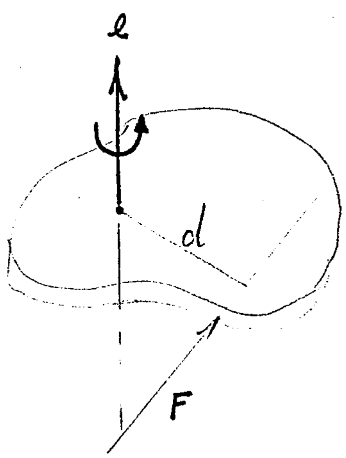
$$P_{2x} = 50\cos 100° = -8.682$$

$$P_{2y} = 50\sin 100° = +49.240$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(P_{1x}+P_{2x})^2 + (P_{1y}+P_{2y})^2} = \sqrt{91.318^2 + 49.24^2} = 103.74\ N$$

2.3 מומנטים (Moment, Torque)

בנוסף לנטייתו של כח להזיז את הגוף עליו הוא פועל בכוון פעולתו נוטה הכח גם לסובב את הגוף סביב ציר כל שהוא אשר אינו נחתך עם קו פעולת הכח.



הכח F נוטה לסובב את הדסקה סביב הציר l עוצמת הסבוב תהיה תלויה בכח F ובמרחקו מ-l שהוא d

$$M = Fd$$

המומנט M הינו וקטור שעוצמתו Fd וכוונו נקבע על פי חוק היד הימנית: כוונו של M כבוון בוהן היד הימנית כשיתר האצבעות מתפתלות במגמה בה נוטה F לסובב את הגוף.

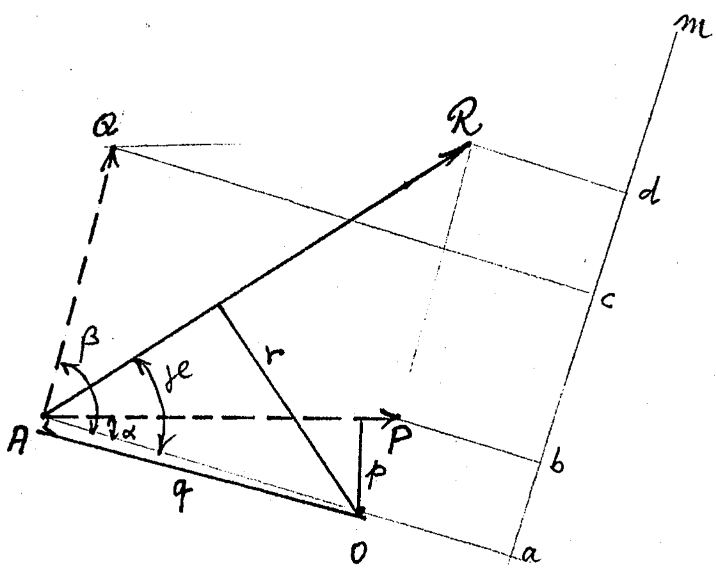
כאשר נסתכל במומנטים של כוחות במישור אזי כיוון וקטור המומנט יהיה או מן הנייר החוצה כשהסיבוב הוא נגד מגמת השעון ואז מקובל לסמנו (+) או אל תוך הנייר כשמגמתו עם כיוון השעון ואז מקובל לסמנו (-)

ובהגדרה:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

משפט המומנטים Varignon Theorem (2-D) (מתמטיקאי צרפתי 1654-1722)

"המומנט שיוצר כח סביב ציר כל שהוא שווה לסכום המומנטים שיוצרים רכיבים של אותו כח סביב אותו הציר"



נתון: הוקטור R שרכיביו P ו- Q ומרחקיהם מנקודת חישוב המומנטים O הם r p ו- q בהתאמה.

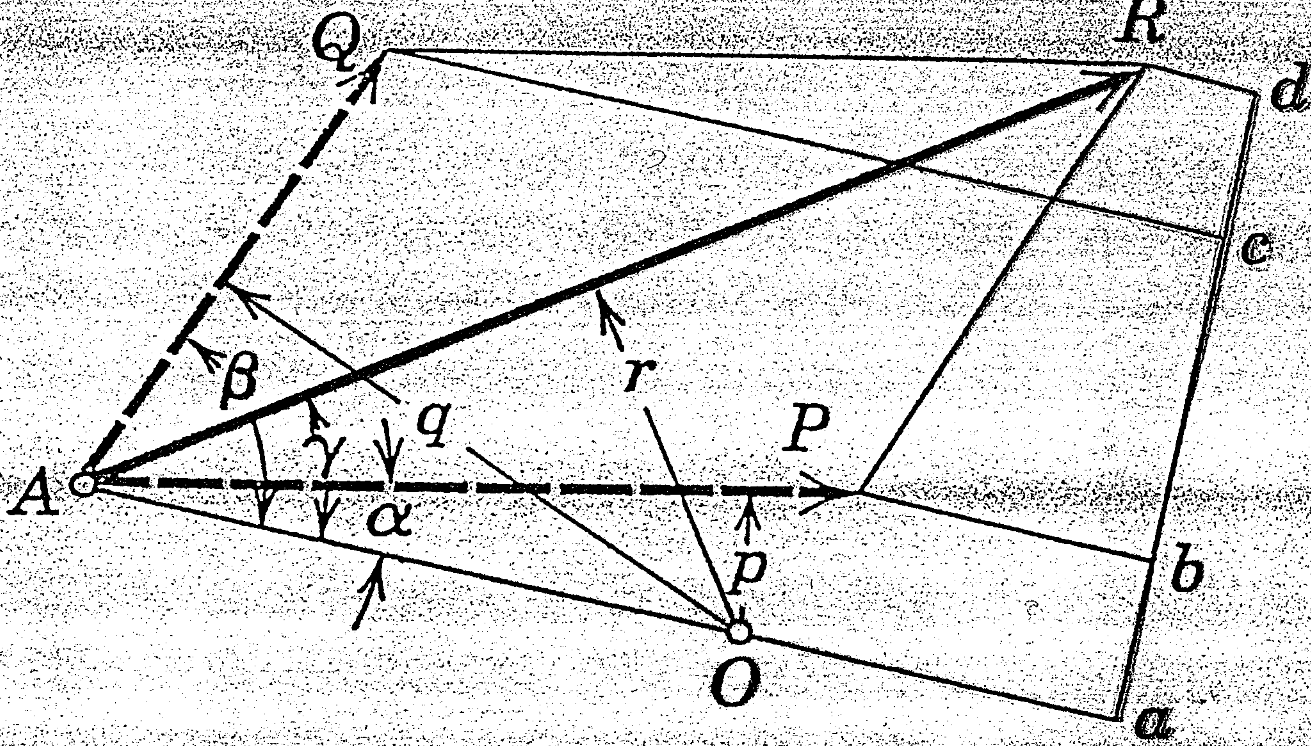
בניה: נחבר AO ונעלה לו אנך הישר m ונטיל עליו את R,P,Q

$$\bar{ad} = \bar{ab} + \bar{bd}$$

הקטעים $\bar{bd}$ ו- $\bar{ac}$ הם היטליהם של צלעות שוות במקבילית ולכן הם שווים.

$$\therefore \quad \bar{ad} = \bar{ab} + \bar{ac}$$

Varignon [illegible]



$$\overline{ad} = \overline{ab} + \overline{bd} = \overline{ab} + \overline{ac}$$

$$R \sin\gamma = P \sin\alpha + Q \sin\beta$$

$$Rr = Pp + Qq$$

$$R \sin \gamma = P \sin \alpha + Q \sin \beta$$

נכפל ב OA

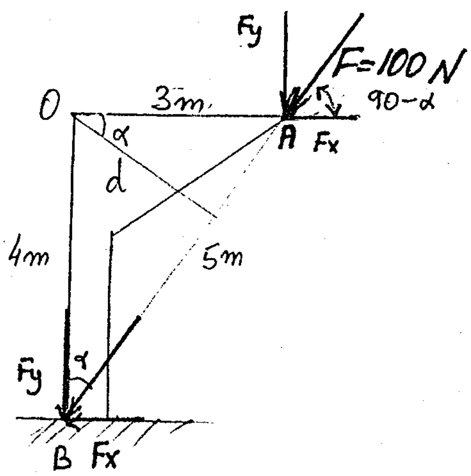
$$R \underbrace{\overline{OA} \sin \gamma}_{r} = P \underbrace{\overline{OA} \sin \alpha}_{p} + Q \underbrace{\overline{OA} \sin \beta}_{q}$$

$$Rr = Pp + Qq$$

מ.ש.ל.

דוגמא א'

חשב את המומנט של הכח F סביב ציר אנך העובר דרך O



דרך א'

$$M = F \cdot d$$

$$d = 3 \cos \alpha$$

$$M = 100 \cdot 3 \cos \alpha = 300 \times 0.8 = 240 \ N \times m$$

דרך ב

נפרק את F בנקודה A (רכיבים כרגיל)

F_x אינו יוצר מומנט סביב O ולכן לפי משפט וריניון

$$M = F_y \times 3m = 100 \sin(90-\alpha) \times 3 = 240 \ N \times m = -240$$

דרך ג

נשתמש במשפט ההחלקה ונעביר את F ל-B נפרק לשתי רכיבים

כאשר F_y אינו תורם למומנט ולכן

$$M = F_x \cdot 4m = 100 \sin \alpha \times 4m = 240 \ N \times m$$

דרך ד

$$\vec{r} = 3\vec{i}$$

$$\vec{F} = -F \sin \alpha \, \vec{i} - F \cos \alpha \, \vec{j}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = \begin{vmatrix} i & j & K \\ 3 & 0 & 0 \\ -F\sin\alpha & -F\cos\alpha & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \times 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{K}(-3F\cos\alpha) = -3F\cos\alpha \, \vec{K}$$

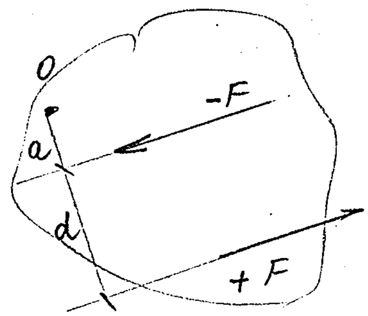
$$= -3 \times 100 \times 0.8 \, \vec{K} = -240 \vec{K}$$

דרך ה'

$| \; i \quad j \quad K \; |$

2.4 צמדים (Couples)

המומנט הנוצר ע"י שני כוחות מקבילים המנוגדים בכיוונים
נקראו צמד. לצמדים חשיבות רבה מעשית. נסתכל בזוג
הכוחות F

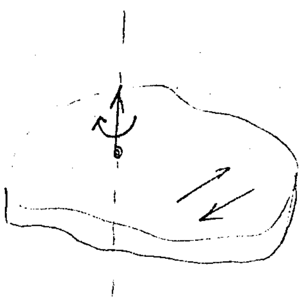


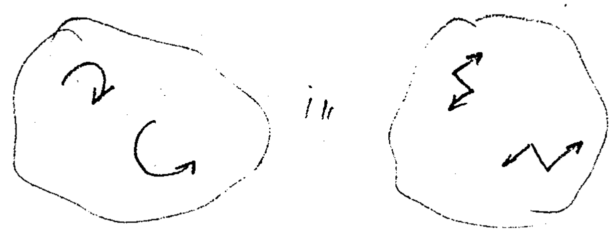
$$M = F(a+d) - F\cdot a$$

$$M = F\cdot d$$

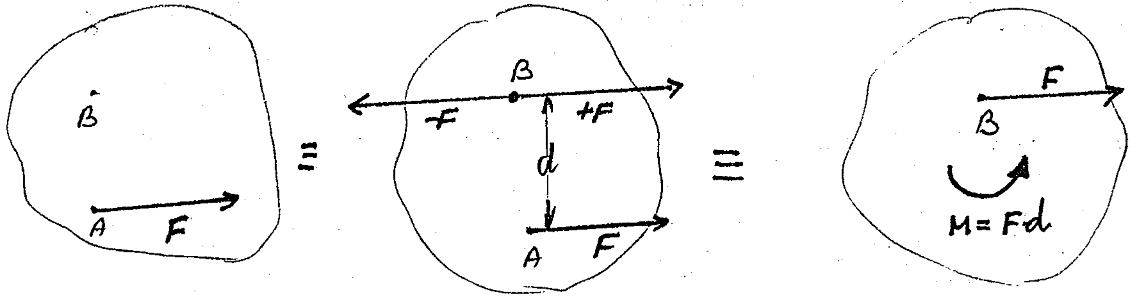
זוג הכוחות הנ"ל שקולים ל-0 וכל פעולתם לסובב את הגוף.
עוצמת המומנט שהם יוצרים תלויה במרחק בינהם d ולא במרחק
מהנקודה סביבה חושב המומנט – O כלומר עוצמת המומנט של
צמד שווה ביחס לכל ציר סביבו שהוא. מכיון שהצמד הינו
וקטור חופשי

ניתן לסמנו במקרה המישורי ע"י





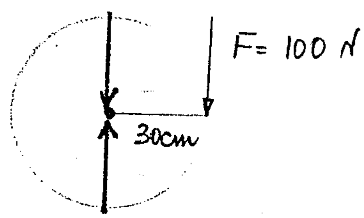
** כיוון שלכוח שתי השפעות על גוף: להזיזו
בכיוון פעולת הכוח ולסובבו סביב כל ציר שהוא שאינו נחתך
עם קו פעולת הכוח נוכל לייצג שתי תכונות אלו ע"י העתקתו
של הכוח בכוח שווה ומקביל לו ובצמד:

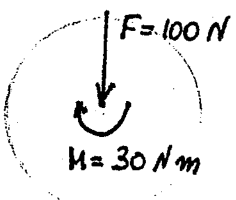


לתהליך של המרת כח בכח מקביל + מצמד ולתהליך ההפוך
יש חשיבות מעשית רבה.

<u>דוגמא</u>

מופעל כח על גלגל תנופה מצא הכח
והמומנט המופעלים על הציר





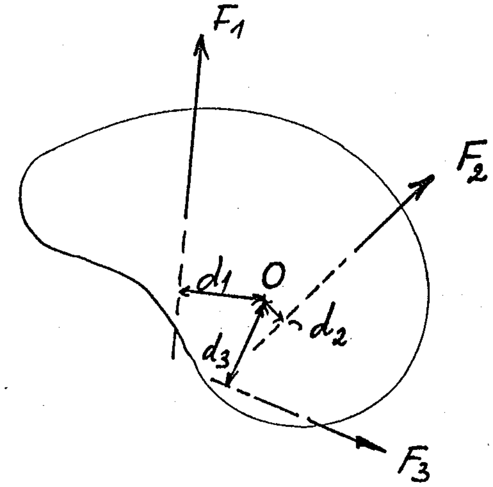
2.5 <u>שקולי כוחות</u>

במשוואות הפיסיקליות עלינו להתמודד עם גופים הנפעלים ע"י מערכת של כוחות ומומנטים לשם כך ברצוננו להמיר כל מערכת כחות לכח שקול מבחינת ההשפעה החיצונית על הגוף.

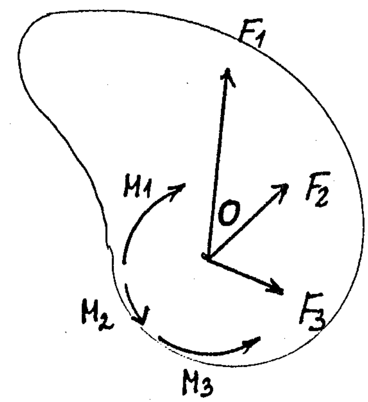
המצב בו שקול הכוחות והמומנטים הוא - 0 נקרא שווי משקל סטטי במצב זה השקולים אלו אינם מתורגמים לתאוצה קווית וסיבובית בהתאם לחוק השני של ניוטון.

כאשר כל הכוחות פועלים במישור אחד ניתן לקבלות השקול ע"י שימוש בעקרון ההחלפה והמרת כוח בכח ומצמד:

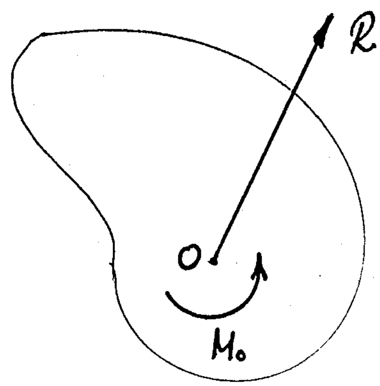
התחלה :



העתקה :



סכום :



$$\vec{R} = \Sigma \vec{F}$$

$$\vec{M_0} = \Sigma \vec{M} = \Sigma (F_i d_i)$$

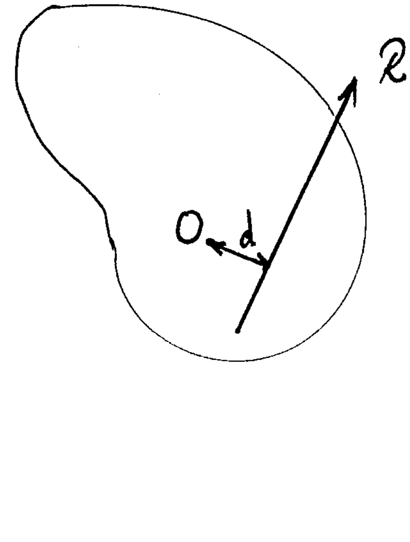
ברכיבים

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\theta = tg^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

העתקה חוזרת :



$$d = \frac{M_0}{R}$$

ובסכום לקביעת גודלו וקו פעולתו של השקול נדרשות שלוש משוואות

$$R_x = \Sigma F_x$$

$$R_y = \Sigma F_y$$

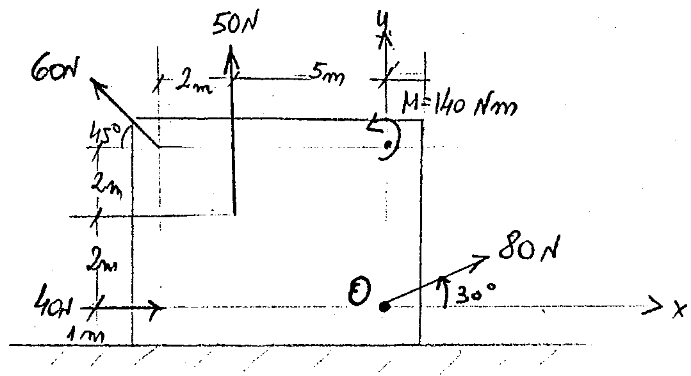
$$R d = \Sigma M_0$$

* במקרה הפרטי בו קווי הפעולה של כל הכוחות נחתכים בנקודה אחת מתמלאת המשוואה השלישית באופן טריוויאלי.

* עובדת היות שקול הכוחות 0 אינה בהכרח גוררת שהמומנט יהיה 0 כמו בזוג למשל. גם המשפט ההפוך נכון למשל בכוחות הנחתכים בנקודה אחת.

דוגמה

חשב את השקול וכוונו



$$R_x = \Sigma F_x = 40 + 80\cos 30° - 60\cos 45° = 66.9\ N$$

$$R_y = 50 + 80\sin 30° + 60\sin 45° = 132.4\ N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 148.3\ N$$

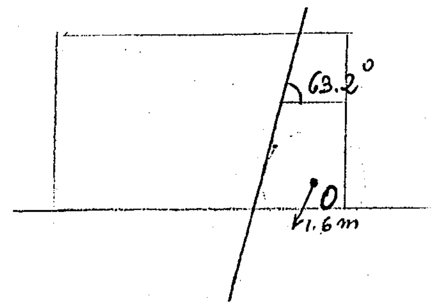
$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = 63.2°$$

כעת נותר למצוא את קו הפעולה של הכח R. לשם כך נבצע מומנטים סביב O.

$$148.3 d = 140 - 50 \times 5 + 60\cos 45° \times 4 - 60\sin 45° \times 7$$

$$d = -1.6\ m$$

הסימן השלילי פירושו ש-R צריך ליצור מומנט עם כיוון השעון כלומר עליו להמצא שמאלה ל-O במרחק 1.6m ובכיוון קו הפעולה θ



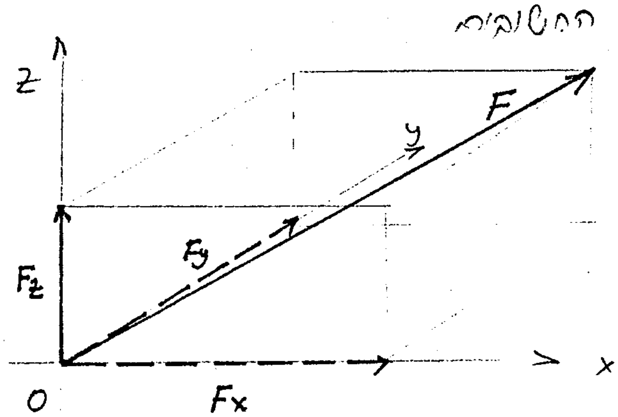
<u>הערות:</u>

1. הזוג M אינו תורם דבר לשקול R אך משפיע על מקומו
2. בחירת O כנקודת הצירים וכמרכז לחשוב המומנטים נעשתה כדי שמקסימום כוחות (80N , 40N) יעברו דרכה ולא יתרמו למומנט.

<u>חלק ב' מערכת תלת ממדית</u>

2.6 <u>רכיבים קרטזיים</u>

במעבר לתצורת תלת ממדיות נשתמש בסימון וקטורי אשר יקל עלינו בהרבה את החישובים



כח F הפועל ב-O ניתן לפירוק במערכת xyz כדלקמן:

$$F_x = F\cos\theta_x$$

$$F_y = F\cos\theta_y$$

$$F_z = F\cos\theta_z$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

ובכתיב וקטורי:

נניח כי וקטורי הבסיס הם i,j,k וכי קוסינוסי הכיוון הם:

$$l=\cos\theta_x \;;\; m=\cos\theta_y \;;\; n=\cos\theta_z \;;\; l^2+m^2+n^2=1$$

אזי נוכל לרשום את הוקטור $\vec{F}$ כך

$$\vec{F}=F(\vec{i}l+\vec{j}m+\vec{k}n)$$

עכשיו ניתן לתאר רכיב הוקטור $\vec{F}$ בעזרת המכפלה הסקלרית

$$F_x=F\cdot\cos\theta_x\equiv\vec{F}\cdot\vec{i}$$

ובכלל:

$$F_n=\vec{F}\cdot\vec{n}$$

ולכן אם נרצה לכתוב את הוקטור הפועל בכיוון $\vec{n}$ אזי

$$\vec{F}_n=F_n\cdot n=(\vec{F}\cdot\vec{n})\vec{n}=(\vec{F}\cdot\vec{n})\vec{n}$$

נניח כי ל-n קוסינוסי כיוון α,β,γ

$$\vec{n}=\vec{i}\alpha+\vec{j}\beta+\vec{k}\gamma$$

ונניח כי ל-F קוסינוסי כיוון l,m,n אזי הטלו של $\vec{F}$ על $\vec{n}$ והוא

$$F_n=\vec{F}\cdot\vec{n}=F(\vec{i}l+\vec{j}m+\vec{k}n)\cdot(i\alpha+j\beta+k\gamma)$$

$$=F(l\alpha+m\beta+n\gamma)$$

כיוון ש: $i\cdot i=1 \qquad i\cdot j=0$

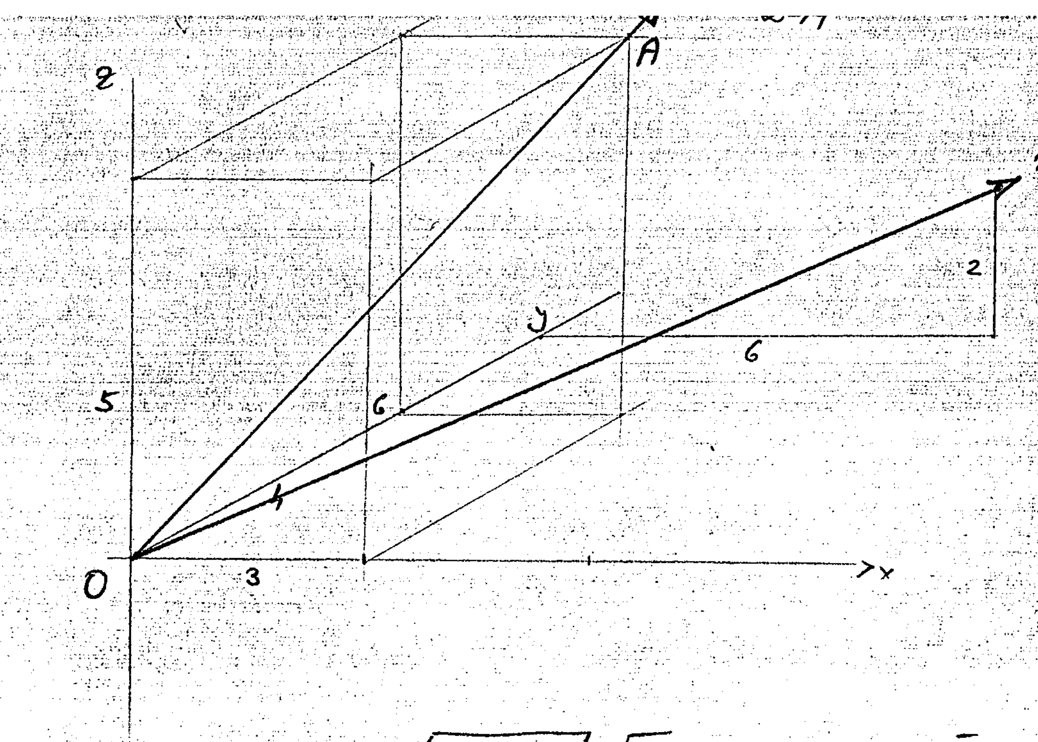
<u>דוגמא</u>

כוח F הפועל מהראשית ושעוצמתו $100N$ עובר דרך הנקודה $A(3,4,5)$

א. חשב את רכביו במערכת הנתונה

ב. חשב את הטלו על המישור x,y

ג. חשב את הטלו על הישר OA המשורטט



אורך האלכסון $\overline{OA}$ $\quad A=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=\sqrt{50}=7.071m$

ולכן קוסינוסי הכיוון הם:

$$l=\frac{3}{A}=0.424 \qquad m=\frac{4}{A}=0.566 \qquad n=\frac{5}{A}=0.707$$

א. רכיבי F במערכת הם:

$$F_x=F\cos\theta_x=F\cdot l=100\times0.424=42.4\ N$$

$$F_y=F\cdot m=56.6\ N$$

$$F_z=F\cdot n=70.7\ N$$

ב. קוסינוס הזווית בין $\vec{F}$ למישור xy הוא:

$$\cos\theta_{xy}=\frac{\sqrt{3^2+4^2}}{7.071}=0.707$$

ולכן אורך ההיטל:

$$F_{xy}=F\cos\theta_{xy}=100\cdot0.707=70.7N$$

ג. קוסינוסי הכיוון של $\vec{n}$ הם:

$$\alpha=\beta=\frac{6}{\sqrt{6^2+6^2+2^2}}=0.688 \qquad \gamma=\frac{2}{\sqrt{6^2+6^2+2^2}}=0.229$$

לכן ההיטל אורכו יהיה

$$F_n=\vec{F}\cdot\vec{n}=100\,(l\alpha+m\beta+n\gamma)=100\,(0.424\cdot0.688+0.566\cdot0.688+0.707\cdot0.229)$$

$$F_n=84.4N$$

פתרון וקטורי לתרגיל 2.6

וקטור OA

$$\underline{OA} = 3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}$$

וקטור יחידה

$$\underline{e}_{OA} = \frac{\underline{OA}}{|\underline{OA}|} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}} \cdot (3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k})$$

$$\underline{e}_{OA} = \frac{\sqrt{2}}{10}(3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k})$$

וקטור הכח

$$\underline{F} = F\underline{e}_{OA} = 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{10}(3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k}) =$$

$$= 10\sqrt{2}\,(3\underline{i} + 4\underline{j} + 5\underline{k})\ [New]$$

$$F_z = \underline{F} \cdot \underline{k} = 50\sqrt{2}\ New$$

רכיב F בכיוון z

$$F_{xy} = \sqrt{F^2 - F_z^2} = \sqrt{100^2 - (50\sqrt{2})^2} = 50\sqrt{2}\ New$$

$$F_{xy} = 70.7\ New$$

וקטור בכיוון ON

$$\underline{ON} = 6\underline{i} + 6\underline{j} + 2\underline{k}$$

$$\underline{e}_{ON} = \frac{1}{2\sqrt{19}}(6\underline{i} + 6\underline{j} + 2\underline{k}) = \frac{\sqrt{19}}{38}(6\underline{i} + 6\underline{j} + 2\underline{k})$$

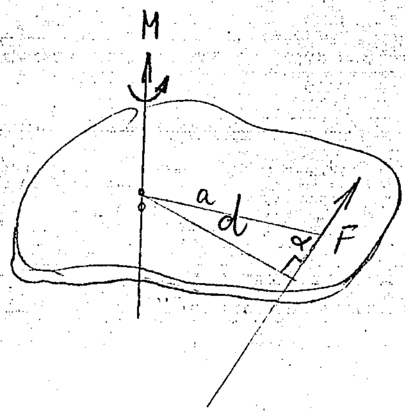
היטל של F על ON

$$F_{on} = \underline{F} \cdot \underline{e}_{on} = 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{19}}{38}(18 + 24 + 10) =$$

$$= \frac{210\sqrt{38}}{19} = 84.4\ New$$

סטטיקה

2.7 מומנטים וצמדים

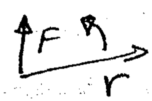


בהגדרה הבסיס הגדרנו את המומנט M
כמכפלה של הכח במרחק האנכי מהציר
העובר דרך O ניתן להגדיר את M
בעזרת מכפלה וקטורית. נחבר את O -
בעזרת הרדיוס וקטור r לכל נקודה שהיא
על קו פעולת הכח F. r יוצר עם קו הפעולה זווית α
ואז יוגדר המומנט כך:

$$M=\vec{r}\times\vec{F}=\left[\overrightarrow{(r\sin\alpha)\cdot F}\right]$$

המכפלה הזאת מגדירה וקטור הניצב למישור שעוצמתו $r\sin\alpha F$
ושכיוונו על פי חוק היד הימנית מ-$\vec{r}$ ל- F

<u>שים לב</u>: $F\times r$ כיוון הפוך!!!

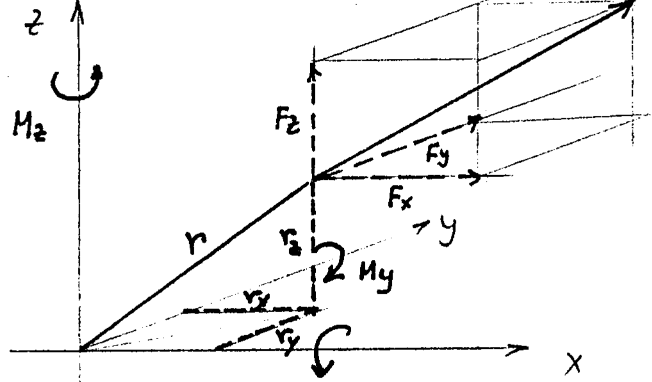


המכפלה הוקטורית תהיה:

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=$$

$$=i(r_yF_z-r_zF_y)+j(r_zF_x-r_xF_z)+k(r_xF_y-r_yF_x)$$

כדי להבין את מהות של המכפלה הזאת נסתכל במומנטים שיוצרים
רכיבים של F סביב כל
אחד משלושת הצירים



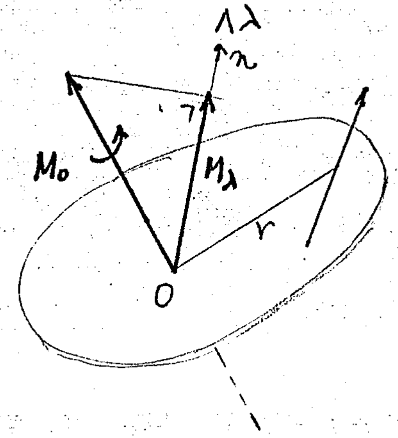
<u>כדאי</u> לעשות הוכחה ולהראות
מומנט סביב ציר X וכן שני
הסימן את הסכום מערכת ימנית
לשמאלית

מהשרטוט רואים כי:

$$M_x = r_y F_z - r_z F_y \qquad M_y = r_z F_x - r_z F_x \qquad M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

אלו הם בדיוק רכיבי המומנט כמתואר ע"י המכפלה הסקלרית.

* נניח כי M_0 הוא המומנט סביב הנקודה O נשאל מה המומנט סביב ציר λ



גודלו הסקלרי של M_λ והוא שווה למכפלה הסקלרית של M_0 ב $\vec{n}$ וקטור היחידה בכיוון λ ולכן ערכו הוקטורי של M_λ והוא:

$$\vec{M}_\lambda = (\vec{M}_0 \cdot \vec{n})\,\vec{n} = [(\vec{r}\times\vec{F})\cdot\vec{n}]\,\vec{n}$$

המכפלה $\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{n}$ הוא מכפלה סקלרית משולשת - מכפלה מעורבת. עוצמתו של M_λ נתונה ע"י המכפלה המשולשת

$$|M_\lambda| = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

היכן ש α, β, γ הם קוסינוסי הכיוון (רכיבי) $\vec{n}$

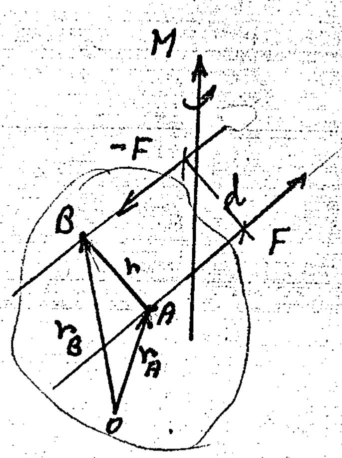
משפט המומנטים של Varignon ב-3D

המומנט של מס' כוחות נחתכים סביב ציר נתון שווה למומנט שיוצר שקול הכוחות סביב אותו הציר.

$$r\times F_1 + r\times F_2 + r\times F_3 + \dots = r\times(F_1+F_2+F_3 \dots) = r\times \Sigma F$$

צמדים

הגדרת הצמד במרחב דומה לצמד שבמישור:



$$\vec{M}=\vec{r}_A\times F+\vec{r}_B\times(-F)=(r_A-r_B)\times F$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}$$

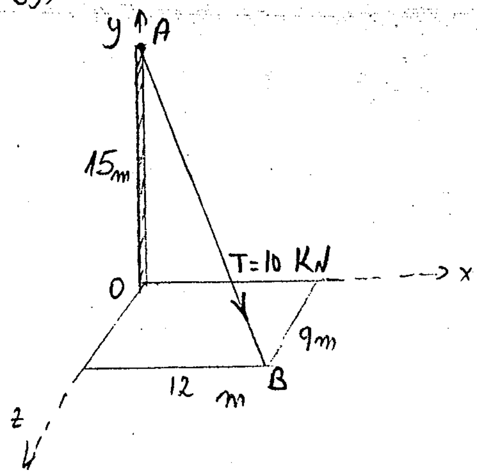
גודלו של הצמד יהיה $M=Fd$

* עלינו לזכור שמומנט צמד הינו וקטור חופשי. מומנט רגיל הינו וקטור מחליק.

* גם במערכת התלת מימדי ניתן להמיר כח בכח שווה ומקביל + צמד.

דוגמא

הציר המתואר בשרטוט נתון לכח $T=10KN$. חשב את המומנט שיוצר הכח T סביב הציר z



יש דרכים שונות לפתרון הבעיה:

דרך א

נחשב את המומנט שיוצר T סביב הנקודה O ולאחר מכן נטילו על z.

א. נחשב את רכיבי T ונרשום אותו כוקטור

$$l=\frac{12}{\sqrt{9^2+12^2+15^2}}=0.566 \qquad m=\frac{-15}{AB}=-0.707 \qquad n=\frac{9}{AB}=0.424$$

$$T=10(0.566i-0.707j+0.424k)\ KN$$

נבחר כ $\vec{r}$ את $\vec{OA}$

$$\vec{r}=15j\ m$$

פתרון עקרוני (פונקציה)

$$\underline{AB} = 12\underline{i} - 15\underline{j} + 9\underline{k}$$

$$\underline{e}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{144+225+81}}\,(12\underline{i} - 15\underline{j} + 9\underline{k}) = \frac{\sqrt{2}}{30}\,(12\underline{i} - 15\underline{j} + 9\underline{k})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{10}\,(4\underline{i} - 5\underline{j} + 3\underline{k})$$

$$\underline{T} = T\underline{e}_{AB} = \sqrt{2}\,(4\underline{i} - 5\underline{j} + 3\underline{k})\,[KN]$$

$$r_{0A} = 15\underline{j}$$

נחשב מומנט סביב - O

$$\underline{M}_A = \underline{r}_{0A} \times \underline{T} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 15 & 0 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,(45\underline{i} - 60\underline{k}) \quad KNm$$

$$= 15\sqrt{2}\,(3\underline{i} - 4\underline{k}) \quad KNm$$

$$M_z = \underline{M}_A \cdot \underline{k} = -60\sqrt{2} \; KNm \cong 84.9 \; KN\,m$$

$$M_o = \vec{r} \times \vec{T} = 15\vec{j} \times 10(0.566i - 0.707j + 0.424k) \ KNm$$

$$M_o = 150(-0.566k + 0.424i) \ KNm$$

$$(j \times i = -k \quad j \times j = 0 \quad j \times k = i)$$

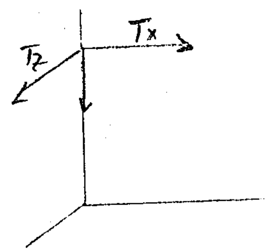
$$M_z = \vec{M}_o \cdot \vec{k} = -84.9 \ KNm$$

ולכן

פרק ב'

נפרק את T לשלושה רכיבים

$T_x = 5.66 \ KN \qquad T_y = -7.07 \ KN \qquad T_z = 4.24 \ KN$

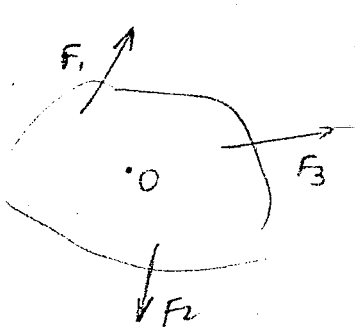


רק הרכיב T_x ייצר מומנט סביב z

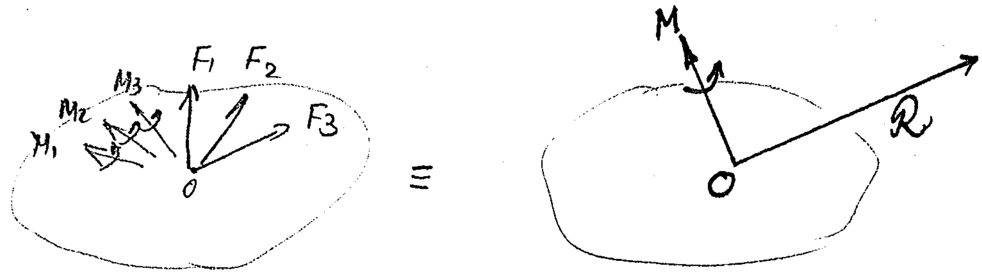
$$M_z = -T_x \cdot 15 = -84.9 \ KNm$$

2.8 שקילות

במערכה הדו-ממדי ראינו כי האפקט החיצון של מערכת כוחות שווה לזה של שקולה. שקול זה חושב מבחינת עוצמתו וכיוונו מסכימת רכיבי הכוחות ומקומו חושב בעזרת משפט המומנטים. אותם העקרונות מנחים אותנו גם במערכה התלת-ממדי:



נסתכל על שלושת הכוחות שבשרטוט ניתן להעביר כל אחד מהם לנקודה כל שהיא - O ולהוסיף צמד מתאים. לכן בסופו של התהליך נקבל כוחות הנחתכים בנקודה ואוסף של וקטורי צמדים שהינם וקטורים חופשיים.



ניתן כאמור כעת למצוא את שקול הכחות ושקול המומנטים. מבחינה אלגברית נקבל את הביטויים:

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$

$$M_x = \Sigma (r \times F)_x \qquad M_y = \Sigma (r \times F)_y \qquad M_z = \Sigma (r \times F)_z$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

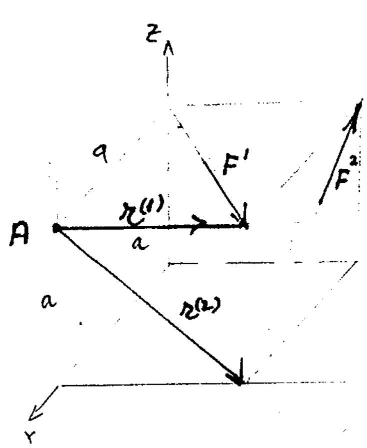
ערכו וכיוונו של R אינם תלויים בבחירת הנקודה O בעוד שערכו וכיוונו של M תלויים בה. בכלל כל מערכת כחות ניתנת להמרה בשקול כח R ושקול המומנטים M

תנאים ש. המשקל

$$\vec{R} = 0$$
$$\vec{M} = 0$$

אלו הן שתי משוואות וקטוריות או 6 משוואות אלגבריות הרכביות.

<u>דוגמא:</u>



הבא את שני הכחות F הנתונים בשקול העובר דרך הנקודה A ומצא

$$\vec{F^1} = \frac{F\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{F^2} = \frac{F\sqrt{2}}{2}(-\vec{i} + \vec{k})$$

$$\vec{R} = \vec{F^1} + \vec{F^2} = \frac{F\sqrt{2}}{2}(\vec{j} + \vec{k}) \qquad |R| = F$$

נחשב מומנטים :

נבחר עבור F_1 את הצלע $r = a\vec{j}$

$$\vec{M}^{(1)} = aj \times \frac{F\sqrt{2}}{2}(i+j) = \frac{Fa\sqrt{2}}{2}(-\vec{k})$$

עבור F^2 נבחר הצלע $\vec{r} = a(-\vec{j}-\vec{k})$

$$\vec{M}^{(2)} = a(j-k) \times \frac{F\sqrt{2}}{2}(-i+k) = \frac{Fa\sqrt{2}}{2}(j-k) \times (-i+k)$$

$$= \frac{Fa\sqrt{2}}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & +1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{Fa\sqrt{2}}{2}(+i+j+k)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{Fa\sqrt{2}}{2}(+i+j) = \frac{Fa}{\sqrt{2}}(i+j)$$

$$|M| = Fa$$

פרק 3 שווי משקל של מערכות

3.1 מבוא

מטרתה של הסטטיקה להגדיר את התנאים ההכרחיים והמספיקים לקיומו של שווי משקל סטטי של מבנה.

התנאי ההכרחי והמספיק לקיומו של שווי משקל סטטי הוא ששקול הכוחות ושקול הצמדים הפועלים על הגוף יהיו 0 -

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \qquad (3.1)$$
$$\vec{M} = \sum \vec{M} = 0$$

כבפרק הקודם נטפל קודם בבעיה המישורית ולאחר מכן הבעיה המרחבית.

חלק א' הבעיה הדו-מימדית

3.2 בדידה של המערכת המכנית

בטרם נוכל ליישם את משוואות (3.1) עלינו להגדיר חד-משמעית את הגוף או המערכת המכנית הנדונים שלגביהם יש לציין את התחולה וכן להגדיר באופן ברור ומושלם את <u>כל</u> הכוחות הפועלים על גוף זה.

הגוף הנדון יכול לכלול גוף יחיד או מערכת של גופים. ברגע שהחלטנו באיזה גוף מדובר עלינו לבודדו מכל שאר הגופים.

שסביבו. תהליך זה מבוצע בעזרת דיאגרמת הגוף החופשי - דג"ח שהינה דיאגרמה המתארת את הגוף או המערכת הנדונה לרבות כל הכוחות המופעלים עליה מבחוץ או ע"י כל הגופים שהוסרו דמיונית מסביבם. רק משהושלמה הדג"ח ניתן לרשום או לבנות את משוואות שווי המשקל. הדג"ח למעשה הוא הפעולה החשובה ביותר בתהליך פתרונה של בעיה סטטית.

בטרם נפנה בבנית הדג"ח עלינו לדון בדרכים בהן מעביר כח גוף אחד למשנהו. בשקף 3.1 מתוארות דוגמאות טיפוסיות להעברת כח במבנים דו - מימדיים

דוגמא א' כבל גמיש, שרשרת, רצועה, חבל וכו' מעבירים כח רק בכיוונם שכן התנגדותם לכפיפה אפסית! כמו כן הם יכולים רק למשוך לעברם את הגוף.

דוגמא ב' בנקודת המגע בין שני גופים חלקים יועבר כח רק בניצב למשיק לשני המשטחים בנקודת המגע (מוסב)

דוגמא ג' במגע בין משטחים מחוספסים יש העברה ניצבת ומשיקה של כח. כאשר הכח המשיק נובע מהחיכוך

דוגמא ד' מס' דוגמאות לסמכים המעבירים כח אנכי בלבד.

דוגמא ה' העברת כח אנכי בלבד ע"י מוביל חלק.

דוגמא ו' חבור פין חלק מעביר כח בכל כיוון ניצב לפין שהרכ' תובא ע"י שני רכיבים F_x, F_y בניצב לפין או חיבור סביב יעביר גם מומנט M.

MECHANICAL ACTION OF FORCES IN TWO-DIMENSIONAL ANALYSIS

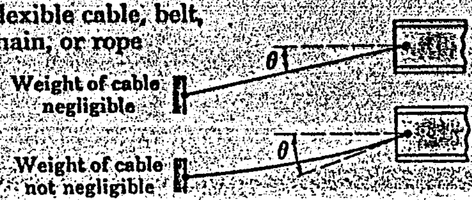
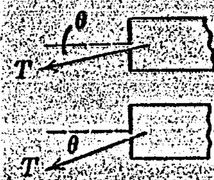
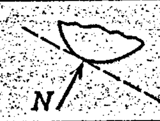
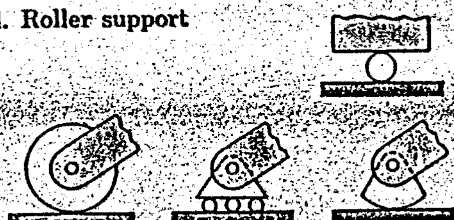
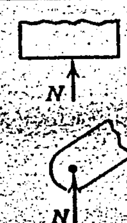
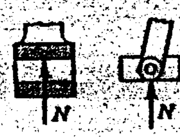
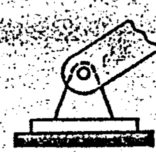
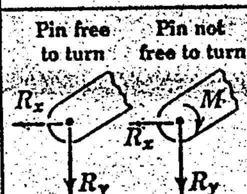
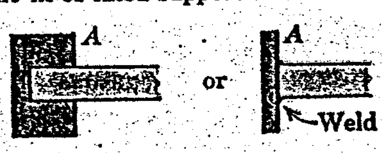
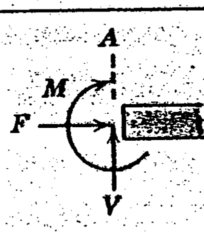
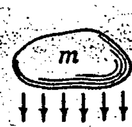
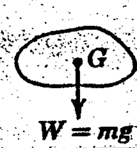
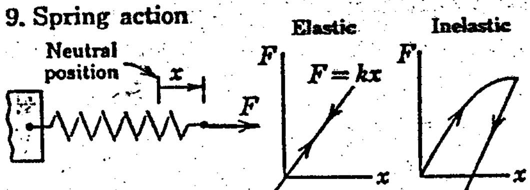
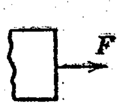
Type of Contact and Force Origin	Action on Body to Be Isolated
1. Flexible cable, belt, chain, or rope 	 Force exerted by a flexible cable is always a tension away from the body in the direction of the cable.
2. Smooth surfaces 	 Contact force is compressive and is normal to the surface.
3. Rough surfaces 	 Rough surfaces are capable of supporting a tangential component F (frictional force) as well as a normal component N of the resultant contact force R.
4. Roller support 	 Roller, rocker, or ball support transmits a compressive force normal to the supporting surface.
5. Freely sliding guide 	 Collar or slider free to move along smooth guides; can support force normal to guide only.
6. Pin connection 	 A freely-hinged pin connection is capable of supporting a force in any direction in the plane normal to the axis; usually shown as two components R_x and R_y. A pin not free to turn may also support a couple M.
7. Built-in or fixed support 	 A built-in or fixed support is capable of supporting an axial force F, a transverse force V (shear force), and a couple M (bending moment) to prevent rotation.
8. Gravitational attraction 	 The resultant of gravitational attraction on all elements of a body of mass m is the weight $W = mg$ and acts toward the center of the earth through the center of mass G.
9. Spring action 	 Spring force is tensile if spring is stretched and compressive if compressed. For a linearly elastic spring the stiffness k is the force required to deform the spring a unit distance.

Figure 3/1

<u>דוגמא ז'</u> קורה כתומה: רתום מעביר F_x, F_y וגם M
דוגמא: צומת תקוע בקיר.

<u>דוגמא ח'</u> שקיל כוחות הכובד מעביר למרכז הכובד C.G
לעיתים יש לחשב זאת למצוא את מקום מרכז הכובד.

<u>דוגמא ט'</u> קפיץ מעביר כח $F=kx$ בכוונו.

3.2.1 <u>בנית דיאגרמת הגוף החופשי</u>

קיימים ארבעה צעדים בסיסיים בבנית הדג"ח:

א. יש לקבוע מי הגוף הנדון. בגוף זה ימצאו אחד או יותר מנעלמי הבעיה.

ב. שרטט את קוי המתאר של הגוף ע"י בודדו מכל הגופים הנוגעים בו והמושכים/דוחפים אותו. זהו שלב קריטי ויש להבטיח כי הגוף בודד לחלוטין.

ג. סמן על הגוף החופשי את <u>כל</u> הכוחות המופעלים עליו ע"י הגופים שהוסרו בב' ושהעבירו לו כח בין במגע ובין במשיכה/דחיפה. לרבות משקלים. הכחות שערכם ידוע יסומנו בהתאם והכוחות/מומנטים נעלמים יסומנו סימבוליות כולל של אלו. ויתגלה הכוון או כמוטעה מן החישוב.

ד. הצב מערכת צירים ורשום את כל המידות הקשורות לדיאגרמה.

משהושלמה הדג"ח ניתן לעבור ליישום משוואות ש.המשקל.

בשקף 3.2 - מרוכזות ארבע דוגמאות לבניית דג"ח :

<u>דוגמא א'</u> 1. המסבך הוא הגוף הנדון והוא מנותק מן הסמכים שבדוגמה.
2. למרות הכח החיצון P מפעילים הסמכים ריאקציות על הגוף: הסמך B מפעיל רק כח אנכי והסמך A שני כחות.

<u>דוגמא ב'</u> 1. קורת הזיז תנותק מן הקיר.
2. הריאקציות של הקיר על הקורה תכוללנה F_x, F_y ו- M. כמו כן הוסף המשקל gm.

<u>דוגמא ג'</u> 1. הקורה מנותקת מן המדרגה.
2. הוכנס המשקל ב C.G שהונח במקומו וכוון; בנקודת המגע עם המדרגה החלקה תהיה תגובה אנכית למשטח; בסמך B שהוסר שתי תגובות כי פין הוא.

<u>דוגמא ד'</u> 1. המערכת הופרדה מן הרצפה /מהמסה /והחוט
2. כח המשקל של המסה הוסף;
וכן תגובה אנכית ב- A ותגובה דו כיוונית ב- B.

3.3 <u>תנאי שווי המשקל</u>

משוואה (3.1) המתארת את התנאים ההכרחיים והמספיקים לקיום שווי משקל הופכת במקרה הדו-ממדי למשוואות הסקלריות הבאות:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma M_0 = 0 \qquad (3.2)$$

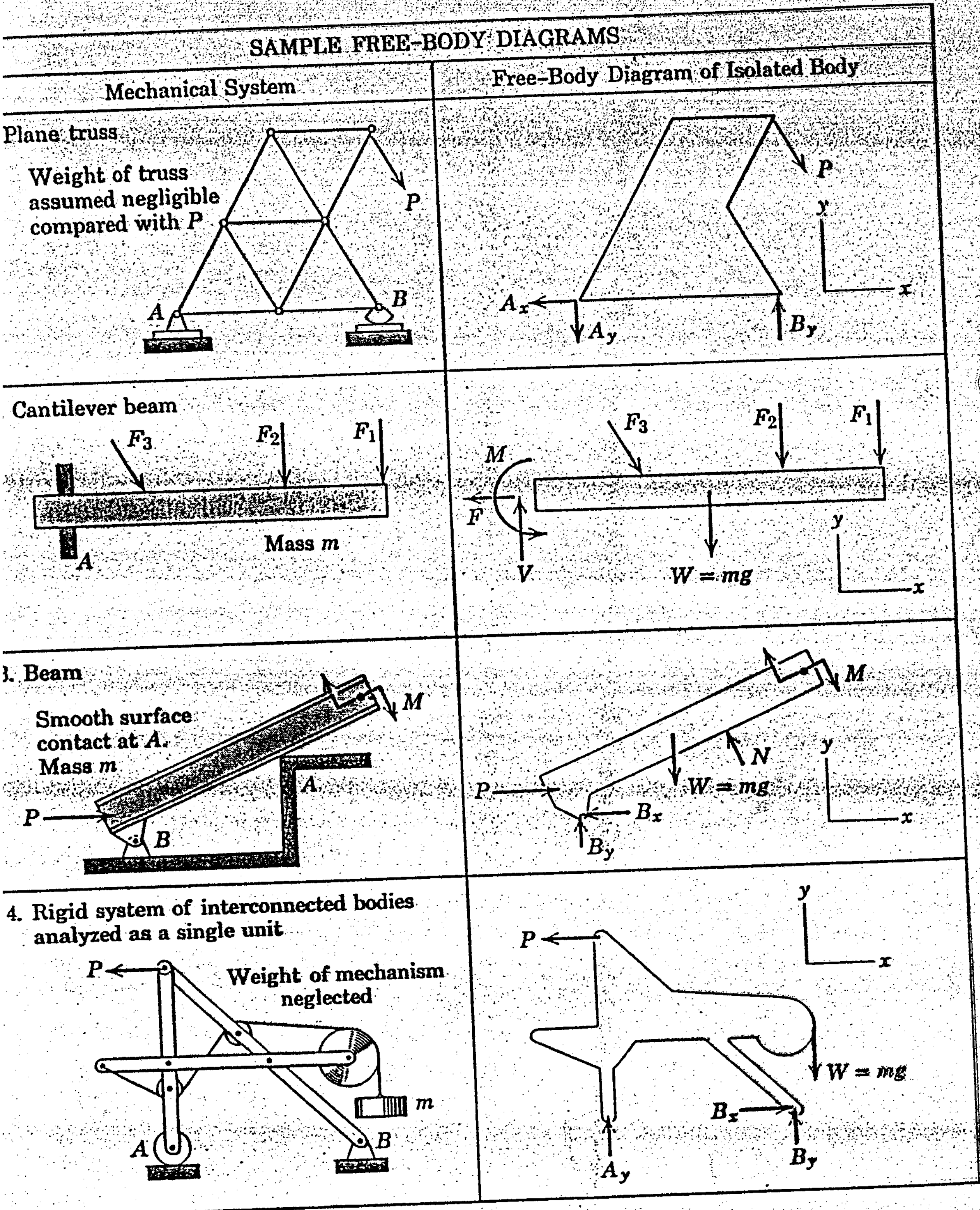
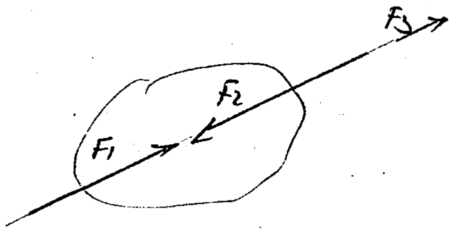

SAMPLE FREE-BODY DIAGRAMS
Mechanical System
Free-Body Diagram of Isolated Body
Plane truss
Weight of truss assumed negligible compared with P
P
A
B
P
y
x
Ax
Ay
By
Cantilever beam
F3
F2
F1
Mass m
A
M
F
V
W = mg
y
x
3. Beam
Smooth surface contact at A.
Mass m
M
A
P
B
M
N
W = mg
P
Bx
By
y
x
4. Rigid system of interconnected bodies analyzed as a single unit
P
Weight of mechanism neglected
m
A
B
y
x
P
W = mg
Bx
Ay
By

Figure 3/2

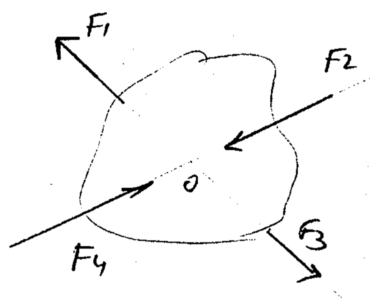
שלושת התנאים הנ"ל הם בלתי תלויים זה בזה. ניתן לחלק את מכלול המקרים הבו ממוינים לארבע קטגוריות של שימוש (שקף 3.3)



<u>מקרה א'</u>: הכוחות קולינאריים
במקרה זה תהיה רק משוואה אחת

$$\Sigma F_x = 0$$

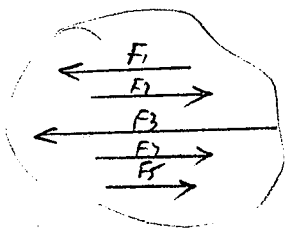
שתי האחרות מתמלאות אוטומטית



<u>מקרה ב'</u>: כל הכוחות נחתכים בנקודה אחת; במקרה זה תהיינה שתי משוואות

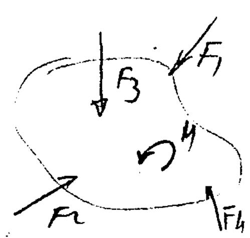
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$

משוואת המומנטים מתמלאת אוטומטית.



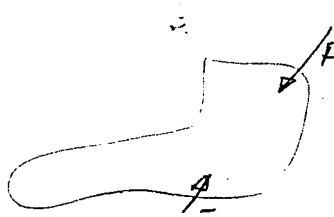
<u>מקרה ג'</u>: כל הכוחות מקבילים;
שוב תהיינה שתי משוואות

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$



<u>מקרה ד'</u>: במקרה הכללי דרושות כל שלוש המשוואות.

רצוי להזכיר במסגרת זאת שני מקרי העמסה פרטיים בעל תשובות: במקרה הראשון פועלים על הגוף שני כוחות בלבד.



במקרה זה חייבים הכוחות להיות קולינאריים שווים והפוכים בכיוונם.

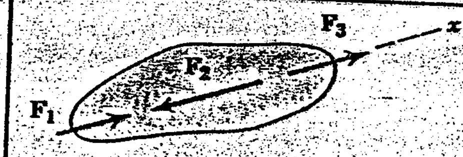
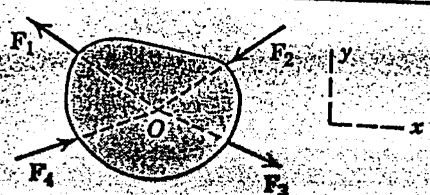
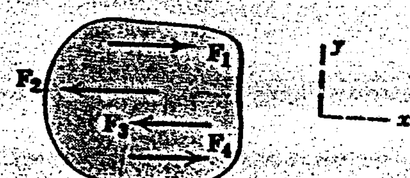
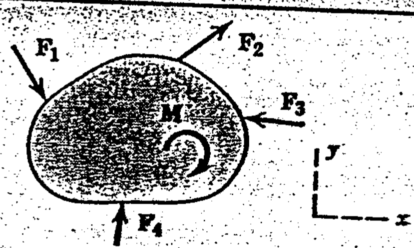
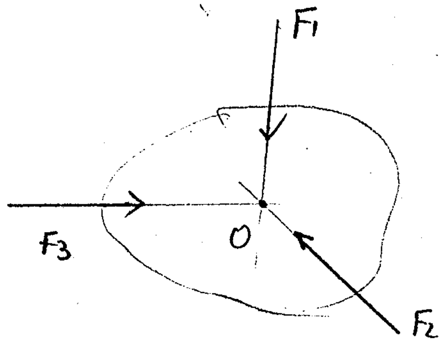
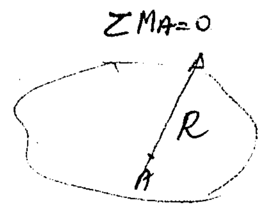
CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN TWO DIMENSIONS		
Force System	**Free-Body Diagram**	**Independent Equations**
1. Collinear		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrent at a point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Parallel		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
4. General		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_y = 0$

Figure 3/3



במקרה השני נפעל הגוף לשלושה כוחות. במקרה זה חייבים הכוחות להחתך בנקודה אחת. ואחרת יצור הכח השלישי מומנט סביב נקודת המפגש של שני הכוחות הראשונים. הוצאו מן הכלל הוא המקרה של כוחות מקבילים. במקרה זה נראה את נקודת המפגש ב-∞.

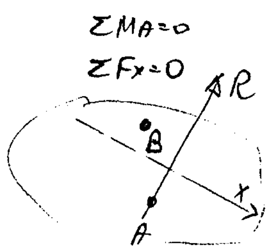
3.2.1 ניסוחים אלטרנטיביים לשווי משקל



נניח כי נתון גוף שמתקיים ש:

$$\Sigma M_A = 0$$

אזי ברור כי אם נעביר את כל הכוחות ל-A נקבל כח שקול R העובר דרך A. נניח עתה כי גם ידוע ש:



$$\Sigma F_x = 0$$

אזי ברור כי כיוון של R הוא בכיוון y

נניח כי ידוע גם ש:

$$\Sigma M_B = 0$$

כש-B איננו על ציר ה-y אזי נקבל ש $R \equiv 0$. ולכן המשוואות בשווי משקל כלומר ניתן להמיר את משוואות (3.2) ב:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0$$

בתנאי שהקו A-B איננו ניצב לציר ה-X

בצורה דומה ניתן לרשום ע"י

$$\Sigma M_A = 0 \qquad \Sigma M_B = 0 \qquad \Sigma M_C = 0$$

כאשר A,B,C אינן נמצאות על ישר אחד.

3.2.3 מגבלות ומסוימות סטטית

משוואות שווי המשקל הם התנאים ההכרחיים והמספיקים להבטחת שווי המשקל של הגוף. ברם אין הן בהכרח מאפשרות את חישובם של כל הכוחות הבלתי ידועים הפועלים על הגוף.

התשובה לבעיה זאת טמונה במגבלות שמפעילים הסמכים על תנועת הגוף. למשל סמך מס' 3 מונע תנועה במאונך לו. בגוף שפין מונע כל תנועה קווית ואין מאפשר סבוב חפשי. רתום מונע את שלושתם וכו'. נטפל בדוגמא 1 בשאלה (3.2) יש לנו שלושה כחות נעלמים ושלוש משוואות ש.משקל. לעומת זאת לו המרנו את ה"נדנד" בפין והיו לנו ארבעה נעלמים שלא ניתן יהיה למוצאם בעזרת שלוש המשוואות הסטטיות (3.2). מקרה דומה יהיה באם נתפס את הפין בדוגמא ג' שבשאלה.

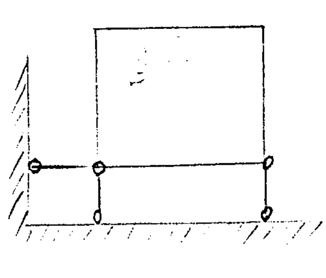
מצב בו לגוף או מערכת עודף מגבלות מעבר לדרושות לשם קיום שיווי משקל קרויים <u>מערכת סטטית לא מסוימת</u>. סמכים שניתן להסירם מבלי להפר את שיווי המשקל נקראים יתירים Redundent.
<u>דרגת אי-המסוימות</u> של הגוף מוגדרת כמספר הכוחות היתירים והוא ההפרש שבין המס' הכולל של הכוחות החיצוניים הנעלמים לבין מס' המשוואות שווי המשקל הבלתי תלויות. לעומת זאת גופים הנסמכים על המספר המינימלי של סמכים הדרוש לשווי משקל נקראים <u>מסוימים סטטית</u> ובמקרה זה מספיקים משוואות שווי המשקל לקביעתם של כל הכוחות החיצוניים הנעלמים.

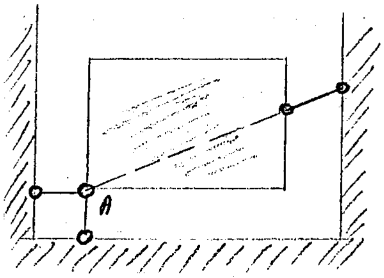
במסגרת הסטטיקה נעסוק רק בבעיות מסוימות ומן הראוי כי הסטודנט יבדוק עובדה זאת בטרם יפתור כל בעיה ובעיה.

כיון שדנו במגבלות מן הראוי שנבדוק גם את טיב התאמתן. קיומן של שלוש מגבלות במקרה הדו-ממדי אינה מבטיחה בהכרח שהמבנה יציב. נטפל בדוגמאות המצבים הבאים:

<u>מצב א'</u>

במקרה זה שלוש המגבלות מונעות לחלוטין תנועת גוף קשיח ולכן סמכים אלו הם מתאימים

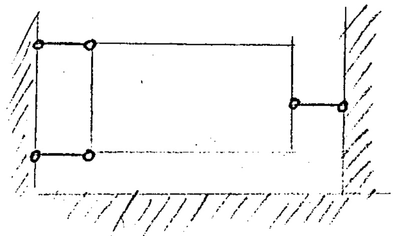




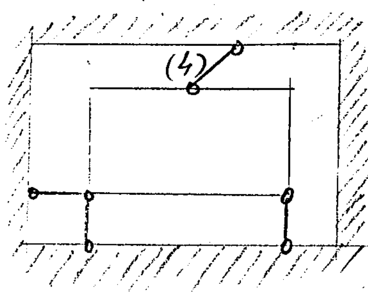
מצב ב'

במקרה זה הכח שיפעיל המוט הימני עובר דרך הנקודה A. לכן לא תהיה כל מגבלת תנועה התחלתית בנקודה לגוף המרוסן. זהו מצב של הגבלה בלתי מושלמת.
הריתקות נותנות $M_O=0$ אך הואיל לכן אין התנגדות לסבוב סביב A.

מצב ג'



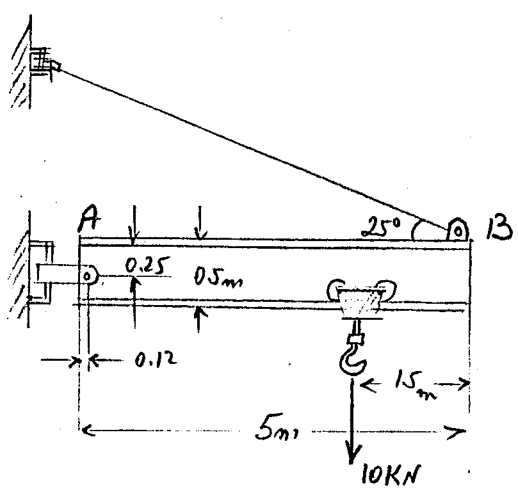
אין התנגדות לכח בכיוון y!
(מתקיימות רק 2 מ.ש.ו.מ.)



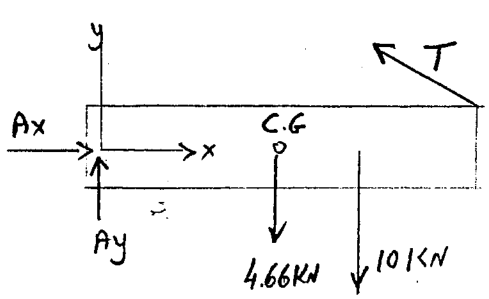
מצב ד'

מצב של ריתום יתר במוט (4)
מבנה בלתי מסוים סטטית פעמיים.

דוגמא (3/2)



חשב את כח המתיחה בכבל והכוחות הפועלים על הפין A במנוף המתואר. מסת הקורה $95 kg/m$ (שקף 3.4)



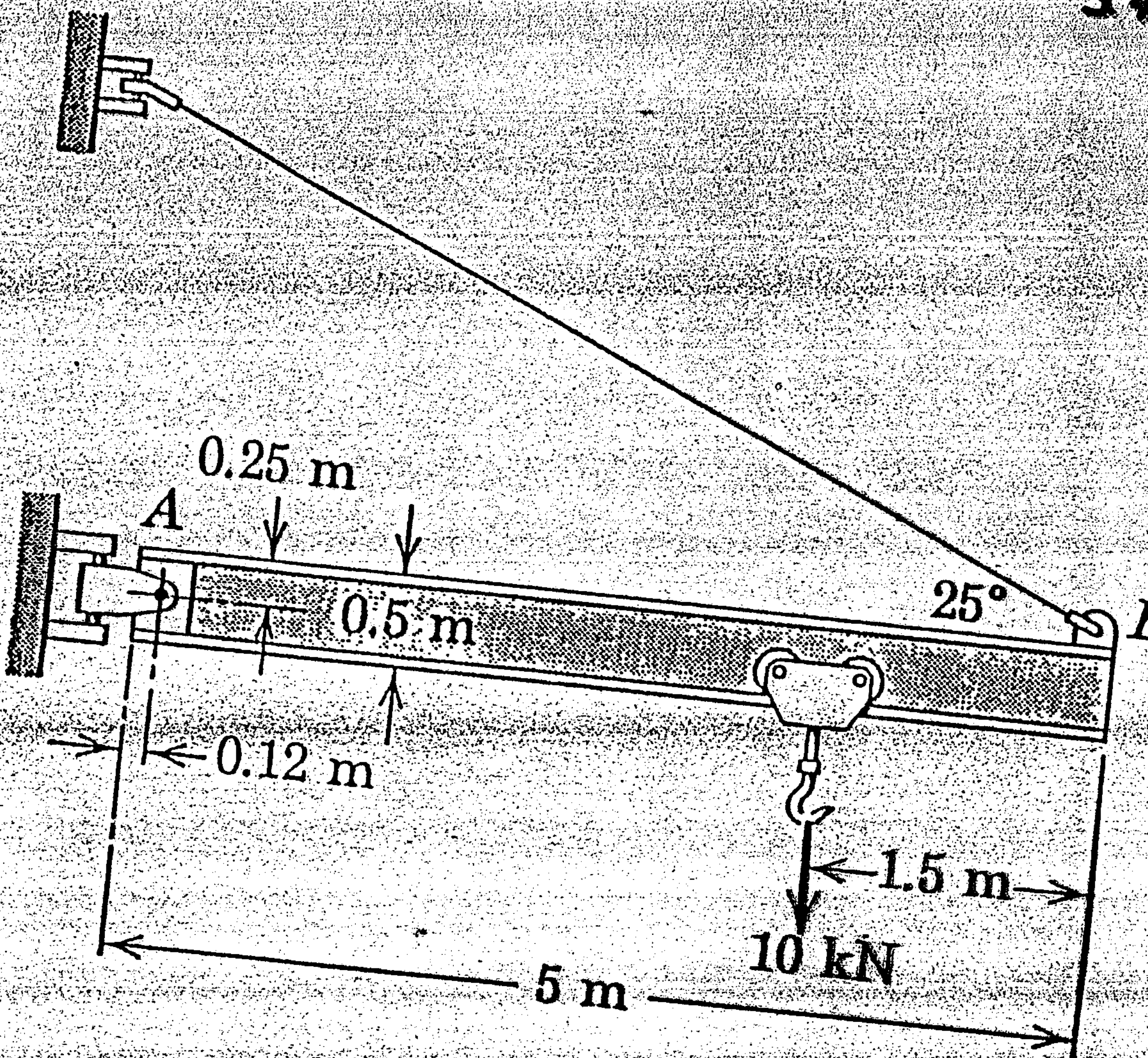
1. דיאגרמת גוף חפשי

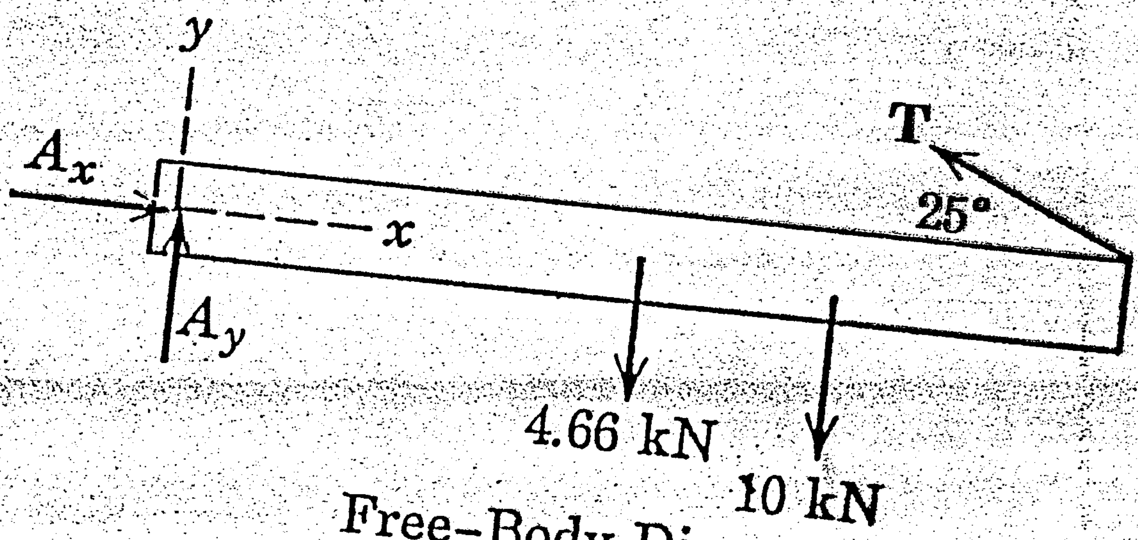
1. ישנם שלושה נעלמים: A_y, A_x, T

2. משקל הקורה הנמצא במרכז הכובד

$mg = 95 \times 5 \times 9.81 = 4.66 \text{ kN}$

3.4 [illegible]





Free–Body Diagram

ב. פתרון ע״י שווי המשקל

1) נתחיל במשוואת מומנטים סביב A שבה יהיה נעלם אחד T

$$\Sigma M_A = 0 \qquad (T\cos 25^\circ)\,0.25 + (T\sin 25^\circ)(5-0.12) - 10(5-1.5-0.12) +$$

$$- 4.66 \times (2.5-0.12) = 0$$

$$T = 19.61\ KN$$

2) שווי משקל בכיוונים x ו y

$$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x - 19.61\cos 25^\circ = 0 \qquad A_x = 17.77\ KN$$

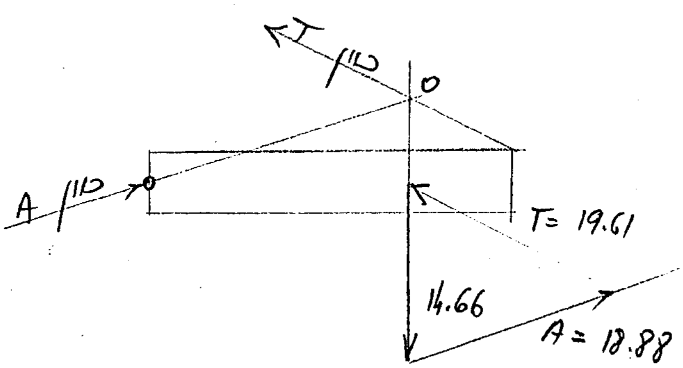
$$\Sigma F_y = 0 \qquad A_y + 19.61\sin 25^\circ - 4.66 - 10 = 0 \qquad A_y = 6.37$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad A = 18.88\ KN$$

ג. פתרון גרפי:

1. נמצא גרפית את שקול 4.66, 10 (R)

2. שלושת הכוחות T, R ו- A חייבים לעבור דרך נקודה אחת ולסגור פוליגון. לכן כיוון הכח A הוא מ- A דרך O.



חלק ב' שווי משקל בשלושה ממדים

3.4 תנאי שווי המשקל

במקרה התלת-ממדי הרחבת המשוואה הוקטורית (3.1) לשש משוואות סקלריות

$$\sum \vec{F}=0 \qquad \begin{array}{l} \sum F_x=0 \\ \sum F_y=0 \\ \sum F_z=0 \end{array}$$

$$\sum \vec{M}=0 \qquad \begin{array}{l} \sum M_x=0 \\ \sum M_y=0 \\ \sum M_z=0 \end{array} \qquad (3.3)$$

שש המשוואות הן תנאי הכרחי ומספיק לקיום שווי משקל של גוף או מערכת תלת-ממדית. ששת התנאים בלתי תלויים וחלקם יכולים להתמלא גם כשאין שווי משקל.

3.4.1 דיאגרמת גוף חפשי

כבמקרה הדו-ממדי גם כאן מהווה הדג"ח את השלב החשוב ביותר בפתרון בעיה. היא תבוצע באקסונומטריה או בהיטלים. דוגמאות לכוחות ותגובותיהם במגעים תלת-ממדיים ראינו בשקף 3.5.

כלל: תהיה ריאקציה לכוח ומומנט בכיוונים בהם הסמך מגביל את תנועת הגוף.

3.4.2 סוגים של שווי משקל

כבמקרה הדו-ממדי ישנם כאן מגעים מנוונים בהם יש צורך רק בחלק ממשוואות (3.3) דוגמאות לכך בשקף (3.6)

:CHANICAL ACTION OF FORCES IN THREE-DIMENSIONAL ANALYSIS

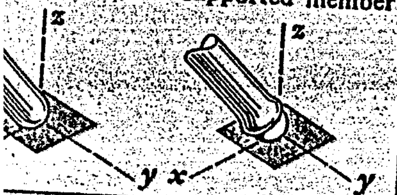
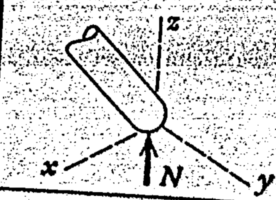
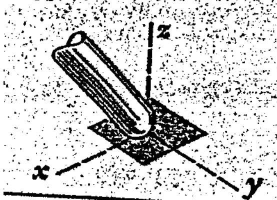
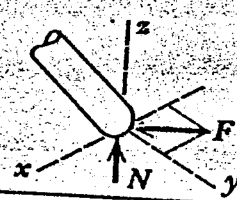
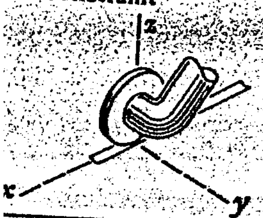
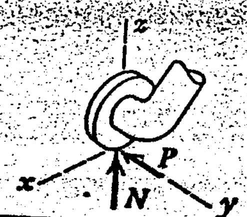
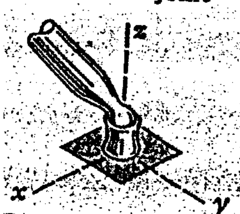
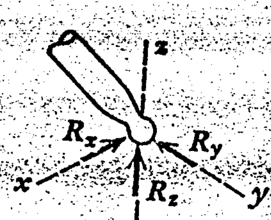
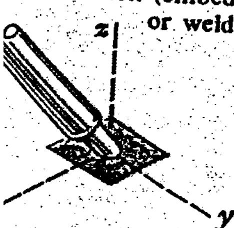
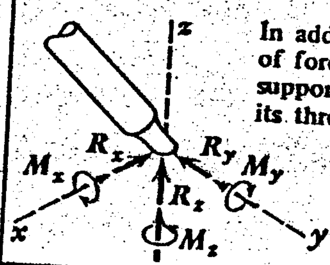
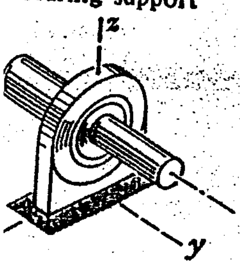
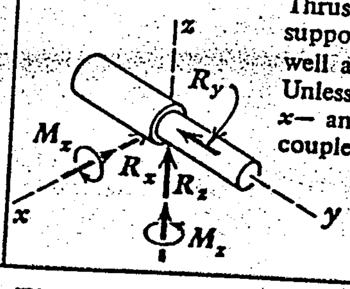
of Contact and Force Origin	Action on Body to be Isolated	
Member in contact with smooth urface, or ball-supported member 		Force must be normal to the surface and directed toward the member.
ember in contact with rough rface 		The possibility exists for a force F tangent to the surface (friction force) to act on the member, as well as a normal force N.
ller or wheel support with ral constraint 		A lateral force P exerted by the guide on the wheel can exist, in addition to the normal force N.
-and-socket joint 		A ball-and-socket joint free to pivot about the center of the ball can support a force R with all three components.
l connection (embedded or welded) 		In addition to three components of force, a fixed connection can support a couple **M** represented by its three components.
-bearing support 		Thrust bearing is capable of supporting axial force R_y as well as radial forces R_x and R_z. Unless bearing is pivoted about x- and z-axes, it can support couples M_x and M_z.

Figure 3/8

3.5 fpl

IBRIUM CONDITIO

S

3.6 fpb

CATEGORIES OF EQUILIBRIUM IN THREE DIMENSIONS

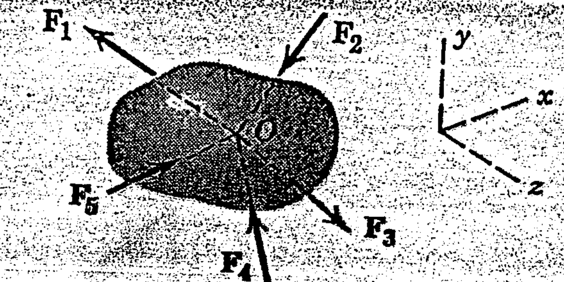
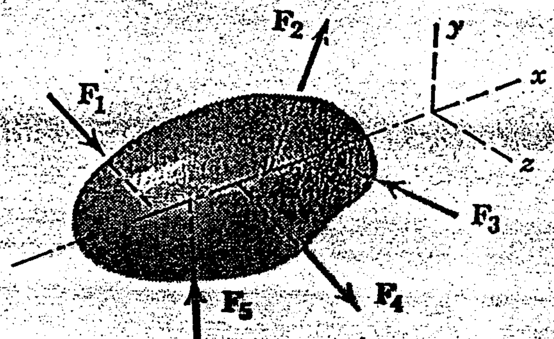
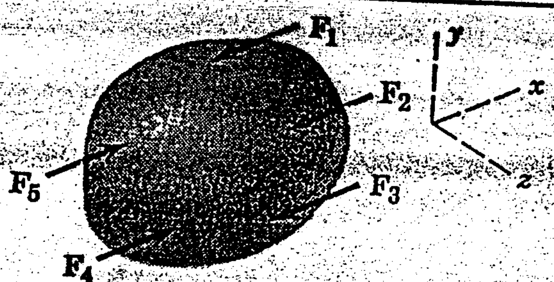
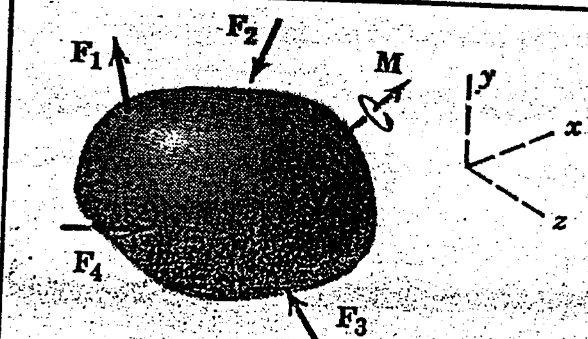
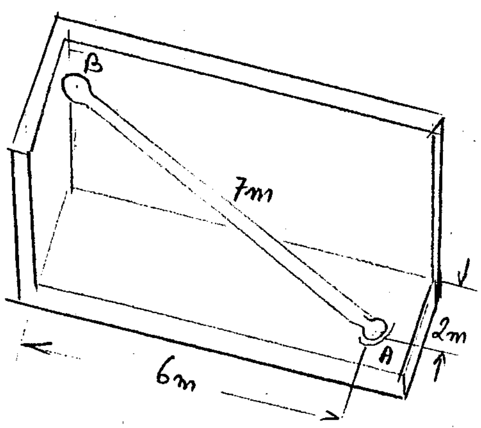
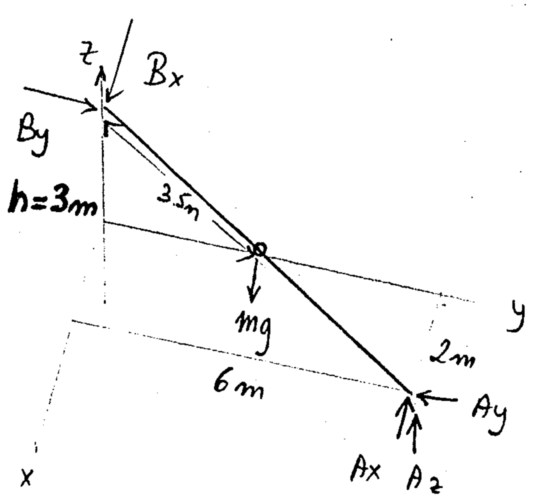
System	Free-Body Diagram	Independent Equations
urrent point		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
rrent line		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
l		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$ $\Sigma M_z = 0$

Figure 3/9

3.4.3 מסוימות סטטית

משוואות ש.המשקל אע"פ שהן הכרחיות ומספיקות לקבוע את ש.המשקל אין הן בהכרח מספיקות להגדרתם של כל הכוחות הנעלמים. קיומם של כוחות מרובים גורם לאי מסוימות של המבנה. ישנם מקרים בהם הסמכים אינם מתאימים במקרה הדו-מימדי, ובהם נעסוק בפרק. (עמ' 106-107)





דוגמה 3/3

נתון המוט שבשרטוט הנשען על קיר חלק ועומד בנקודה חלקה בתחתיתו. חשב את תגובות הקיר על המוט. אורך המוט 7m ומסתו 200 ק"ג (ראה שקף 3.7)

א. פתח

נחשב הכל בשיטה וקטורית. נשתמש ב-A כמרכז מומנטים ולצורך זה יש לחשב רדיוסי וקטורים

$$r_{G/A} = -1i - 3j + 1.5k \quad [m]$$

$$r_{B/A} = -2i - 6j + 3k \quad [m]$$

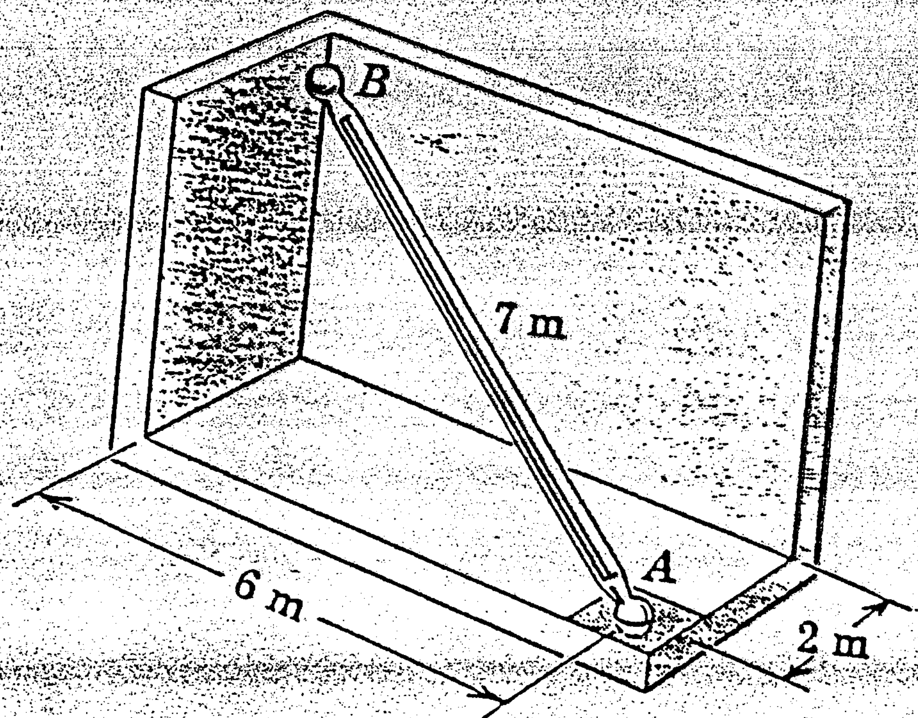
$$\Sigma \vec{M}_A = r_{B/A} \times (iB_x + jB_y) + r_{G/A} \times (-mg\vec{k}) = 0$$

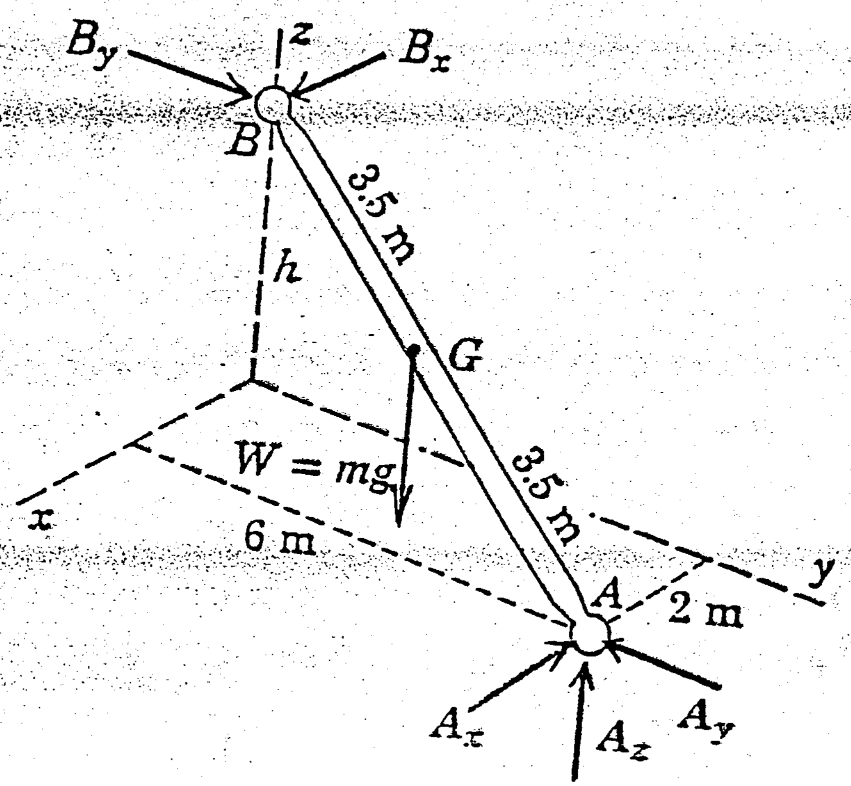
$$mg = 200 \times 9.81 = 1962 \ N$$

$$(-i - 3j + 1.5k) \times (iB_x + jB_y) + (-2i - 6j + 3k) \times (-1962k) = 0$$

$$(-3B_y + 5886)\, i + (3B_x - 1962)\, j - (2B_y + 6B_x)\, k = 0$$

3.7 fpe





לכן כל רכיב צ"ל - 0

$B_y = 1962\ N \qquad B_x = 654\ N \qquad B = 2068$

נחשב את הכוחות ב-A משווי משקל בשלושת הכיוונים :

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (654 - A_x)\,i + (1962 - A_y)\,j + (-1962 + A_z)\,k = 0$$

$A_x = 654\ N \qquad A_y = 1962\ N \qquad A_z = 1962\ N$

$A = 2851\ N$

פרק 4 שווי משקל של מבנים

4.1 מבוא

בפרק הקודם דנו בשווי המשקל הכולל של גוף או מערכת. בפרק זה נתרכז בחישובם של הכוחות הפנימיים הפועלים על כל אלמנט של הגוף הנ"ל. כל מבנה הנדסי מטרתו לעמוד בבטחון בעומס ולצורך כך יש לוודא שכל חלק מחלקיו עומד בכך. לצורך זה יש לקבוע את הכוחות הפועלים בכל חלק וחלק. בפעולה זאת נשתמש בשני עקרונות חשובים:

א. העובדה שגוף נמצא בשווי משקל פירושה שכל חלק וחלק ממנו נמצא בשווי משקל

ב. חוק הפעולה והתגובה.

בפרק זה נעסוק בשני סוגי מבנים כלליים: מסבכים - מישוריים ומרחביים, מסגרות-ומכונות. בכל מקרה נעסוק רק במבנים מסוימים סטטית

4.2 מסבכים מישוריים

גוף הבנוי איברים המתחברים בקצותיהם זה לזה והיוצרים גוף יציב נקרא מסבך. דוגמאות לכך: גשרים, שלד של גג רעפים, עגורן, בסיס לאנטנה בראש הגבעה ומבנים חלליים. האיברים כוללים קורות I, U, L, מוטות וכו'. המתחברים ביניהם בברגים, פינים, בריתוך או במסמרות. כאשר כל האיברים של המסבך נמצאים בקרוב במישור אחד יקרא המסבך מישורי.

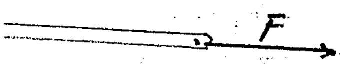
האלמנט הבסיסי ממנו בנוי מסבך מישורי הנו משולש. שלושה

4-2

מסבכות המתחברות בפינים.

ניתן ליצור תצורות גם מיותר משלושה
מוטות עם פינים והוא בלתי קשיח.
מסבכות הבנויים ממשולשים ונועדו כמו
יותר מוטות מהנדרש להבטחת יציבותו
לצורך חשוב הכוחות במוטות השונים
בסיסיות:

א. כל איברי המסבך נפעלים לשנ
ולכן הכוחות שווים הפוכים ב
הכיוון: הם נפעלים למרכז לו



ב. בכל המוטות מרותכים או מס
החיבור הוא פיני בחנוי שקוי
בנקודה אחת.

ג. כל הכוחות החיצוניים מופעלים
במפרקי המוטות ויחולק משקל כל
הקומות אליהן הוא מחובר

כפי שהסבר למסבך תנועה חופשית
סומטם ואתו על סמך נ"ד בורר
נתוח הכוחות על מסבך מת

קַרְנֵי הָאוֹר (Diaphragm). – [צַמְצַם
צַמְצָמִים, צַמְצְמֵי־]

צַמְצְמָה° נ׳ צַמָּה קְטַנָּה. – [צַמְצַמ

צַמְצְמָן° ז׳ חַסְכָן, קַמְּצָן, מִי שֶׁ
[צַמְצְמָנִית, ־נִים, ־נִיּוֹת]

צַמְצְמָנִי° ת׳ קַמְּצָנִי, חַסְכָנִי.–[צַמְצְמָ

צמק: פע׳ צָמַק פ״ע יָבֵשׁ, נִקְמַט.
צָמוּק, יִצְמַק] • נפ׳ נִצְמַק°, נַעֲשָׂ
נִתְקַמֵּט. – [לְהִצָּמֵק, נִצְמָק, יִצָּמֵק]
יִבֵּשׁ, כִּוֵּץ, הֵבִיא לִידֵי הִתְקַמְּטוּת וְהִ
אֶת־, מְצַמֵּק, יְ־] • פע׳ צִמֵּק*, יִבֵּשׁ
יְצַמֵּק] • הת׳ הִצְטַמֵּק*, 1*, נִתְיַבֵּ
חֹם. 2°, נִתְקַמֵּט, נִדַּלְדֵּל. – [לְהִצְטַמ
• הפ׳ הִצְמִיק° פ״ע נַעֲשָׂה צָמוּק, נִדְ
מַצְמִיק, יַ־]

צֶמֶק*ז׳ דָּבָר שֶׁנִּצְטַמֵּק וְנִתְקַמֵּט עַל־יְ

צֶמֶר ז׳ 1, שֵׂעָר כְּבָשִׂים שֶׁגּוֹזְזִים וְטוֹ
שׁוֹנִים. 2*, שֵׂעָר שֶׁל בַּהֲמוֹת־בַּיִת שֶׁ
לִטְוִיָּה. 3°, סִיבִים רַכִּים, מְסֻלְסָלִים
חֲלָקִים שֶׁל צְמָחִים שׁוֹנִים [וראה עוד להלן
• צֶמֶר־גֶּפֶן°, 1*, כֻּתְנָה (קְטָנָה),
תַּרְבּוּת מִמִּשְׁפַּחַת הַחֶלְמִיתִיִּים (ssypium
זַרְעָיו מְכֻסִּים שְׂעָרוֹת רַכּוֹת, לְבָנוֹת וַאֲרֻ
סִיבֵי הַכֻּתְנָה שֶׁמְּעַבְּדִים אוֹתָם וְטוֹוִים
אֲרִיגִים שׁוֹנִים. 2°, סִיבֵי הַכֻּתְנָה הַ
סְרִיקָה, נִקּוּי, חִטּוּי • צֶמֶר־פְּלָדָה
דַּקִּיקִים שֶׁל פְּלָדָה לְשִׁמּוּשִׁים שׁוֹנִים (לְ
וְעוֹד) • צֶמֶר־זְכוּכִית°, כִּנּוּי לְסִ
זְכוּכִית הַמְּשַׁמְּשִׁים לְסִנּוּן בְּמַעְבָּדוֹת וּבְ

צַמָּר*ז׳ מְעַבֵּד צֶמֶר אוֹ סוֹחֵר בְּ
צַמָּרֵי־; צַמָּרִית, צַמָּרִיּוֹת]

א· **צמר:** נפ׳ נִצְמַר°, נִתְחַמֵּם, הִתְ
צְמַרְמֹרֶת.–[לְהִצָּמֵר, נִצְמָר, יִצָּמֵר] •
הִלְהִיב, עוֹרֵר צְמַרְמֹרֶת. – [לְהַצְמִיר,

ב· **צמר:** נפ׳ נִצְמַר°, הִתְנַשֵּׂא, הִתְרוֹ
[לְהִצָּמֵר, נִצְמָר, יִצָּמֵר] • פע׳ צִמֵּ
הִתְנַשֵּׂא. – [לְצַמֵּר, מְ־, יְ־]

צַמְרוֹן°ז׳ כִּנּוּי לְכֶלֶב גַּמָּדִי שֶׁשְּׂעָרוֹ
לְצֶמֶר־כְּבָשִׂים (Poodle).–[צַמְרוֹנִים, ־נֵ

צַמְרוּרִית° נ׳ ראה צְמַרְמֹרֶת.

צַמְרִי° ת׳ דּוֹמֶה לְצֶמֶר, עָשׂוּי מִצֶּמֶר.–[־

צַמְרִיּוּת° נ׳ תְּכוּנַת הַצֶּמֶר, רַכּוּת וּשְׂעִיר

צַמְרִירִי° ת׳ הַדּוֹמֶה בְּמִקְצָת לְצֶמֶר.[־ר

צמרמר: פע׳ צִמַּרְמַר° פ״ע נִתְ
צְמַרְמֹרֶת. – [צִמַּרְמְרוּ

וּת. – [צְמִיקַת־]
[צְמִירָה, ־רִים, ־וֹת]
מְשֻׁעְבָּד לְעוֹלָם. –
ר צְמִית°, אָרִיס
לַעֲבֹד כָּל יְמֵי־
וֹרָה חֵלֶק מִיבוּלָם.
צוּצוֹת.–[צְמִיתַת־]
תוּת תה״פ לְעוֹלָם,

אלה) כִּנּוּי לְנַעֲרָה

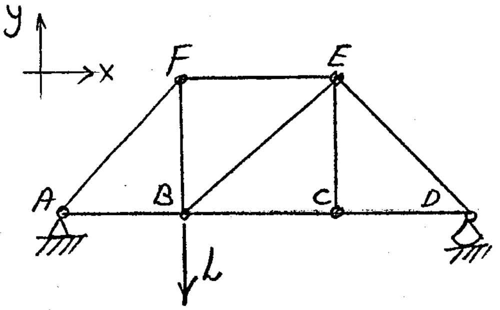
מְלֹא הַהִתְפַּתְּחוּת.
° פ״ע הִבְשִׁיל. –

צִמְמִי־ צְמְמוֹת]
[לְצַמֵּם, מְ־, יְ־]
טְצִיָה.–[צְמֻנּוּט־]
שׁוֹנִים (אֶבֶן־גִּיר,
מֵהֵוָה, בְּהִתְעָרְבוֹ
וְדָבִיק הַמִּתְיַבֵּשׁ
מְשַׁמְּשִׁים כְּחֹמֶר
צֶם הַמְּכַסֶּה אֶת
חוֹרִים בַּשִּׁנַּיִם.
מֶנְט.
וְהִתְקִין בְּצֶמֶנְט,
, יְ־]
[מְצַמְנָט, יְצַמְנֵט]
פְּרִים).
צִמְ...ם, ־עוֹת]
בַּיִת.
קְבִיעַת דְּבַר־
קְטַנָּה, הַפְחָתָה.
ים, צִמְצוּמֵי־]
לֹא לַעֲבֹר עַל
סוֹד הַצִּמְצוּם°
הִתְרַכֵּז בְּעִקָּר
אֶת שְׁבָרִים לִידֵי
הַמּוֹנָה וְהַמְּכַנֶּה

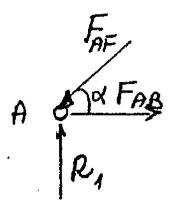
, לֹא עָבַר אַף
הִגְבִּיל, הִקְטִין
°, חָסַךְ, הֵלִיט,
פע׳ צִמְצֵם*,
. 2*, הִגְבִּיל,

החיבורים. עם קביעתן ניתן לעבור לניתוח הכוחות בכל מוט ומוט. ככלל קיימות שתי דרכים לבצע ניתוח זה: שיטת הצמתים ושיטת החתכים.

4.3 שיטת הצמתים



לצורך הניתוח נשתמש במסבך שבשרטוט:
שיטת הצמתים מתבססת על קיום שווי משקל של הכוחות הפועלים בכל צומת וצומת. כיון שבכל צומת וצומת כל הכוחות נחתכים בנקודה הרי שלרשותנו עומדות בכל צומת שתי משוואות שווי משקל $\Sigma F_x=0$; $\Sigma F_y=0$
לאחר שקבענו את הריאקציות ב-A ו-D משווי משקל כולל של הגוף אנו מתחילים בניתוח צומת כזה שבו לפחות כח אחד ידוע ולא יותר משניים. במקרה זה נתחיל בצומת A. נעשה דיאגרמת גוף חופשי בצומת A

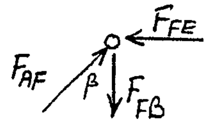


עקב היות R_1 בכיון $+y$ חייבים הכוחות F_{AF} ו- F_{AB} להיות בכיונים שבשרטוט. אחד עקביות אינן כל חשובות.

$\Sigma F_y=0$ $\qquad F_{AF} = \dfrac{R_1}{\sin\alpha}$

$\Sigma F_x=$ $\qquad F_{AB} = F_{AF}\cos\alpha$

הצומת הבאה לבחון תהיה F שבה שני נעלמים F_{FE} ו- F_{BF} שכן F_{AF} נקבע. נבצע דיאגרמת גוף חפשי לצומת F. גם כאן קל לקבוע את כיווני הנעלמים ונחשבם:



$$F_{FB}= F_{AF}\cos\beta$$
$$F_{FE} = F_{AF}\sin\beta$$

בשיטה דומה נמשיך עד לצומת -D בה יתקבל שהכוחות F_{ED}, F_{ED} בשווי משקל עם הריאקציה R_2.

באשר לסימון מקובל לסמן מתיחה במוט כחץ היוצא מן הצומת ולחיצה בחץ הנכנס אל הצומת.

<u>תנאי יציבות ומסוימות</u>

באם מס' הסמכים עולה על הדרוש להבטחת ש.משקל סטטי של המסבך יקרא המסבך בלתי מסוים סטטית חיצונית. באם למסבך מס' מוטות העולה על הדרוש להבטחת יציבותו יקרא המסבך בלתי מסוים פנימית. בשני המקרים יהוו כוחות ותגובות חיצוניים או פנימיים.

עבור מסבך מסוים סטטית- חיצונית קיים תנאי <u>הכרחי</u> אם כי <u>לא מספיק</u> להבטחת מסוימותו הפנימית. כיון שבכל צומת קיימות שתי משוואות שווי משקל אזי קיימות $2j$ משוואות כאשר עבור מסבך שמס' צמתיו j. מס' הנעלמים כמספר המוטות m ועוד 3 עבור שווי המשקל החיצוני כלומר סה"כ $m+3$ נעלמים. תנאי הכרחי לפתרון הבעיה

$$m+3=2j \quad *$$

j - מס' הצמתים

m - מס' המוטות.

סבת היות התנאי לא מספיק הוא הסדור הרצוני של המוטות שעל אף קיום התנאי ניתן לסדרם כך שהמסבך יהיה בלתי יציב.

כאשר:

$$m+3>2j$$

המסבך בלתי מסוים פנימית.

כאשר:

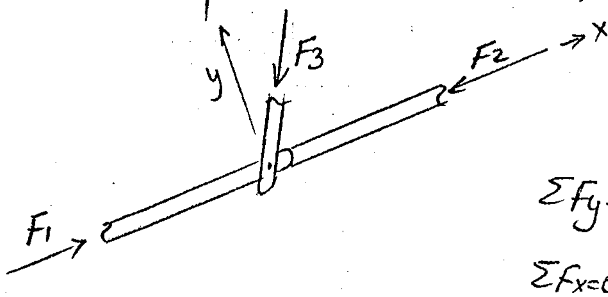
$$m+3<2j$$

המסבך בלתי קשיח

* כאשר בסמכים r נעלמים אזי תנאי המסוימות יהיה $m+r=2j$

מקרים פרטיים במסבך

מקרה א': מפגש שלושה מוטות ששניים קולינאריים בצומת שאין בה כח חיצוני. (אפס מוט)*



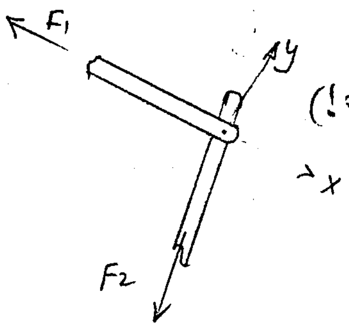
במקרה זה חייב הכח $F_3=0$

שכן $\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_{3y}=0$

ומכאן $\Sigma F_x=0 \quad F_1=F_2$

לו פעל כח חיצוני בצומת ולו רכיב בכיוון y היתה התמונה משתנית כמובן.

מקרה ב': מפגש שני מוטות לא קולינאריים בצומת בלתי מעומס

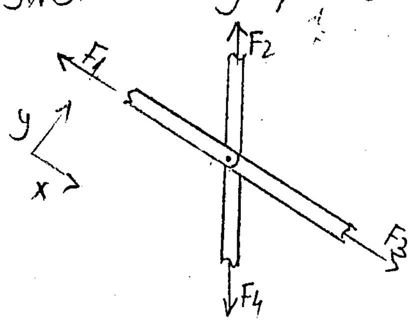


$\Sigma F_y=0$ (רק למוט 2 רכיב בכיוון y!) $\quad F_2=0$

$\Sigma F_x=0 \quad F_1=0$

בשני המוטות לא יפעל כח

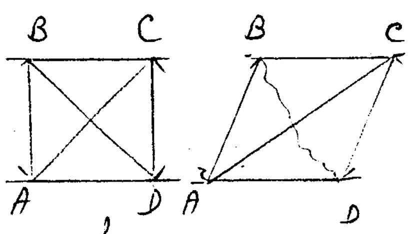
מקרה ג': מפגש ארבעה מוטות של שניים קולינאריים בצומת בלתי מעומס:



$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_2=F_4$

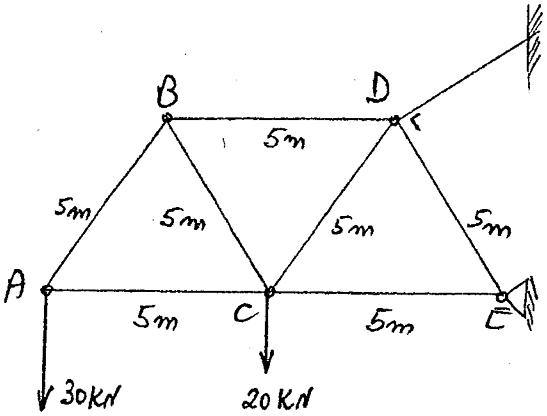
$\Sigma F_x=0 \Rightarrow F_3=F_1$

מקרה ד':



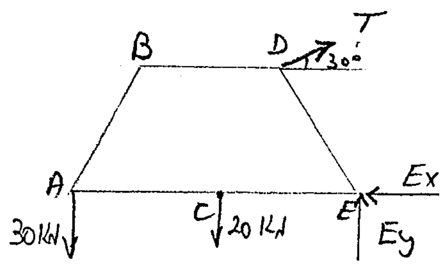
לא עמוס   מעומס

לעתים משתמשים בכבלים בתור מוטות של כסונים. באם שני הכבלים היו נתונים לעומס אזי היינו מקבלים מבנה בלתי-מסוים פנימית. ברם כיוון שכבל עומד רק למתיחה רק אחד יוכל לעבוד



דוגמא (4.1)

חשב את כל הכוחות הפועלים במוטות ובסמכים של המסבך המישורי הבא:



שלב א' - קביעת הריאקציות

$$\Sigma M_E = 0 \qquad 5T - 5\times 20 - 10\times 30 = 0$$

$$T = 80.\ KN$$

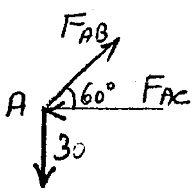
$$\Sigma F_x = 0 \qquad T\cos 30 - E_x = 0$$

$$E_x = 69.3\ KN$$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad T\sin 30 + E_y - 50 = 0$$

$$E_y = 10\ KN$$

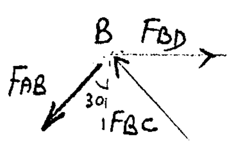
שלב ב' - הכוחות במוטות



נתחיל בצומת A

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{AB}\sin 60^\circ - 30 = 0 \qquad F_{AB} = 34.64\ KN\ T$$

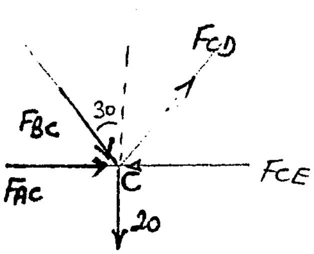
$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{AB}\cos 60^\circ - F_{AC} = 0 \qquad F_{AC} = 17.32\ KN\ C$$



נעבור לצומת B

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_{AB}\cos 30^\circ + F_{BC}\cos 30^\circ = 0 \qquad F_{BC} = 34.64\ KN\ C$$

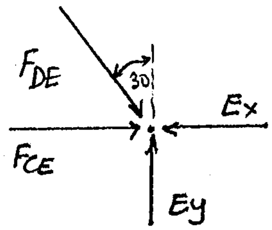
$$\Sigma F_x = 0 \qquad -F_{AB}\sin 30 - F_{BC}\sin 30^\circ + F_{BD} = 0 \qquad F_{BD} = 34.64\ KN\ T$$



נעבור לצומת C

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -F_{BC}\cos 30^\circ - 20 + F_{CD}\cos 30^\circ = 0 \qquad F_{CD} = 57.74\ KN\ T$$

$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{AC} + F_{BC}\sin 30^\circ + F_{CD}\sin 30^\circ - F_{CE} = 0 \qquad F_{CE} = 63.51\ KN\ C$$



לבסוף נעבור לצומת E

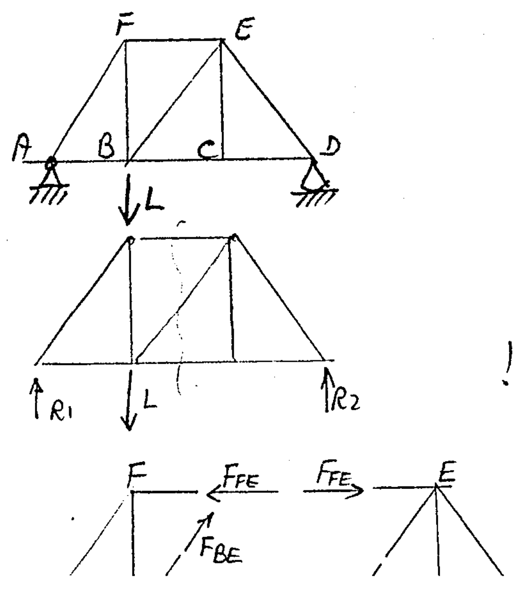
$\Sigma F_y=0 \qquad -F_{DE}\cos 30^\circ+E_y=0 \qquad F_{DE}=11.55\ KN\ C$

בדיקת סגירת שיווי משקל ב-D נותנת כמובן 0.

4.4 שיטת החתכים

בשיטת הצמתים נצלנו רק שתי מ. שווי משקל של הכחות כיון שקווי פעולת הכחות נחתכים בנקודה. בשיטת החתכים אנו מנצלים גם את משוואת המומנטים כיון שאנו דנים בשווי משקל של חלק מהמסבך הכולל והוא נפעל בד"כ לכחות שאינם נחתכים בנקודה. בשיטה זאת ניתן בד"כ לחשב ישירות את הכח הפועל במוט זה או אחר במסבך מבלי "לגעת" אלא בדרך סיסטמטית כבשיטת הצמתים. אנו חותכים חלק מהמסבך כך שהחתך יעבור דרך מוטות. ויש לזכור שבזמן החתך יש להקפיד שמס' הנעלמים שנוצרים לא יעלה על שלושה שניתן לחשבם משלושת מש. שווי המשקל.

נדגים את השיטה בעזרת המסבך שבשרטוט. ראשית נחשב את הריאקציות ובשלב שני נדרוש חשוב הכח במוט BE.



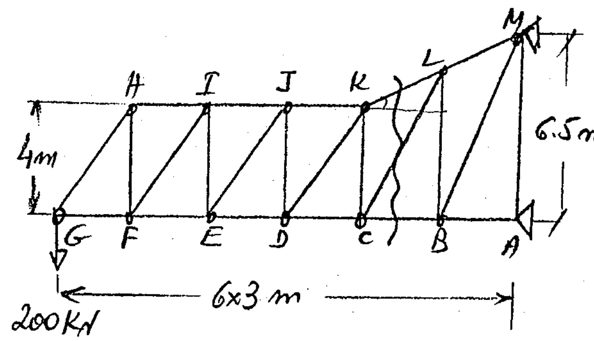
זאת נבצע ע"י "חתוך" המסבך לשנים:
כעת נוצרו שלושה כחות נעלמים הפועלים על כל אחד מחצאי המסבך.
כיון הכחות שסומן ניתן להערכה בורה אין הוא חשוב ברם יש להבטיח שעל כל חלק יותו כוח יפעל בכיונים הפוכים!!!
כעת נעבור לחישוב שלוש הכחות:

א. חשב מומנט סביב B נותן ישירות את F_{FE}

ב. $\Sigma F_y=0$ של הגוף נותן ישירות את F_{BE}

ג. $\Sigma F_x=0$ של הגוף נותן ישירות את F_{BC}

<u>דוגמא</u>



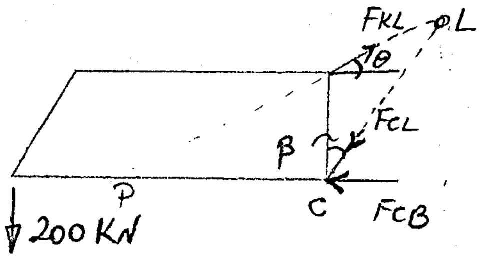
חשב את הכוחות במוטות KL , CL , CB .

$m=23 \quad j=13$

$23+4 \overset{?}{=} 2\times 13$

$27>26$

המסך מסוגל מסוים ספטות חיצוניות בגוף שני הכוחות. נחתך את המסבך ונקבל את המצב הבא:



מומנט סביב L מכוון כי F_{CB} חייב להיות לחיצה ומומנטים סביב הנקודה C מכוון כי F_{KL} חייב להיות מתיחה ומכאן ש- F_{CL} חייב להיות לחיצה כי נבצע מומנטים סביב P מפגש של F_{KL} ו F_{CB}.

הצריך BL $\quad BL = 4 + \frac{6.5-4}{2} = 5.25\,m \quad \left(\frac{6.5+4}{2}\right)$

$\Sigma M_L=0 \qquad 200\times(5\times3) - F_{CB}\times 5.25 = 0 \qquad F_{CB} = 571\ KN\ C$

נחשב θ $\qquad \theta = \tan^{-1}\frac{5}{12} \Rightarrow \cos\theta = \frac{12}{13}$

$\Sigma M_C=0 \qquad 200\times(4\times3) - \frac{12}{13}F_{KL}\times 4 = 0 \qquad F_{KL} = 650\ KN\ T$

נחשב PC , β

$\frac{\overline{PC}}{4} = \frac{6}{6.5-4} \Rightarrow \overline{PC} = 9.6\ m$

$\bar{\beta} = \tan^{-1}\frac{\overline{CB}}{\overline{BL}} \qquad \beta = 29.7^\circ \qquad \cos\beta = 0.868$

$\Sigma M_P=0 \qquad 200\,(12-9.6) - F_{CL}\cdot 0.868\times 9.6 = 0 \qquad F_{CL} = 56.7\ KN\ C$

4.5 מסבכים מרחביים

המסבך המרחבי הוא בן דודו של המסבך המישורי. גם הוא בנוי מוטות המעבירים כוחות לאורכם בלבד והמחוברים ביניהם פרקים. הצורה הבסיסית של מסבך זה הוא הטטרהדרון.

<u>תנאי המסוימות</u>: אם מס' הצמתים הוא j אזי מס' המשוואות הוא $3j$. מס' הנעלמים הוא $m+6$ כאשר m - הוא מס' המוטות ולכן תנאי המסוימות

$m+6=3j$ (או: $m+2=3j$)

זהו גם תנאי הכרחי ולא מספיק ליציבות המסבך.

במקרה ש: $m+6>3j$

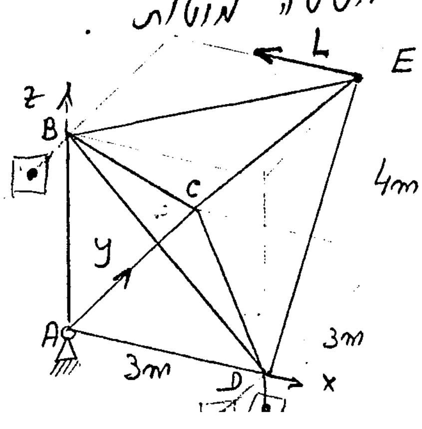
המסבך בלתי מסוים סטטי בדרגה של: $m+6-3j$

במקרה ש: $m+6<3j$ המסבך בלתי קשיח.

שיטות הפתרון כבפתרונות המישוריים:

<u>שיטת הצמתים</u>: בכל צומת 3 משוואות $\Sigma\vec{F}=0$
ניתן לפתור בו זמנית עד שלושה נעלמים.

<u>שיטת החתכים</u>: לרשותנו כל שש המשוואות $\Sigma\vec{F}=0$ $\Sigma\vec{M}=0$
ניתן "לחתוך" לא יותר משישה מוטות.



<u>דוגמא:</u>

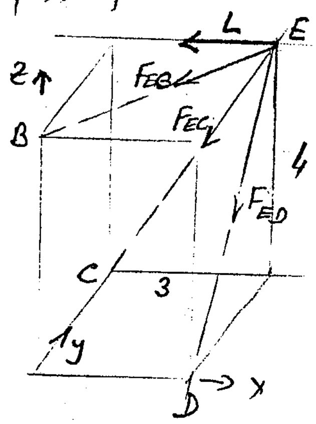
המסבך שבשרטוט נפעל לכוח L. חשב את הכוחות במוטות הנפגשים ב-E.

א. המסבך רתום כהלכה. מס' המוטות $m=9$ ומס' הצמתים $j=5$

$$9+6=3\times5=15$$

המסבך יציב ומסוים סטטית.

ב. ניתן לחשב כעת את הריאקציות בצמתים A,B,D ברם אין צורך לשאלה שהוצגה.



ג. נסתכל בצומת E יש בה שלושה נעלמים וכח ידוע אחד. נרשום בצורה וקטורית

$$\vec{L}=-L\,i$$

$$\vec{F}_{EB}=\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}(-i-j)$$

$$\vec{F}_{EC}=\frac{F_{EC}}{5}(-3i-4k)$$

$$\vec{F}_{ED}=\frac{F_{ED}}{5}(-3j-4k)$$

כולם סומנו כמתיחה!!!

ג. נרשום ש.משקל

$$\sum\vec{F}_E=0 \qquad \vec{L}+\vec{F}_{EB}+\vec{F}_{EC}+\vec{F}_{ED}=0$$

$$\left(-L-\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}-\frac{3F_{EC}}{5}\right)\vec{i}+\left(-\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}-\frac{3F_{ED}}{5}\right)\vec{j}+\left(-\frac{4F_{EC}}{5}-\frac{4F_{ED}}{5}\right)\vec{k}=0$$

כיון שכל רכיב חייב להתאפס נקבל

$$\frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}+\frac{3F_{EC}}{5}=-L \qquad \frac{F_{EB}}{\sqrt{2}}+\frac{3F_{ED}}{5}=0 \qquad F_{EC}+F_{ED}=0$$

$$F_{EB}=-\frac{L}{\sqrt{2}}\ C \qquad F_{EC}=-\frac{5L}{6}\ C \qquad F_{ED}=\frac{5}{6}L\ \ T$$

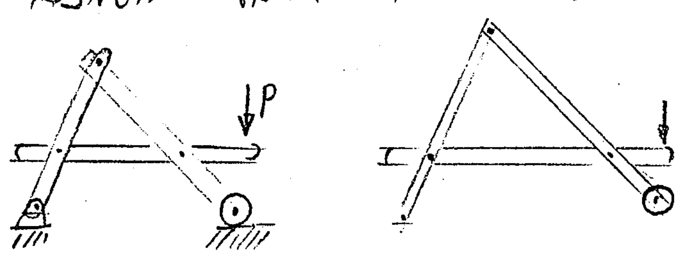
פתרון זה התאפשר הודות לעובדה שבצומת E היו שלושה נעלמים בלבד. להמשך הפתרון נזקק לחישוב הריאקציות.

4.6 מסגרות ומכונות

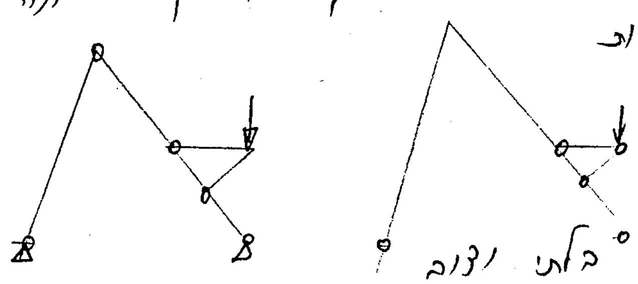
מבנים המשלבים חלקים המתחברים ביניהם ואשר על כל אחד מהם פועלים לפחות שני כוחות משתייכים לקטגוריה של מסגרות או מכונות. מסגרות הינם מבנים האמורים לעמוד בעומס בעוד שמכונה הוא מבנה שמטרתו להעביר כוחות ועומסים מגוף לגוף.

שיטת הפתרון למסבכים אינה ישימה למסגרות ומכונות. שיטה הנוכחית תתבסס על שווי משקל של מערכות של גופים קשיחים. קיימות מסגרות ומכונות דו-מימדיות ותלת-מימדיות מסוימות ובלתי מסוימות סטטית.

כאשר המסגרת או המכונה הינה גוף יציב גם בלי הסמכים
למשל הזוג "A" שבשרטוט
אזי ניתן למצוא תחילה את
הריאקציות באופן בלתי תלוי
בפתרון הכוחות הפנימיים



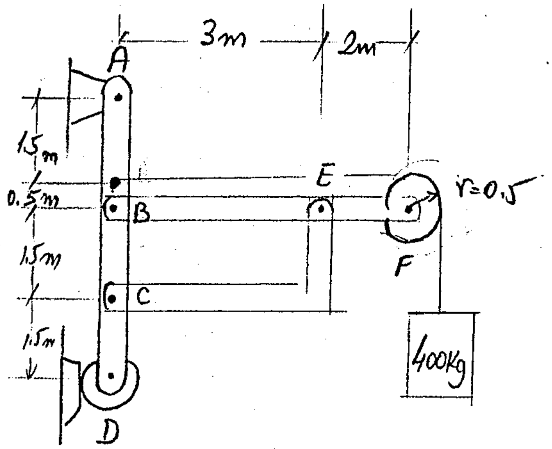
כאשר המבנה "המשותף" בלתי יציב יש צורך בפירוק המבנה לחלקיו
טרם שניתן לקבוע את הריאקציות



להלן נפתור שתי דוגמאות משני הסוגים:

<u>כלל חשוב:</u> סימן כיוון הכוחות בלתי חשוב ברם אותו כוח יופיע בכיוונים הפוכים על שני החלקים ביניהם הוא פועל.

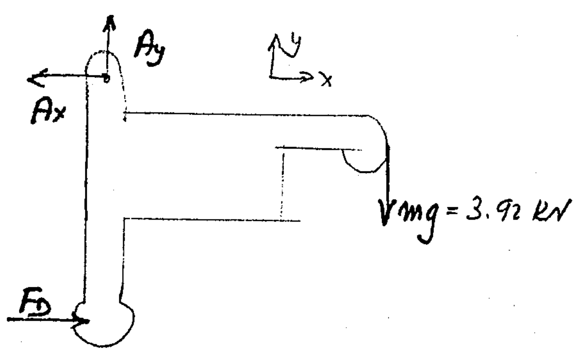
דוגמא א (4.5 עמ' 159)



נתונה המסגרת שבשרטוט בהזנחת משקל המוטות, חשב את כל הכוחות הפועלים על כל מוט.

בבעיה 11 נעלמים בפינות A,B,C,D,E,F ו-12 משוואות ב-3 מוטות + גלגל

א. כיון שהמסגרת יציבה עם בלוק סמכה נפתור תחילה את הריאקציות החיצוניות



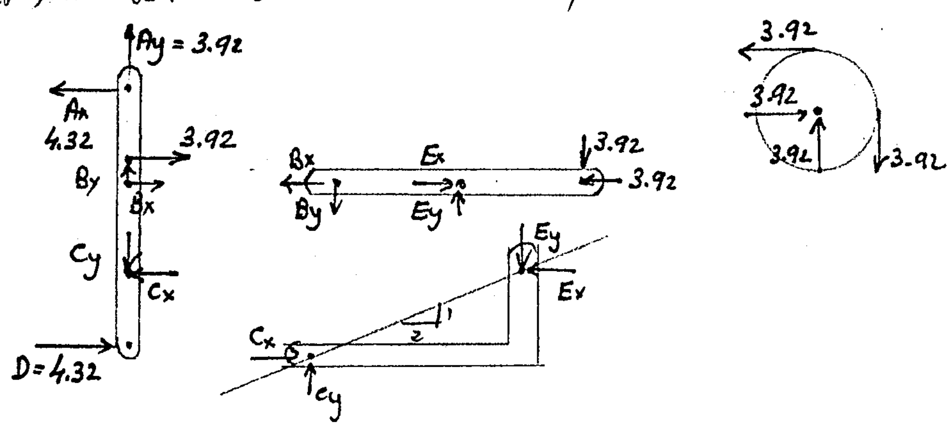
$$\sum M_A = 0 \quad 5.5 \times 400 \times 9.81 - 5F_D = 0$$

$$F_D = 4.32 \text{ KN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -A_x + 4.32 = 0 \quad A_x = 4.32 \text{ KN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y - 3.92 = 0 \quad A_y = 3.92 \text{ KN}$$

ב. כדי לפרק את המוט לכל איבריו ניקח דיאגרמת גוף חופשי לכל אחד מהם:



* נתחיל בנקודה F ובגלגל שוי משקל הגלגל מוזנח ולכן Fx ו Fy ידועים.
* נשתמש במוט CE על מוט זה פועלים רק שני כוחות ולכן הם צריכים להיות שווים בגודלם בכיוון וקולינאריים.

ומכאן נובע ש:

$$\frac{C_y}{C_x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{E_y}{E_x} = \frac{1}{2}$$

$$C_x = E_x$$

* כאמור נוכל לטפל כעת במוט BF

$\Sigma M_B = 0 \qquad 3.92\times5 - \underbrace{\tfrac{1}{2}E_x}_{E_y}\times3 = 0 \qquad E_x = C_x = 13.08\ kN$

$E_y = C_y = 6.54$

$\Sigma F_y = 0 \qquad B_y + 3.92 - \frac{13.08}{2} = 0 \qquad B_y = 2.62\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \qquad B_x + 3.92 - 13.08 = 0 \qquad B_x = 9.15\ kN$

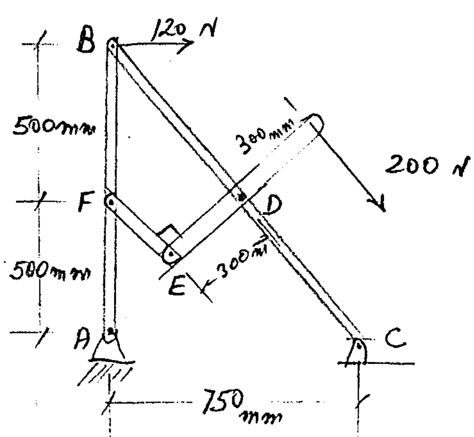
* נטפל במוט AD לבדיקת ש.מ.

$\Sigma M_C = 0 \qquad 4.32\times3.5 + 4.32\times1.5 - 3.92\times2 - 9.15\times1.5 \equiv 0$

$\Sigma F_x = 0 \qquad 4.32 - 13.08 + 9.15 + 3.92 - 4.32 = 0$

$\Sigma F_y = 0 \qquad 3.92 + 2.62 - 6.54 = 0$

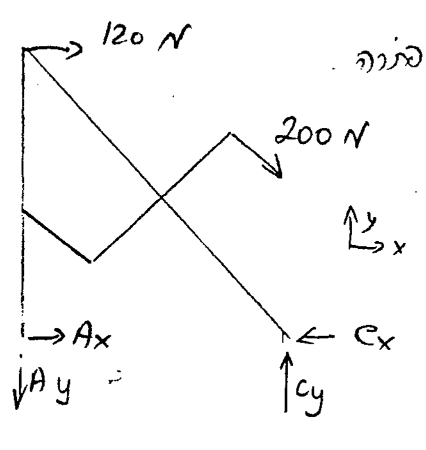
<u>דוגמא ב׳</u> (4.6 עמ׳ 160)



חשב הכוחות במסגרת הנתונה בהזנחת משקל המוטות.

כאשר אנו רואים שאם נסיר את הסמכים החלק BDEF ינוע לכן לא ניתן לפתור את הריאקציות ישירות אבל נוכל לקבוע את רכיביהן האנכיים:

למסגרת 12 נעלמים ו- 4x3 משוואות לכן ניתן לפתרה.



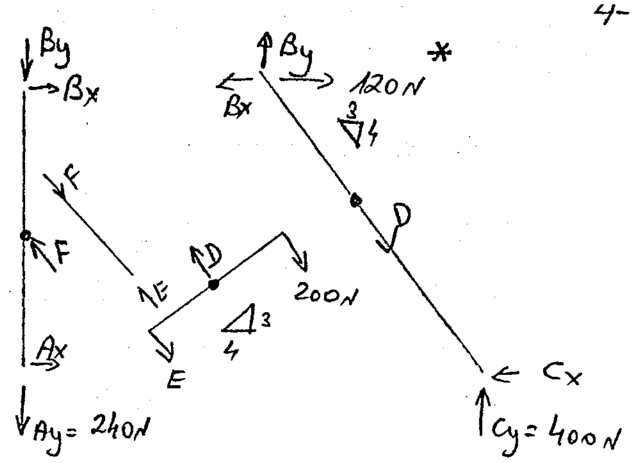
$\Sigma M_C = 0 \qquad -200\times0.3 - 120\times1.0 + 0.75\times A_y = 0$

$A_y = 240\ N$

$\Sigma F_y = 0 \qquad C_y - 200\times\frac{4}{5} - 240 = 0$

$C_y = 400\ N$

כעת נפרק את הגוף ונטפל במוט מוט



מוט ED

$\Sigma M_D = 0 \qquad E \times 0.3 - 200 \times 0.3 = 0 \qquad E = 200\ N$

$\Sigma F_n = 0 \qquad D - E - 200 = 0 \qquad D = 400\ N$

מוט EF

$\Sigma F_e = 0 \qquad -F + E = 0 \qquad F = 200\ N$

מוט AB

$\Sigma M_A = 0 \qquad 200 \times \frac{3}{5} \times 0.5 - B_x \cdot 1 = 0 \implies B_x = 60\ N$

$\Sigma F_x = 0 \qquad B_x + A_x - 200 \times \frac{3}{5} = 0 \implies A_x = 60\ N$

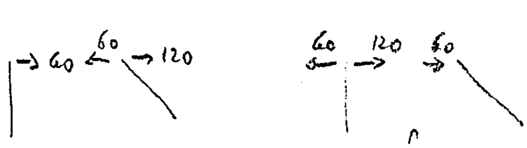
$\Sigma F_y = 0 \qquad 200 \times \frac{4}{5} - 240 - B_y = 0 \qquad B_y = -80\ N$

מוט BC

$\Sigma F_x = 0 \qquad 120 - 60 - 400 \times \frac{3}{5} - C_x = 0 \implies C_x = 300\ N$

נתן בעזרת שתי המשוואות שנותרו. לבדוק שאכן הפתרון מקוים שווי משקל.

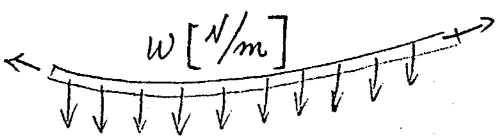
* ניתן כמובן להעביר את הכח 120N למוט AB ואז תשתנה התגובה Bx. רק סה"כ הכח האופקי בנקודה B בשני המוטות ישאר אותו הדבר.



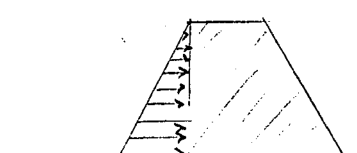
פרק 5 עומסים מפולגים מרכזי כובד ומומנטי אינרציה

5.1 מבוא

עד כה טפלנו בכוחות מרוכזים. במציאות הפיסיקלית אין כוחות מרוכזים והכוחות מחולקים על פני שטח המגע שבין הגוף המפעיל את הכוח ובין הגוף הנפעל. שטח זה יכול להיות גדול מאוד כמימד אחד הגופים למשל תיבה המונחת על שולחן; הוא יכול להיות בינוני כגון שטח המגע בין הצמיג לכביש והוא יכול להיות קטן מאד; כגון שטח המגע בין כדורית במיסב כדוריות לבית המיסב. כאשר שטח המגע גדול ביחס למידות האחרות שבבעיה לא ניתן לרכז את הכוח לנקודה אחת ויש להתייחס לפרוס הכוחות הנתון. יכול להיות פרוס לאורך "קו" כגון הכוחות הפועלים על כבל פלדה של גשר.

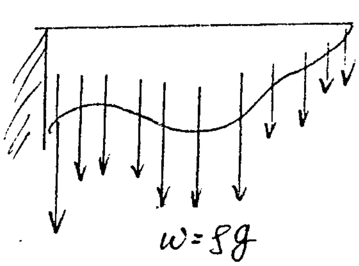


הפרוס יכול להעשות על שטח כגון הלחץ ההידרוסטטי הפועל על סכר. היחידות בהן הוא מודד הן:



$$\left[\frac{N}{m^2}\right]=[Pa] \qquad [MPa]=10^6[Pa]$$

ויתכן גם פרוס נפחי של הכוחות כגון המשקל העצמי בקורה שבשרטוט



היחידות במקרה זה הן $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

בד"כ אין מטפלים בפרוס כוחות זה אלא בשקולו העובר דרך מרכז הכובד של הגוף.

חלק א - מרכזי מסה ומרכזים גיאומטריים

5.2 מרכז המסה

על ידי תליית גוף נוכל למצוא את קו הפעולה של שקול כוחות הכבידה הפועלים עליו. חזרה על הפעולה תגדיר קו חדש. חיתוך שני הקווים יגדיר את נקודת האחיזה של שקול הכוחות הנקראת מרכז הכובד. ברם יש לזכור שבעיקרון רק "צופני": במציאות שכן עוצמת שדה הכבידה וכן כיוון פעולתו אינם קבועים עבור כל נקודות הגוף והם תלויים במקום המסוים של כל נקודה ביחס למרכז כדור הארץ. יחד עם זאת עבור גופים הקטנים מאוד ביחס לכדור הארץ קירוב זה הוא מצויין.

ננסה להגדיר בצורה מדויקת את מרכז הכובד של גוף בהנחה ש-g קבוע ושהוא פועל באופן מקביל על כל נקודות הגוף למרכז המתמטי שנמצא נקרא "מרכז המסה". נחלק את הגוף לאלמנטים דיפרנציאליים dm על כל אחד יפעל כוח כבידה $g\,dm$ נמצא את מקומו של שקול כוחות אלו ביחס לשלושה צירים בעזרת משפט Varignon

$$\underbrace{mg\cdot\bar{x}}_{\text{מומנט השקול}} = \underbrace{\int x_c\, g\, dm}_{\text{סכום מומנטי הכבידה}}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x_c\, dm}{m} \tag{5.1}$$

ובאופן דומה

$$\bar{y} = \frac{\int y_c\, dm}{m}$$

$$\bar{z} = \frac{\int z_c\, dm}{m}$$

ובצורה וקטורית

$$\bar{r} = \frac{\int \bar{r}_c\, dm}{m} \tag{5.2}$$

נוכל כעת לפרט את משוואות 5.1 ע"י הגדרת הצפיפות ρ והנפח v

$$dm = \rho\, dv$$

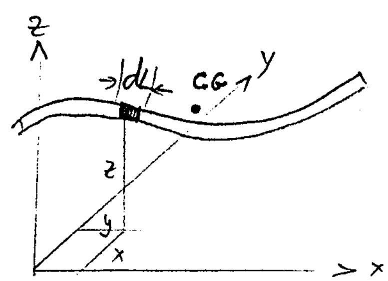
כאשר $\rho = \rho(x,y,z)$ בחומר הטרוגני ואז

$$\bar{X} = \frac{\int x_c \rho\, dv}{m} \qquad \bar{Y} = \frac{\int y_c \rho\, dv}{m} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c \rho\, dv}{m} \qquad (5.3)$$

בחישוב מרכז המסה יש לזכור שסימטריות של גוף נכונות לעזר לנו. בגוף הומוגני חייב מרכז המסה להמצא על כל משור סימטריה או ציר סימטריה. למשל: חשוב על קוביה, גליל, כדור, קונוס וכו'.

5.3 מרכז גיאומטרי של קו, שטח ונפח

במקרים בהם הצפיפות קבועה בכל הגוף היא מצטמצמת במשוואות (5.3) והביטוי הנותר הוא בעל תוכן גיאומטרי בלבד. במקרה זה קוראים לנקודה $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ מרכז גיאומטרי עבור גופים בעלי ρ קבוע מרכז המסה ומרכז הגיאומטרי מתלכדים. ניתן לחשב מרכזים גיאומטריים לגופים שניתן למדלם כחד-מימדיים — קווים; כדו-מימדיים שטחים וכתלת-מימדיים נפחים.



1. קווים

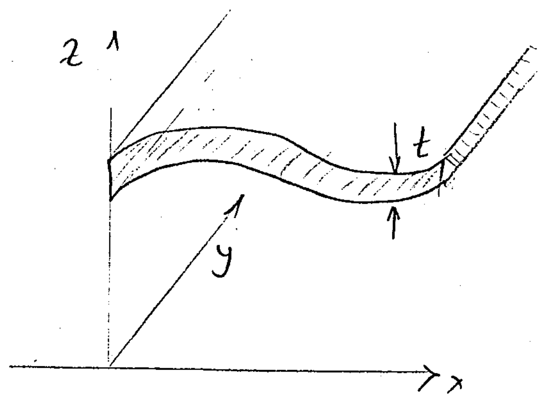
נתבונן במוט דק במרחב שחתכו A

$$dm = \rho A\, dL$$

אם ρ ו- A קבועים ואז:

$$\bar{X} = \frac{\int x_c\, dL}{L} \qquad \bar{Y} = \frac{\int y_c\, dL}{L} \qquad \bar{z} = \frac{\int z_c\, dL}{L} \qquad (5.4)$$

שים לב! שה-CG לא נמצא על המוט עצמו!



ב. <u>שטח</u>

נתאר לנו גוף שצורתו משטח
בעל עובי t כלשהו לפיכך:

$$dm = \rho t\, dA$$

במידה ו-ρ וגם t קבועים נקבל עבור משוואות המרכז
הגיאומטרי את הביטויים הבאים:

$$\bar{X} = \frac{\int x_c\, dA}{A} \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\int y_c\, dA}{A} \quad ; \quad \bar{Z} = \frac{\int z_c\, dA}{A} \qquad (5.5)$$

הביטויים מהסוג המופיע בנוסחה (5.5) דוגמת $\int x\, dA$
נקראים המומנט הראשון של השטח ונדון בהם באופן
מפורט יותר בעתיד.

ג. <u>נפח</u>

חישוב המרכז הגיאומטרי של גוף תלת-ממדי ייעשה
באמצעות משוואה (5.3) במידה ו $\rho = const$, יצמצם
הביטוי ונקבל

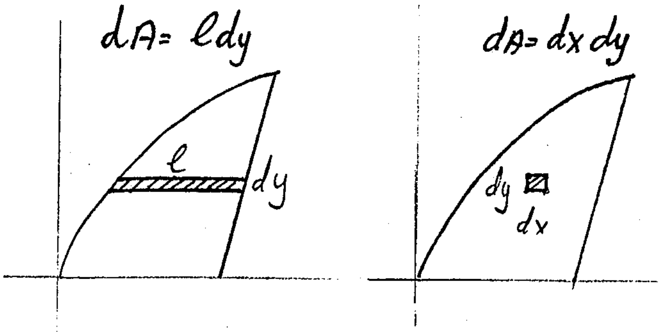
$$\bar{X} = \frac{\int x_c\, dv}{v} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{\int y_c\, dv}{v} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{\int z_c\, dv}{v} \qquad (5.6)$$

5.3.1 <u>בחירת אלמנט האינטגרציה</u>

במקרים רבים אחרים הקושי העיקרי נובע
מתהליך החישוב הבודד של מרכזי מסה ומרכזים

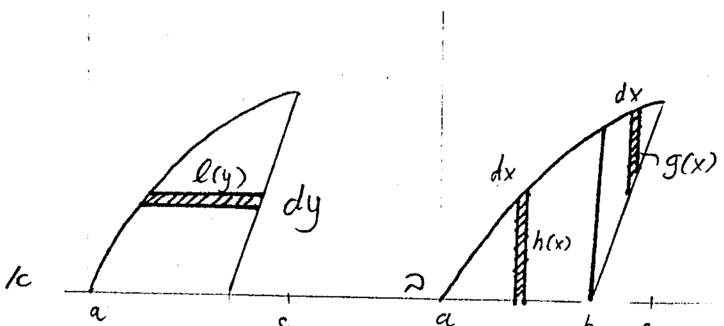
גיאומטריים ולא מהמושגים עצמם. עיקר הקושי נובע מבחירת האלמנט הדיפרנציאלי בין אם הוא אלמנט אורך, שטח או נפח. בכדי להקל בחלק זה ניתן לנצל חמישה כללי יסוד פשוטים:

א. <u>סדר האלמנט</u>



אלמנט דיפרנציאלי מסדר כמה שיותר נמוך עדיף! רצוי עד כמה שניתן לעבוד עם אלמנטים מסדר ראשון

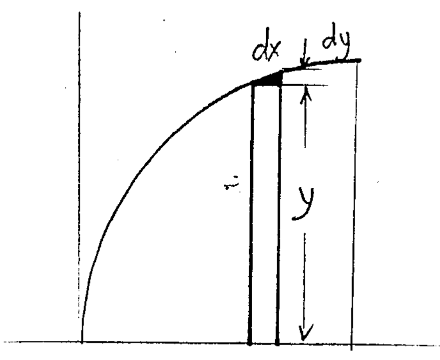
ב. <u>רציפות</u>



$$\int_a^c l(y)\,dy \qquad \int_a^b h(x)\,dy + \int_b^c g(x)\,dy$$

השתדל עד כמה שניתן לבחור אלמנט אחד שבאמצעותו תבצע את כל האינטגרציה (א)

ג. <u>הזנחת איברים מסדר גבוה</u>

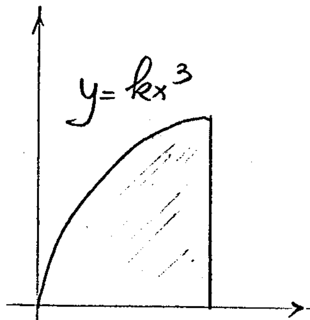


תמיד ניתן להזניח איברים מסדר גבוה ביחס לסדר הנמוך.

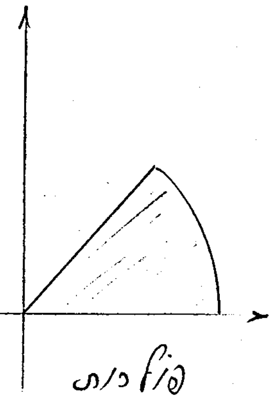
$$dA = y\,dx + \cancel{\tfrac{1}{2}dy\,dx} \to 0$$

ג. בחירת מערכת צירים

בחר במערכת צירים המתאימה ביותר לקוי המתאר של הצורה הגאומטרית בה אתה מטפל - ראה דוגמא



קרטזית



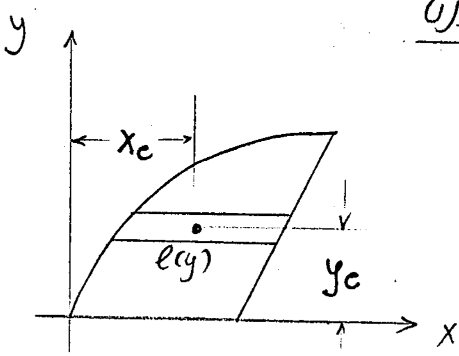
פולרית

ה. קואורדינטות המרכז הגאומטרי של האלמנט

באלמנטים מסדר ראשון או שני היה זהיר בהגדרת המרכז הגאומטרי של האלמנט

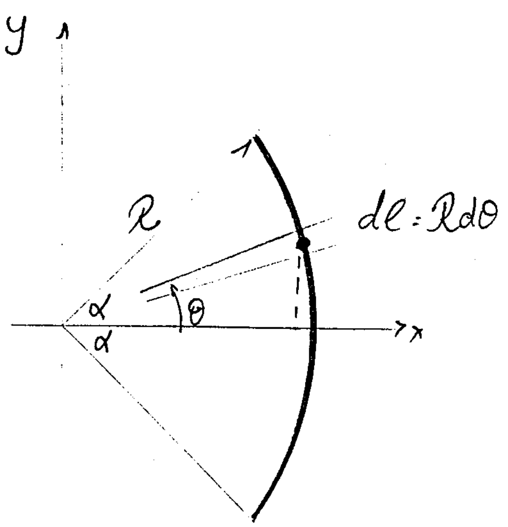
למשל:

$$\bar{X} = \frac{\int x_c \cdot [l(y)\, dy]}{\int l(y)\, dy}$$



דוגמא א' (5.1) עמ' 191

חשב את המרכז הגאומטרי של הקשת המעגלית שבשרטוט



$$\bar{X} = \frac{\int x_c\, dl}{\int dl}$$

$$dl = R\, d\theta$$

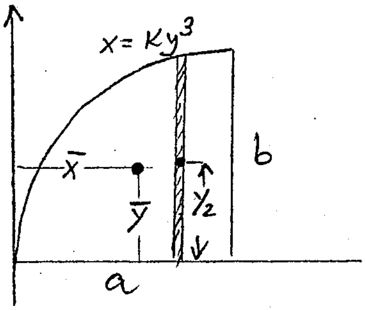
$$L = \int dl = \int_{-\alpha}^{\alpha} R\, d\theta = 2\alpha R$$

$$x_c = R\cos\theta$$

$$\bar{X} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} (R\cos\theta) R\, d\theta}{2\alpha R} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

עבור חצי מעגל $\bar{X} = \frac{2R}{\pi}$

עבור מעגל $\alpha = \pi$ $\bar{X} = 0$



דוגמא ב' (5/4) עמ' 193

חשב ותמקם המרכז הגאומטרי
של השטח המשורטט

$$dA = y\,dx \qquad k = \frac{a}{b^3}$$

$$A = \int_0^a y\,dx \qquad (x_c = x \quad y_c = y/2)$$

$$\bar{X} = \frac{\int_0^a x y\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{\int_0^a x\left(\frac{x}{k}\right)^{1/3} dx}{\int_0^a \left(\frac{x}{k}\right)^{1/3} dx} = \frac{\int_0^a x^{4/3}\,dx}{\int_0^a x^{1/3}\,dx} = \frac{\frac{3}{7} x^{7/3}\Big|_0^a}{\frac{3}{4} x^{4/3}\Big|_0^a} = \frac{4}{7}a$$

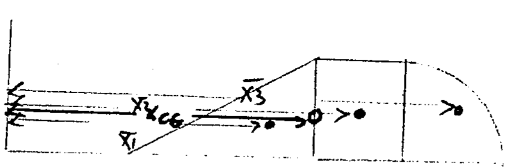
$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \frac{y}{2} y\,dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx}{\int_0^a y\,dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a \frac{x^{2/3}}{k^{2/3}}\,dx}{\int_0^a \frac{x^{1/3}}{k^{1/3}}\,dx} = \frac{1}{2k^{1/3}} \cdot \frac{\frac{3}{5} x^{5/3}\Big|_0^a}{\frac{3}{4} x^{4/3}\Big|_0^a} =$$

$$= \frac{1}{2k^{1/3}} \cdot \frac{4}{5} \cdot a^{1/3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{b}{a^{1/3}} \cdot a^{1/3} = \frac{2}{5} b$$

דוגמאות תלת מימדיות ופתרו בתרגול דוגמא בעמ' (194)

5.4 גופים מורכבים וקרובים

כאשר עלינו למצוא מרכז גאומטרי של גוף הבנוי ממספר גופים רגולריים נוכל למצוא את מקום המרכז הגאומטרי של הגוף הכולל בעזרת המרכזים הגאומטריים של כל גוף וגוף ובעזרת משפט ורינון



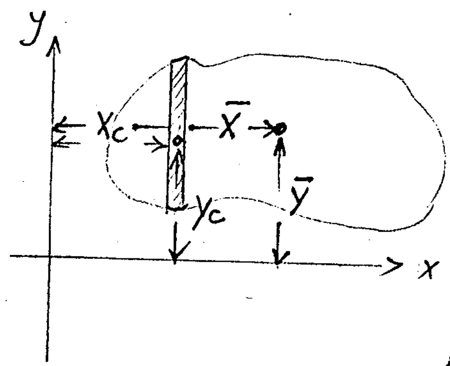
$$(m_1 + m_2 + m_3)\bar{X}_{CG} = m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3$$

m יכול להיות מסה, נפח, שטח, אורך בהתאם למקרה! ואם נסכם זאת נקבל בצורה הכללית:

$$\bar{X} = \frac{\sum m_i \bar{x}_i}{\sum m_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_i \bar{y}_i}{\sum m_i} \qquad \bar{z} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i} \qquad (5.7)$$

משוואות (5.7) קיימות גם עבור גוף נחליף את m בנפח V, שטח A ואורך L.
נציין ש"חורים" וכלים להלבה בחשבון ע"י הגדרת מסה, נפח, שטח או אורכים "כשליליים".

במצבים קיימים מצבים רבים בהם קשה למצוא מרכז גאומטרי לגוף, שטח או עקום לפי [illegible] ≡ שיטות נתונים להגדרה בצורה אנליטית. במקרה זה נשתמש במשוואות 5.7 כקירוב דיפרנציאלי [illegible] של משוואות 5.3 למשל השטח שבשרטוט:
נחלק למלבנים (מקורבים) מרכז הגאומטרי של כל מלבן ידוע (x_c, y_c) ולכן:



$$\bar{x} = \frac{\sum x_{c_i} A_i}{\sum A_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_{c_i} A_i}{\sum A_i}$$

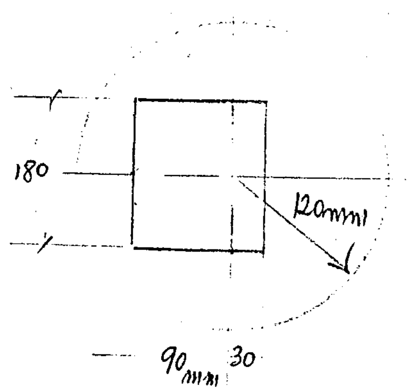
במידה ונחלק לרצועות באותו רוחב קבוע Δx
שגובה כל רצועה יהיה H_i נקבל נוסחאות בהן מבטלים Δx

$$\bar{x} = \frac{\sum x_{c_i} H_i}{\sum H_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_{c_i} H_i}{\sum H_i}$$

שיטה זו נשתמש גם לקווים וגם לנפחים.

<u>דוגמא:</u>

חשב את המרכז הגאומטרי של הצורה שבשרטוט



$\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{x_c \cdot A_{\text{מעגל}} - x_c \cdot A_{\text{מלבן}}}{A_{\text{מעגל}} - A_{\text{מלבן}}}$$

מעגל $x_c = 0$

מלבן $x_c = -30\,mm$

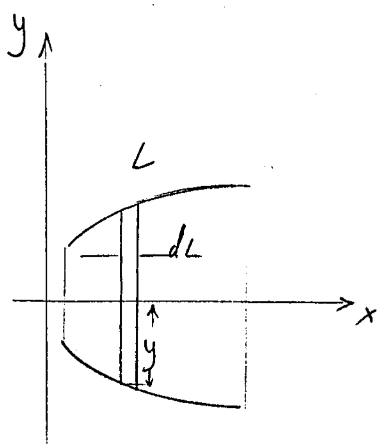
מעגל $A = \pi (120)^2$

מלבן $A = 120 \times 180$

$$\bar{x} = \frac{0 - (-30 \times 21600)}{120^2 \times \pi - 21600} = -$$

$$= + \frac{648000}{23638} = +27.41\,mm$$

5.5 משפטי פפוס Pappus (מאה ה-III לה"ס)



נתאר לנו עקום L המסובב סביב ציר שאינו נחתך עמו וכד'

מעטפת: שטח המעטפת הדיפרנציאלית

$$dA = 2\pi y\, dL$$

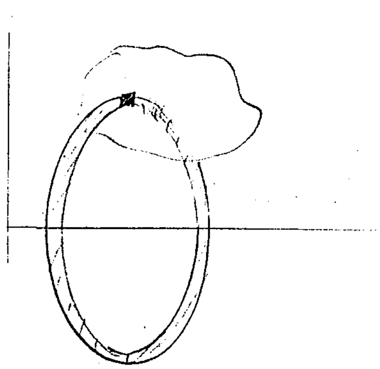
ולכן: $A = 2\pi \int y\, dL$

ואבל $\int y\, dL = \bar{y} L$

$$A = 2\pi \bar{y} L$$

כלומר שטח המעטפת שנוצרה עקב סבוב העקום שווה לשטח מעטפת גליל שארכו L ורדיוסו $\bar{y}$.

משפט הנפח



כאשר נקח שטח מוגדר ונסובבו סביב ציר ונוצר גוף נפחי

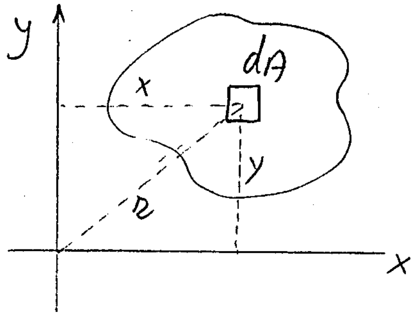
$$dV = 2\pi y\, dA$$

$$V = 2\pi \int y\, dA$$

$$V = 2\pi A \bar{y}$$

כלומר נפח הגוף שנוצר שווה לביטוי הנ"ל.

חלק ב' מומנטי אינרציה של חתכים.



5.6 <u>מבוא</u>

כאשר נתונה לנו צורה גאומטרית פני - מישור או חתך של גוף תלת-מימדי כמשורטט ואנו נדרשים מדי פעם לאינטגרלים שצורתם הכללית הוא:

$$\int_A y^n dA \; ; \; \int_A x^n dA \; ; \; \int_A r^n dA \qquad (1)$$

משפחה זאת ידועה כמשפחת מומנטי השטח מסדר n ומומנטי השטח הפולרי מסדר n. אינטגרלים אלו מופיעים הלוך ושוב עבור $n=0-2$.

<u>המקרה $n=0$</u>

במקרה זה מתקבלים שלושת האינטגרלים לאינטגרל:

$$A = \int dA \qquad (2)$$

המביע את שטח החתך.

<u>המקרה $n=1$</u>

במקרה זה מתקבלים אינטגרלים מהצורה:

$$\int x dA \; ; \; \int y dA \; ; \; \int r dA \qquad (3)$$

אינטגרל זה מכונה המומנט הראשון של השטח ($n=1$) והוא מופיע בביטוי המרכז הגאומטרי של החתך:

$$\bar{X} = \frac{\int x dA}{\int dA} \qquad \bar{Y} = \frac{\int y dA}{\int dA} \qquad (4)$$

$n=2$: מומנט האינרציה

במקרה זה מתקבלים האינטגרלים הבאים :

$$I_{xx} = \int y^2 dA \qquad (5)$$

$$I_{yy} = \int x^2 dA$$

המכונים מומנטי האינרציה של החתך סביב הצירים x ו- y בהתאמה.

וכן הביטוי

$$I_p = \int r^2 dA = J_{zz} \qquad (6)$$

מומנט האינרציה הפולרי של החתך שנפגשנו בתורת הפיתול.

* כיון ש x^2 ו y^2 הם תמיד חיוביים אזי מומנטי האינרציה של חתך הם תמיד חיוביים. (שלא כמו המומנט הראשון)

* $$J_{zz} = I_p = I_{xx} + I_{yy} \qquad (7)$$

שכן : $x^2+y^2=r^2$

* מומנט האינרציה כשאר המומנטים הוא גודל גיאומטרי בלבד ויחידותיו $[m^4]$

5.7 רדיוס האינרציה

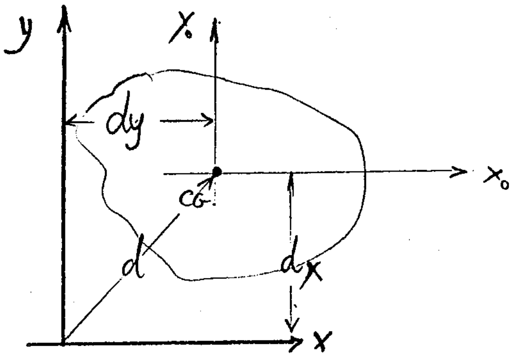
כדי לתאר את מידת "כמצות" שטח החתך או "פיזורו" נגדיר גודל הידוע כרדיוס האינרציה

$$I_{xx} = A K_x^2 \Rightarrow K_x = \sqrt{I_{xx}/A} \qquad (8)$$

$$I_{yy} = A K_y^2$$

העתקת צירים מקבילה

באם I_{xx} I_{yy} ו- J_{zz} חושבו במערכת צירים שראשיתה במרכז הגאומטרי (x_0, y_0) ובאם ברצוננו לחשבם ביחס למערכת xy המועתקת במקביל d_x ו- d_y נוכל להשתמש ולהוכיח את משפט שטיינר: למשל:



$$I_{xx} = \int y^2 dA = \int (y_0 + d_x)^2 dA =$$

$$= \underbrace{\int y_0^2 dA}_{I_{xx(0)}} + \underbrace{\cancel{2 d_y \int y_0 \, dA}}_{\text{מרכז כובד!}}^{0} + d_x^2 \int dA$$

$$I_{xx} = \bar{\bar{I}}_{xx(0)} + d_x^2 A = \bar{\bar{I}}_{xx} + d_x^2 A$$

$$I_{yy} = \bar{\bar{I}}_{yy(0)} + d_y^2 A = \bar{I}_{yy} + d_y^2 A$$

(d_x, d_y) הן קואורדינטות ראשית הצירים של המערכת השניה x_0, y_0 במערכת הצירים החדשה (x, y) לרבות הסימנים

כיון שביטויים אלו לינאריים ב-A ניתן להחיל המשפט גם על רדיוסי הגירציה

$$k_x^2 = k_{x(0)}^2 + d_x^2$$

הערות חשובות

א. בהעתקה מקבילה יש תמיד להתחיל ממערכת צירים העוברת במרכז הכובד דבר המבטיח את התאפסות האינטגרל דלעיל. לכן במעבר בין שתי מערכות צירים סתמיות יש לבצע אותו בהעתקה של ביניים: ממערכת א' למערכת שראשיתה ב-CG ומכאן למערכת ב'.

מומנטי האינרציה של חתכים שונים - דוגמאות

מומנט האינרציה של חתך הקורה סביב מרכז הכובד הינה תכונה גאומטרית של החתך. נעסוק כעת בדרך לחישובו של I. כיון ש-I מוגדר סביב מרכז הכובד של החתך אזי השלב הראשון בפתרון הנו מציאת מרכז הכובד. כיון שהונח שהחתך סימטרי ביחס לציר ה-y אזי $\bar{x}\equiv 0$ ו-$\bar{y}$ נתון ע"י

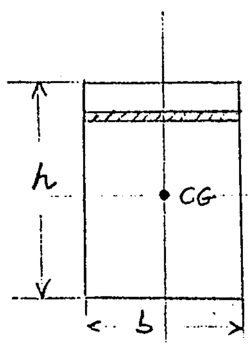
$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{\int dA}$$

כעת ניתן לחשב את מומנט האינרציה I_{zz} ע"י

$$I_{zz}=\int_A y^2\,dA$$

כש: y נמדד מ C.G.

דוגמא א

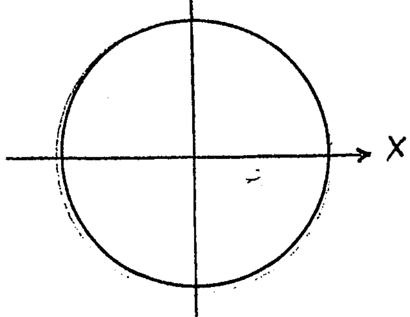


$$I_{zz}=\int_A y^2 dA=\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-h/2}^{h/2} y^2\,dA$$

$$dA=b\,dy$$

$$I_{zz}=\int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy=b\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy=\frac{bh^3}{12}$$

דוגמא ב



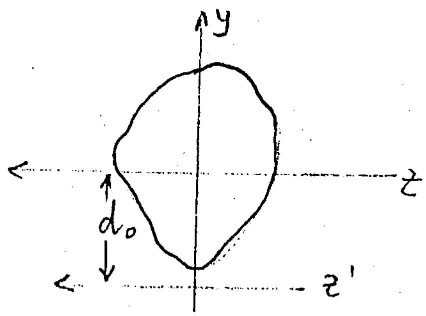
$$I=\iint y^2 dA$$

$$y=r\sin\theta \qquad dA=r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int^{2\pi}\int^{R} r^2\sin^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta=\int^{2\pi}\int^{R}(r^3dr)\sin^2\theta\,d\theta=$$

$$I_{zz} = \int_0^R r^3 dr \cdot \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

לעתים קרובות כפי שנראה בהמשך אנו מעוניינים לחשב את I_{zz} ביחס לציר אחר שאינו עובר דרך מרכז הכובד. לשם כך נוכל להשתמש במשפט שטיינר:



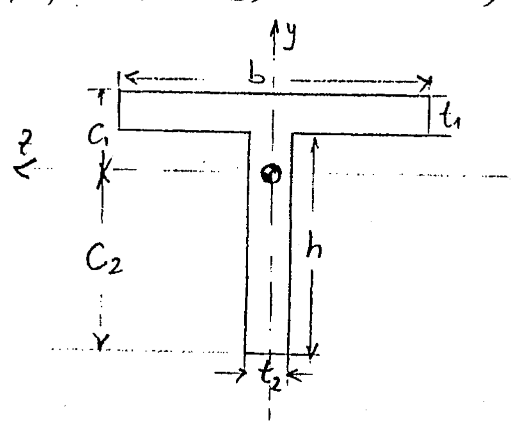
$$I_z' = \int (y + d_0)^2 dA =$$

$$\int y^2 dA + \int d_0^2 dA + 2d_0 \underbrace{\int y dA}_{0} =$$

$$I_z' = A d_0^2 + I_z$$

כלומר מומנט האינרציה סביב ציר הנמצא במרחק d_0 ממרכז הכובד שווה למומנט האינרציה סביב ציר העובר דרך מרכז הכובד + שטח החתך × d_0^2.

למשפט זה יישום רב בחישובי מומנטי אינרציה של חתכים מורכבים



<u>דוגמא א</u>

חשב את מומנט האינרציה I_{zz} של חתך T

<u>שלב א:</u> קביעת מרכז הכובד.

$$\bar{y}(bt_1 + ht_2) = ht_2 \cdot \frac{h}{2} + bt_1\left(h + \frac{t_1}{2}\right)$$

$$\bar{y} = \frac{h^2 t_2 + bt_1(2h + t_1)}{2(bt_1 + ht^2)} = C_2$$

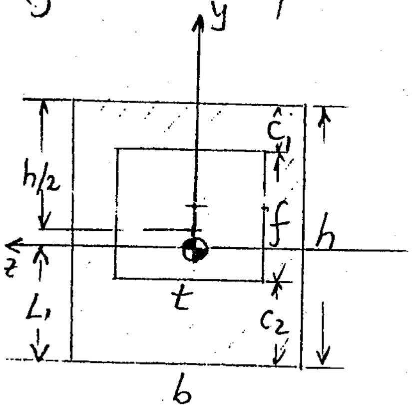
<u>שלב ב:</u> תרומת המלבן האופקי ל- I_{zz}

$$\frac{bt_1^3}{12} + bt_1\left(c_1 - \frac{t_1}{2}\right)^2$$

תרומת המלבן האנכי $\dfrac{t_2h^3}{12} + t_2 h \left(c_2 - \dfrac{h}{2}\right)^2$

וסה"כ $I_{zz} = \dfrac{1}{12}\left[b t_1^3 + t_2 h^3\right] + b t_1 \left(c_1 - \dfrac{t_1}{2}\right)^2 + t_2 h \left(c_2 - \dfrac{h}{2}\right)^2$

ניתן לחשב בקצרה ע"י החסרת המלבנים משמאל ומימין (לבדיקת מסובך)



__דוגמא ב__

$$\bar{y} = bh\cdot\frac{h}{2} - tf\left(c_2 + \frac{f}{2}\right)$$

נחשב I_{zz} של מלבן בלי חור סביב מרכז הכובד של G הצורה:

$$I_{zz}^{(1)} \quad \frac{bh^3}{12} + bh\cdot\left(\frac{h}{2} - L_1\right)^2$$

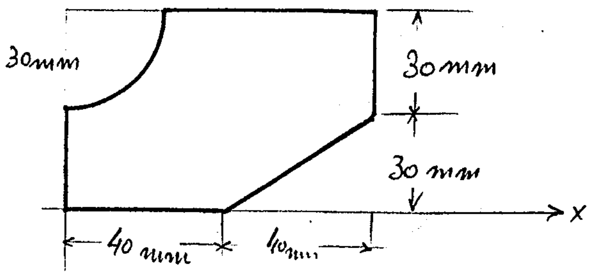
נחשב I_{zz} של "החור" סביב מרכז הכובד של הצורה:

$$I_{zz}^{(2)} = \frac{tf^3}{12} + t\cdot f\cdot\left(h - c_1 - f/2 - L_1\right)^2$$

וסה"כ $I_{zz} = I_{zz}^{(1)} \underset{\text{חור}}{\ominus} I_{zz}^{(2)}$

5.9 מומנטי אינרציה של חתכים מרכבים

השטח במקרה זה צריך לצאת בה השתמשנו למרכז
כובד. אם כן חור יחשב כשטח שלילי (נפחים צריך)
בדוגמא A/7 עמ' 480 ב Merriam



יש לחשב I_{xx} ו K_x עבור
הצורה הנתונה (שטופלה למקרה
הצורך)

* עבור המלבן המלא:
סביב בסיסו (ציר x)

$$I_{xx}=\frac{1}{3}Ah^2=\frac{1}{3}\,80\times60\times(60)^2=5.76\times10^6\ mm^4$$

* עבור החור העגול:

סביב בסיס x'

$$I_{x'}=-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right)=-0.159\times10^6\ mm^4$$

לכן סביב מרכז כובד
$d=\frac{4r}{3\pi}=12.73\ mm$

$$I_o=I_{x'}-Ad^2=-0.159\times10^6-\left(-\frac{\pi(30)^2}{4}\right)12.73^2=-0.0445\times10^6\ mm^4$$

וסביב ציר x

$$I_x=I_o+d_1^2=-0.0445(10^6)+\left[-\frac{\pi(30)^2}{4}\right]\cdot(60-12.73)^2$$

$$I_x=-1.624\times10^6\ mm^4$$

* עבור המשולש סביב בסיסו

$$I_x=-\frac{1}{12}bh^3=-0.09\times10^6\ mm^4$$

סה"כ מומנט האינרציה

$$I_x=(5.76-1.624-0.09)\times10^6$$

$$I_x=4.046\times10^6\ mm^4$$

השטח נתון

$$A=60\times80-\frac{1}{4}\pi(30)^2-\frac{1}{2}(40)(30)=3493\ mm^2$$

ורדיוס האינרציה יהיה

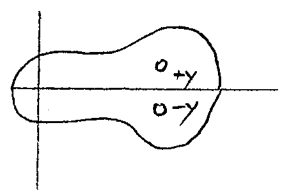
$$k_x=\sqrt{I_x/A}=34.0\ mm$$

5.10. סבוב מערכת הצירים ומומנט האינרציה המעורב.

כאשר עוסקים בחתכים לא סימטריים או כאשר מסובבים את מערכת הצירים ביחס לחתך סימטרי מופיע הביטוי

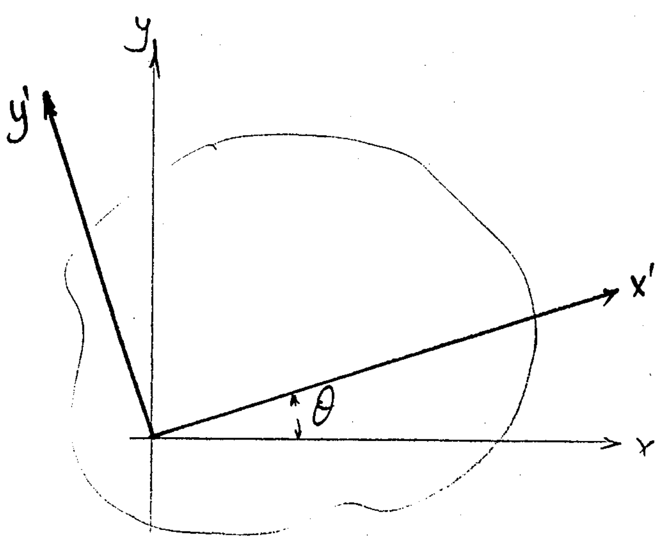
$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

המכונה מומנט האינרציה המעורב*. גודל זה יכול להיות חיובי או שלילי. באם הציר סביבו מחושב I_{xy} הוא ציר סימטריה של החתך מתאפס האינטגרל



באם תועתק מערכת הצירים במקביל לעצמה יהיה משפט שטיינר.

$$I_{xy} = I_{xy}^{0} + d_x d_y A$$



5.10.1 סבוב מערכת הצירים.

נניח כי נתונים לנו: I_{xx} , I_{yy} ו- I_{xy} במערכת (x,y) ובראשיתו. למעבר במערכת הצירים (x',y') המסובבת ב θ ביחס למערכת המקורית נקבל:

$$I_{x'x'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA =$$

$$\int y^2\cos^2\theta \, dA + \int x^2\sin^2\theta - \int 2xy\sin\theta\cos\theta$$

$$I_{x'x'} = I_{xx}\cos^2\theta + I_{yy}\sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

ובדומה: $^{*}I_{y'y'} = I_{xx}\sin^2\theta + I_{yy}\cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$

$$I_{x'y'} = \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

כעת ניתן לחפש ערכי אקסטרמום עבור I_{xx} ו- I_{yy} כתלות ב-θ חיפוש זה מביא לתוצאות הבאות

$$I_{max} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xx}-I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_{xx}-I_{yy})^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$tag\, 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_{yy}-I_{xx}}$$

ניתן לקבל ישירות את α_{max} ו- α_{min} הנבדלים בדיוק ב-π מהביטוי:

$$tg\,\alpha_{max} = -\frac{I_{max}-I_{xx}}{I_{xy}} = \frac{I_{xx}-I_{max}}{I_{xy}}$$

הצבת זוית חזרה לביטוי $I_{x'y'}$ יתן 0 במערכת בה $I_{x'x'}$ ו- $I_{y'y'}$ הם ערכי האקסטרמום המומנט המעורב מתאפס!

---

* ניתן לרשום זאת גם כך:

$$I_{x'x'} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'y'} = \frac{I_{xx}+I_{yy}}{2} - \frac{I_{xx}-I_{yy}}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

נספח: הוכחת המקסימום והמינימום של I_{ij}

ניתן לרשום את $I_{x'x'}$ כך:

$$I_{x'x'} = \frac{I_x+I_y}{2} + \frac{I_x-I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

למציאת המקסימום

$$\frac{dI_{x'x'}}{d\theta}=0 \Rightarrow (I_y-I_x)\sin 2\theta - 2I_{xy}\cos 2\theta = 0$$

והפתרון למשוואה

$$tg\, 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}$$

הצבת 2α בביטויי $I_{x'y'}$ $I_{x'x'}$ ו- $I_{y'y'}$ נותן את I_{max} ו- I_{min}

פתרון α ישירות

נצא ממערכת ראשית y,x ונסתובב ב $-\alpha$ ← קבלת פתרון במערכת y',x' כמו כן נניח שבמערכת הראשית $I_{xx}=I_{max}$ ולכן $I_{yy}=I_{min}$:

$$I_{x'x'} = \frac{I_{max}+I_{min}}{2} + \frac{I_{max}-I_{min}}{2}\cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{2}I_{max}(1+\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}I_{min}(1-\cos 2\alpha)$$

$$I_{x'x'} = I_{max}\cos^2\alpha + I_{min}\sin^2\alpha$$

וכן:

$$I_{y'y'} = I_{max}\sin^2\alpha + I_{min}\cos^2\alpha$$

$$I_{x'y'} = -\frac{I_{max}-I_{min}}{2}\sin 2\alpha = -(I_{max}-I_{min})\sin\alpha\cos\alpha$$

$$I_{x'x'} = I_{max}(1-\sin^2\alpha) + I_{min}\sin^2\alpha = I_{max} - (I_{max}-I_{min})\sin^2\alpha$$

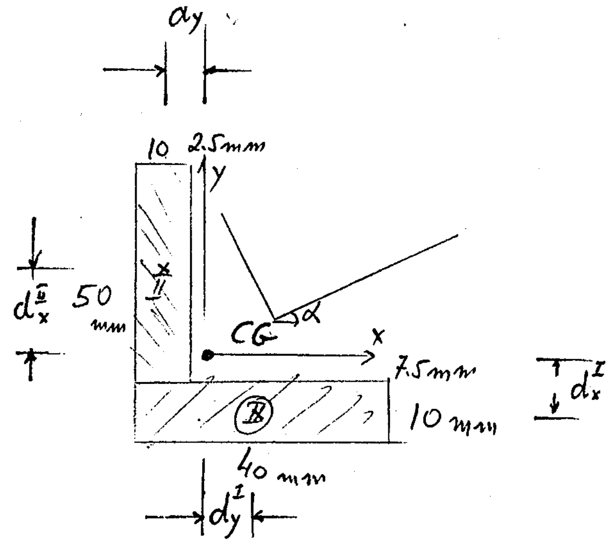
$$I_{x'x'} - I_{max} = -(I_{max}-I_{min})\sin^2\alpha$$

נחלק שני האגפים ב $I_{x'y'}$

$$\frac{I_{x'x'}-I_{max}}{I_{x'y'}} = \frac{-(I_{max}-I_{min})\sin^2\alpha}{-(I_{max}-I_{min})\sin\alpha\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha = \frac{I_{x'x'}-I_{max}}{I_{x'y'}} = \frac{I_{xy}-I_{max}}{I_{xy}}$$

כאשר y,x מערכת לא ראשית.



תרגיל מספר 4/11 ע"מ 489 מריאם

נחשב את כיווני הצירים הראשיים
עבור פרופיל L כמשורטט וכן
את I_{max} ו- I_{min} עבור.

נתון מקום המרכז הגיאומטרי:
נחלק הפרופיל לשני מלבנים ונחשב:

א. עבור מלבן I

$$I_{xx} = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + 400\cdot(12.5)^2 = 6.583\times10^4\ mm^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(10)(40)^3 + 400\,(7.5)^2 = 7.583\times10^4\ mm^4$$

$d_x = -12.5\ mm$

$d_y = +7.5\ mm$

$$I_{xy} = \cancel{(I_{xy})}_{CG}^{\,0} + d_x d_y A = 0 + (-12.5)(7.5)(400) = -3.75\times10^4\ mm^4$$

ב. עבור מלבן II

$$I_{xx} = \frac{1}{12}(10)(40)^3 + 400\,(12.5)^2 = 11.583\times10^4\ mm^4$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}(40)(10)^3 + 400\,(-7.5)^2 = 2.583\times10^4\ mm^4$$

$d_x = +12.5\ mm$

$d_y = -7.5\ mm$

$$I_{xy} = \cancel{(I_{xy})}_0 + d_x d_y A = 0 + (12.5)(-7.5)\,400 = -3.75\times10^4\ mm^4$$

לסכום

$$I_{xx} = (6.583 + 11.583)10^4 = 18.167\times10^4\ mm^4$$

$$I_{yy} = (7.583 + 2.583)10^4 = 10.167\times10^4\ mm^4$$

$$I_{xy} = (-3.75 - 3.75)10^4 = -7.5\times10^4\ mm^4$$

מסקנה x,y אינם צירים ראשיים.

חישוב α למערכת הראשית:

$$I_{\substack{max\\min}} = \left[\frac{18.167+10.167}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{18.167-10.167}{2}\right)^2 + 7.5^2} \right] \times 10^4$$

$$I_{max} = 22.67 \times 10^4 \ mm^4$$

$$I_{min} = 5.67 \times 10^4 \ mm^4$$

$$\alpha = tg^{-1} \frac{I_{max} - I_{xx}}{I_{xy}} = tg^{-1} \frac{22.67-18.167}{-7.5} =$$

$$\alpha = +30.98^\circ$$

פרק 6 כוחות צירים כוחות גזירה ומומנטי כפיפה

6.1 מבוא

בפרקים הקודמים עסקנו במבנים העומדים להעמסה צירית ולפתיל. ברור שאין שני אלו סוגי העמסה היחידים הקיימים.
במבנים רבים מופעלים כוחות בניצב לצירם של אלמנטים. לאלמנט מסוג כזה אנו קוראים קורה (דוגמאות חלקי המכונה או המסגרת שהכרנו בסטטיקה). קורות הן חלק המבנה הנפוץ ביותר בבניינים במטוסים ובמכונות. מטרת הפרק שלפנינו: להסביר את שינויי הכוחות הפועלים על פני חתכיהן של קורות.

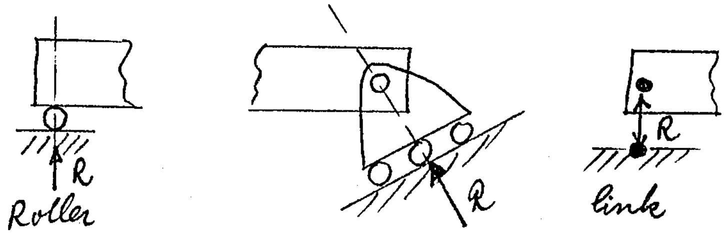
* ישנן קורות ישרות ועקומות. אנו נתרכז בפרק זה בקורות ישרות בלבד. כמו כן נניח בפרק זה כי כל הכוחות הפועלים
* על הקורה נמצאים במישור אחד - קורה מישורית. כמו כן נעסוק
* רק בקורות מסוימות סטטית בהן מס' נעלמי הריאקציות קטן או שווה ל - 3.

6.2 סוגי סמכים לקורות

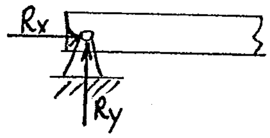
בזמן שבתכנון של קורות אנו משרטטים שרטוטים סימבוליים ויש צורך להגיע להסכם סימונים בקשר לסוגיהם של סמכים. אנו מכירים שתי משפחות סמכים: סמכים פשוטים שאינם נושאים מומנטים וסמכים רתומים. בין הסמכים הפשוטים שני סוגים:

א. סמך מחליק המעביר ריאקציה בכיוון אחד בלבד

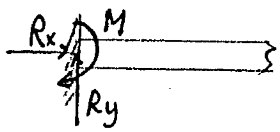
למשל:



ב. סמך פשוט המעביר שתי ריאקציות בדומה לפין :



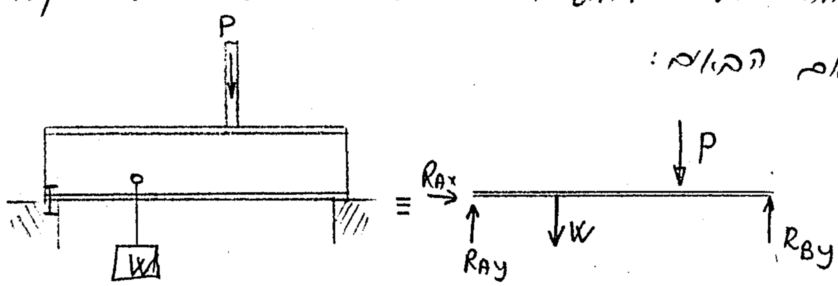
לסמך רתום סוג אחד בלבד המעביר שתי ריאקציות ומומנט



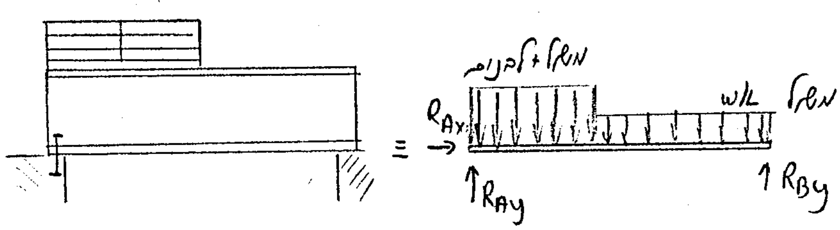
6.3 סוגי עומסים על קורות

מבחינה סכמטית ימרו כל העומסים הפועלים על קורה לאחד משלושת הסוגים הבאים:

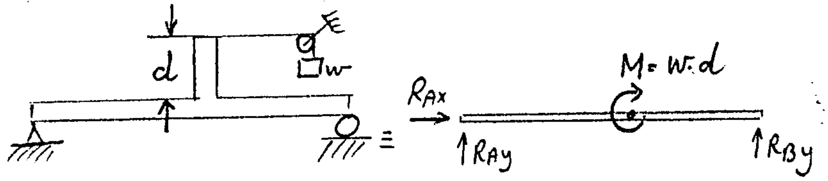
א. עומס מרוכז:



ב. עומס מחולק:

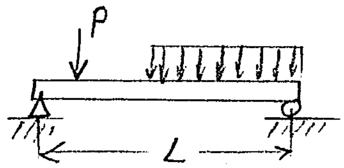


ג. מומנט מרוכז

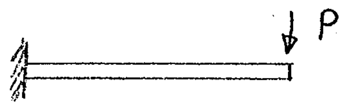


6.4 סוגי קורות

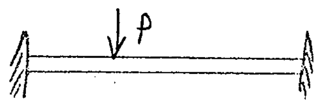
* ישנם שמות שונים לסוגי קורות רובן ע"פ הסמכים עליהן נסמכות הקורות:



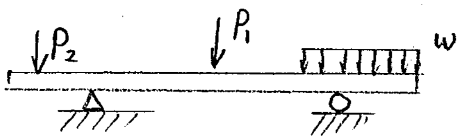
א. קורה פשוטה Simple Sup.



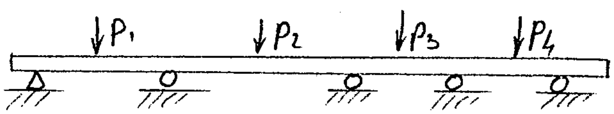
ב. קורת זיז Cantilever



ג. קורה רתומה Fixed



ד. קורה תלויה Overhanging



ה. קורה נמשכת

* לקורה נמשכת <u>מספר מפתחים</u> (Span)

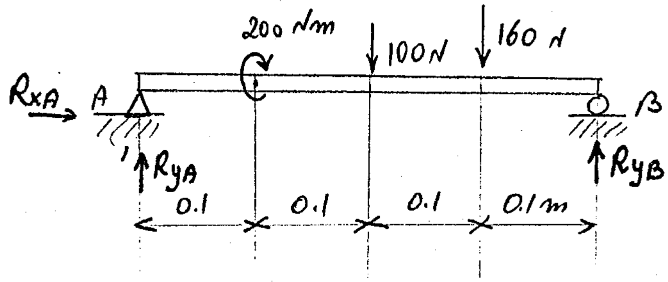
* שיטה שונה לסווג כלל הקורות היא ע"פ ההבחנה בין קורות מסוימות לקורות בלתי מסוימות סטטית

6.5 חישוב התגובות בקורות

בכל מבנה מסוים סטטית השלב הראשון בפתרון הוא חישוב התגובות. כיון שהנחנו שמערכות הכוחות שלנו מישוריות עומדות לרשותנו שלוש משוואות שווי המשקל במישור. במהלך חישוב התגובות נניח כי הדפורמציות שעוברת הקורה הן כה קטנות עד כי אין הן משפיעות על הגיאומטריה הבלתי מעוותת של הקורה.

דוגמא (4-2 עמ' 98)

בהזנחת משקלה העצמי של הקורה שבשרטוט חשב את התגובות



א. נחשב מומנטים סביב A

$$R_{yB}\cdot 0.4 - 160\times 0.3 - 100\times 0.2 - 200 = 0$$

$$R_{yB} = 670 \ N$$

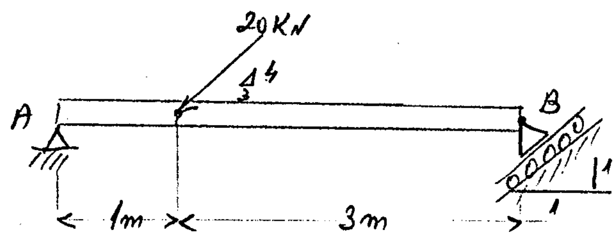
$\Sigma F_y = 0$ $\quad R_{yA} + R_{yB} - 100 - 160 = 0 \Rightarrow R_{yA} = -410$

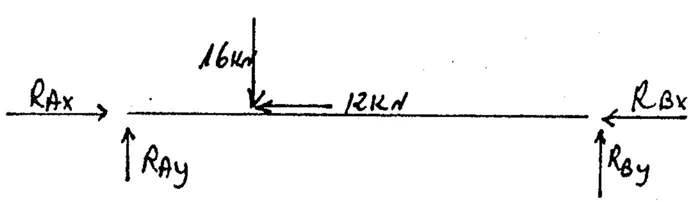
$\Sigma F_x = 0$ $\quad R_{Ax} = 0$

דוגמא ב' (4-3 עמ' 100)

בהזנחת משקלה העצמי של הקורה חשב את תגובותיה

עשה דג"ח





$R_{Bx} \equiv R_{By}$

מומנטים סביב A

$\Sigma M_A = 0$ $\quad R_{By}\cdot 4 - 16\times 1 = 0$ $\quad R_{By} = 4\ KN$ $\quad R_{Bx} = 4\ KN$

$\Sigma F_y = 0$ $\quad R_{Ay} + R_{By} - 16 = 0$ $\quad R_{Ay} = 12\ KN$

$\Sigma F_x = 0$ $\quad R_{Ax} - R_{Bx} - 12 = 0$ $\quad R_{Ax} = 16\ KN \rightarrow$

6.6 יישום שיטת החתכים

מטרתנו העיקרית של הפרק שלפנינו להגדיר את שקולי הכוחות והמומנט הפועלים בכל חתך וחתך של קורה נתונה. כדי לבצע זאת נשתמש בשיטת החתכים כשנבצע אינספור חתכים בכדי לקבל את פילוג השקולים הנ"ל לאורך הקורה. נדגים זאת בעזרת שקף 10.1. עלינו לזכור שכדי לקבוע את ערכם הכמותי של השקולים עומדות לרשותנו שלוש משוואות שיווי המשקל שבמישור. בכלל פועלים בחתכה של קורה שלושה שקולים:

א. כח בכיוון הציר של הקורה - כח צירי N

ב. כח בניצב לציר הקורה - גזירה V

ג. מומנט במישור הקורה - מומנט הכפיפה M.

6.7 גזירה בקורות

נחזור ונסתכל בשקף 6.1 ברור שבכדי לשמור על קטע הקורה השמאלי בש.משקל יש צורך בכח אנכי V שיפעל על החתך. כח זה המכונה כח הגזירה שווה בערכו לסכום כל הכוחות החיצוניים הפועלים על קטע הקורה וסימנו כמובן הפוך ($\Sigma F_y = 0$). ניתן כמובן לחשב את V מהקטע הימני של הקורה ערכו יהיה שווה וסימנו כמובן הפוך.

בהקשר זה יש צורך בקביעת הסכם לסימון של V. את ההסכם הנ"ל נדגים בשקף 6.2. נגדיר ציר x אז לכל חתך יש נורמל שסימנו + או - כאשר סימן הכח

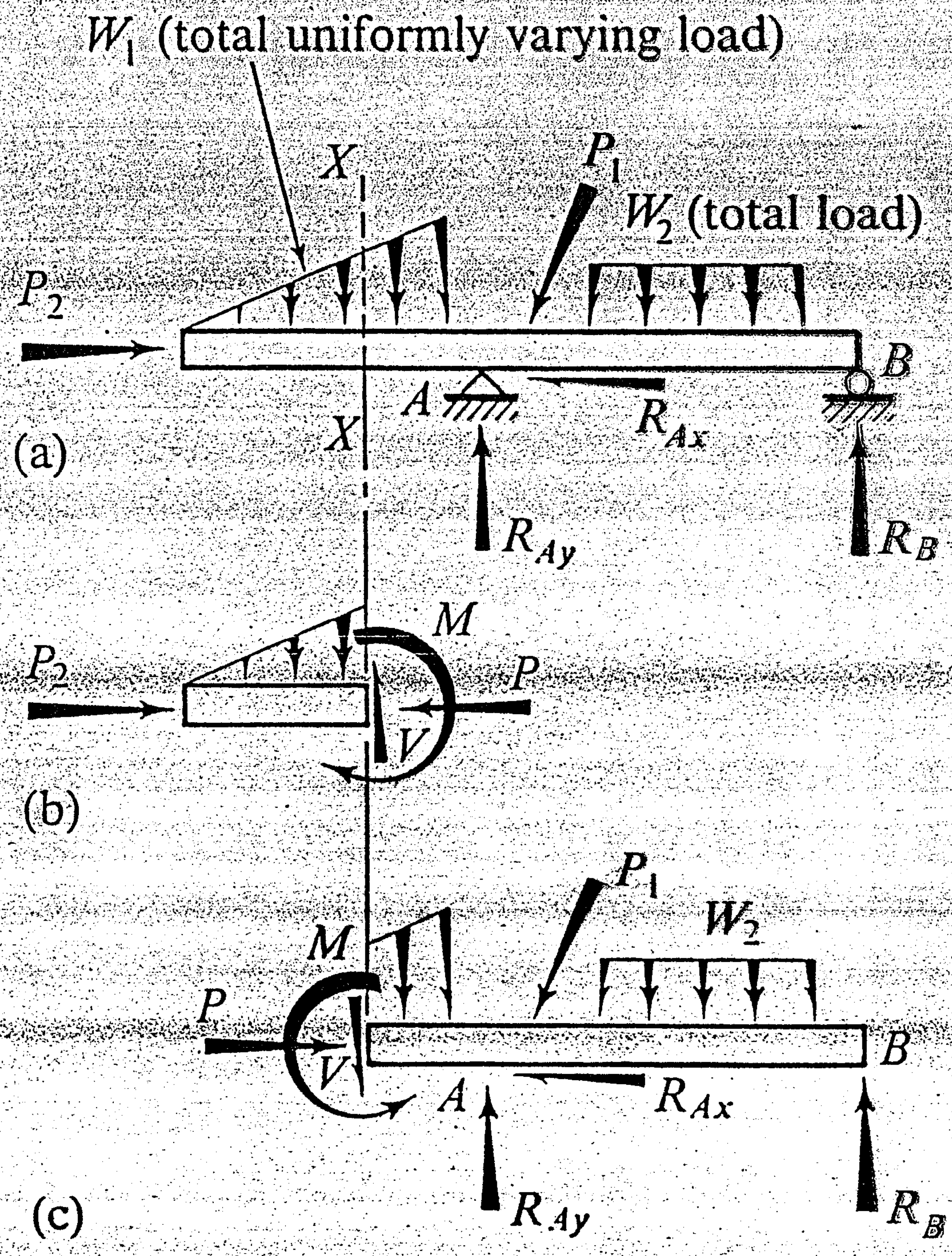


Fig. 4-14. An application of the method of sections to a statically determinate beam.

בקטע משמאל ל- A :

$N(x) = P_2$ $\qquad M(x) = \left(\frac{q_x x}{2}\right) \cdot \frac{x}{3}$

$V(x) = -\frac{q_x x}{2}$

שקף 10.2 הסכם הסימנים ל- V ו- M

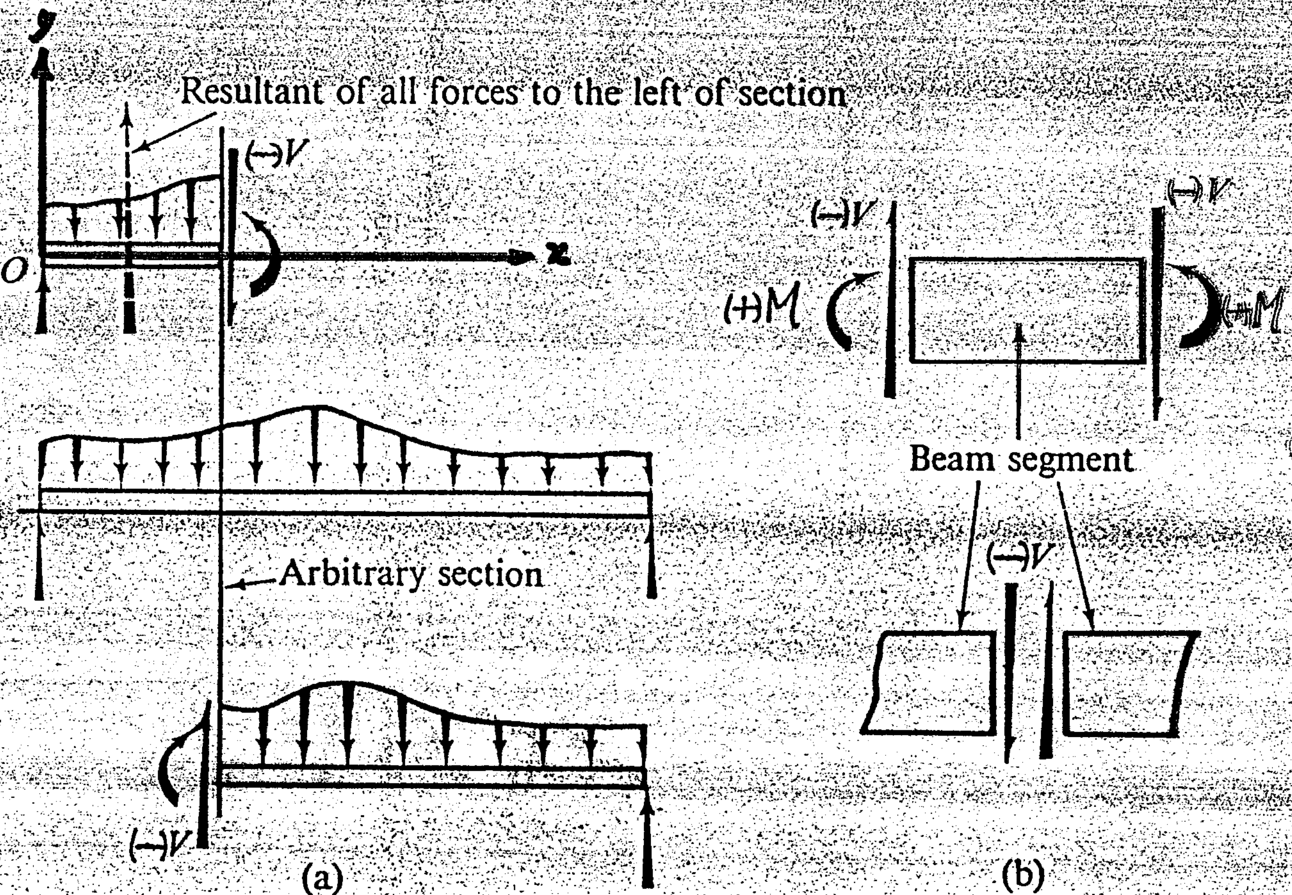
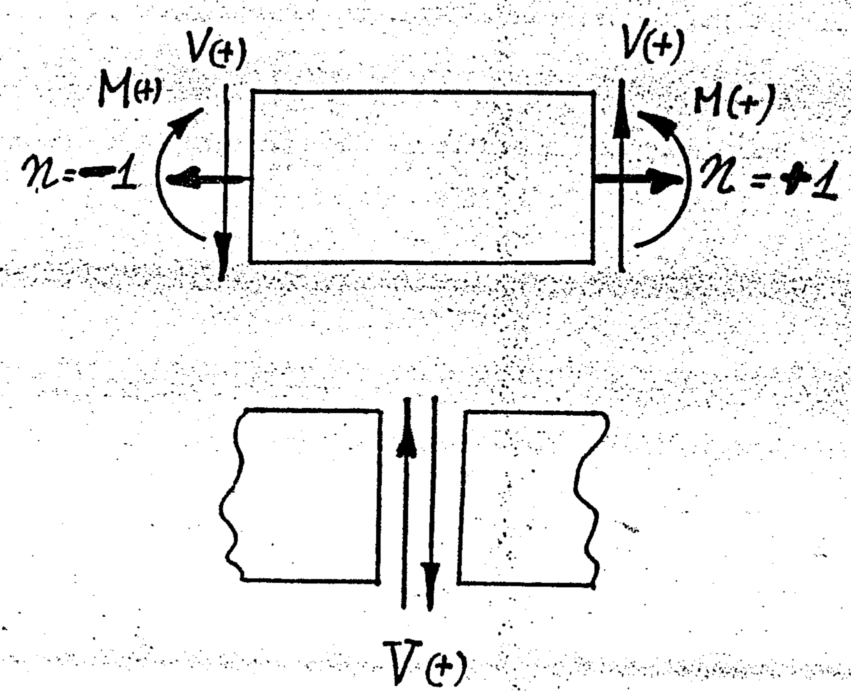


Fig. 4-15. Definition of positive shear.



מתלכד עם סימן המישור כח הגזירה חיובי.

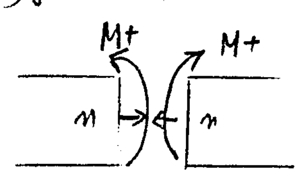
6.8 כוח צירי בקורה

נסתכל שוב בשרטוט 10.3 ונראה כי לאיזון כל חלק של הקורה יש צורך במקרה הכללי בכח צירי $P=N$. כח זה יכול לגרום מתיחה או לחיצה. מתיחה (+) לחיצה (-) או לחילופין הסימן חיובי כאשר סימן הכח מתלכד עם סימן שטח החתך. יש לזכור כי הכח הצירי פועל במרכז הגיאומטרי של החתך כך שלא תיווצר כפיפה

6.9 מומנט הכפיפה בקורה

כדי לקיים שווי משקל של קטע קורה נדרש כי יפעל בחתך מומנט כפיפה שיחד עם המומנט החיצוני יקיימו $\sum \vec{M}_z=0$.
למומנט זה קוראים מומנט הכפיפה שכן הוא מכופף את הקורה במישור.
בחשוב המומנט יש להתחשב גם ב V ו- M. בדרך כלל נחשב את המומנטים סביב המרכז הגיאומטרי של החתך הנדון הם יתרונות

גם למומנט יש לאמץ הסכם סימנים והוא זהה לזה שכבר דובר בו



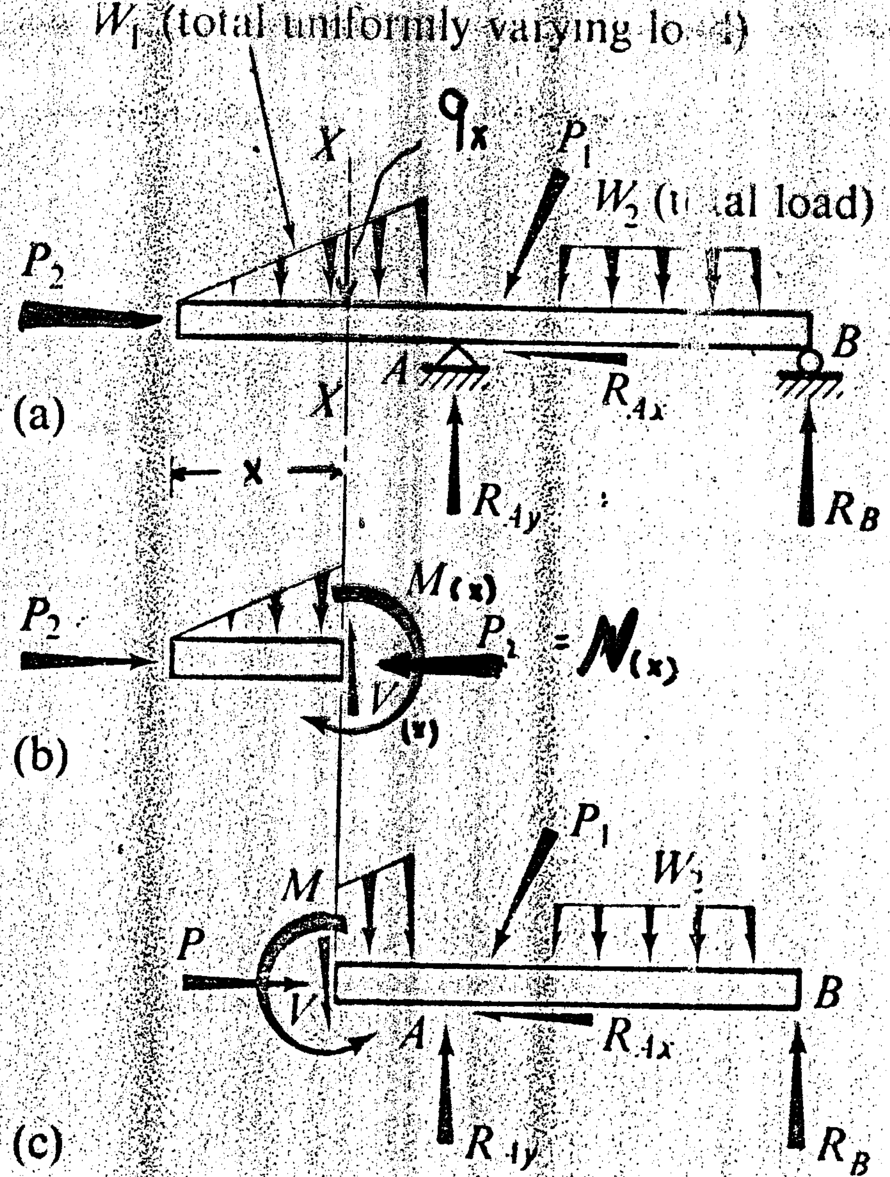
ישנו הסכם שווה לו האומר שמומנט המקצר סיבים עליונים של הקורה ומאריך את הסיבים התחתונים (חוק החיוך) ייחשב כחיובי.
נסכם את הסכם הסימנים בשרטוט הבא:

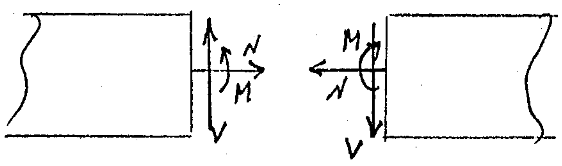
סעיף 10.3 כוח ציר.

$$N_{(x)} = P_2$$

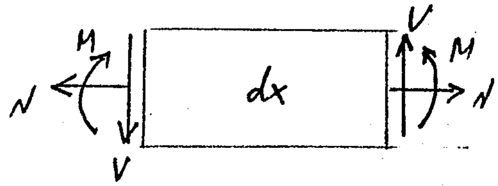
$$V_{(x)} = \frac{q_x X}{2}$$

$$M_{(x)} = \left(\frac{q_x X}{2}\right) \cdot \frac{X}{3}$$





כולם חיוביים



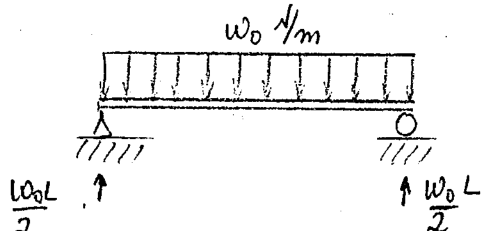
חיוביים

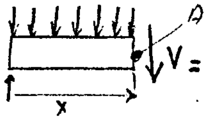
6.10 דיאגרמות N, V ו- M

בעזרת שיטת החתכים הרציפים ובעזרת הסכם הסימנים ניתן לקבוע את מהלכי N, V ו- M לאורכה של קורה. לשם המחשה ושימוש בהמשך נהוג לשרטט מהלכים אלו בדיאגרמות המכונות דיאגרמות המאמץ, הכח הגזר והמומנטים. לדיאגרמות אלו חשיבות בקביעת יכולת הנשיאה של הקורה הנתונה.

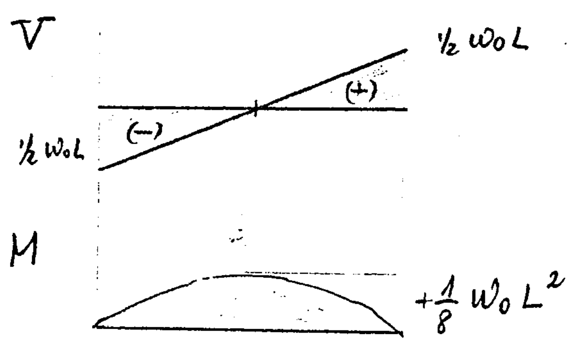
נדגים את הבנין של הדיאגרמות בעזרת הדוגמא שבשקף זה.

דוגמא ב

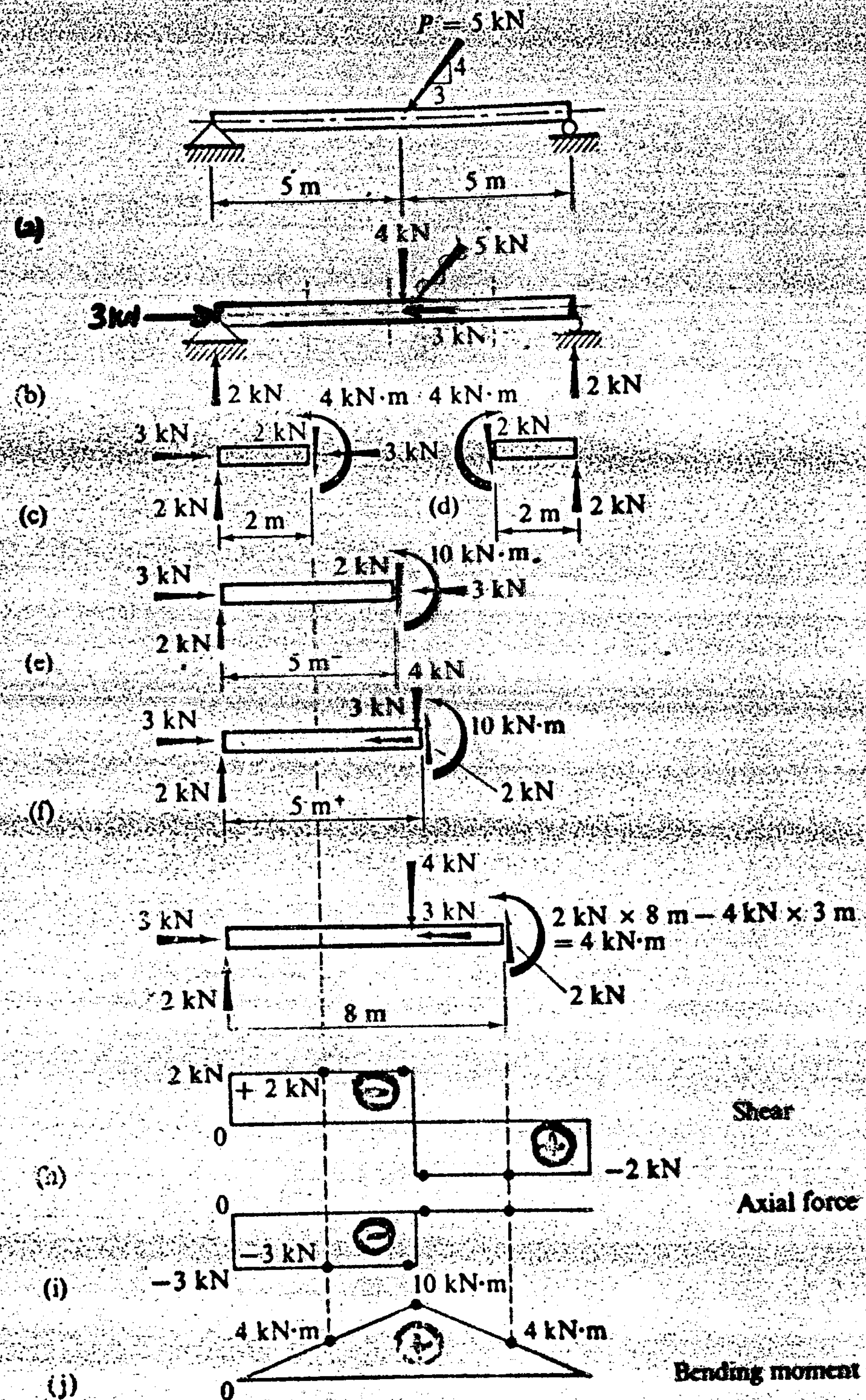




$V=\left(\frac{w_0L}{2}-w_0x\right)$ $M=\frac{w_0L}{2}\cdot x-w_0x\cdot\frac{x}{2} \Leftarrow \Sigma M_A=0 \Rightarrow M+w_0x\frac{x}{2}-\frac{w_0L}{2}x=0$



קביעת מהלכי N, V, M
בקורה עמוסה ע"י כוח בודד



6.11 שלבי הפתרון - האלגוריתם

א. שרטט דג"ח ברורה לגבול כל המערכת של הקורה.

ב. סמן את כל הריאקציות הבלתי ידועות. זכור:

במחליק - נעלם אחד

בסמך פשוט - שניים

ברתום - שלושה.

ג. פרק את כל הכוחות לרכיבים קרטזים. (במערכת צירי הקורה!)

ד. חשב את הריאקציות ממשוואות שווי המשקל החיצון.

ה. בצע חתך ניצב לכל שהו של הקורה ובודד כל הכוחות הפועלים על חלק זה של הקורה.

ו. רשום את כל הכוחות על חלק הקורה.

ז. רשום N, V ו-M על החתך

ח. חשב את N, V ו- M משווי משקל חלק הקורה.

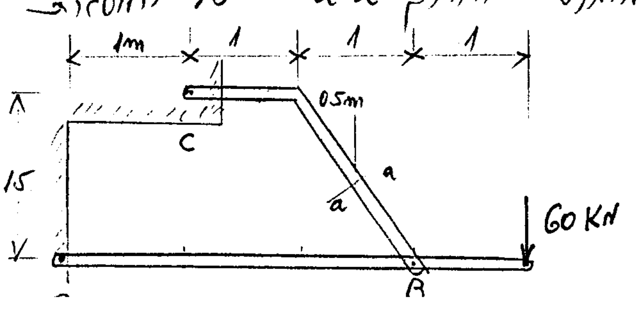
ט.- חזור על ה-ח עבור כל החתכים הנדרשים.

י. קבע את סימנם של N, V ו- M בכל חתך על פי ההסכם

יא. צייר מהלך N, V ו- M לאורך הקורה.

דוגמא מסכמת (ת' 4-24)

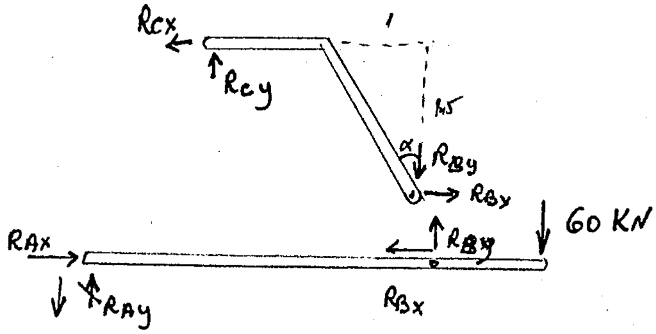
קבע את הגזירה הכח הצירי והמומנט בחתך a-a של המסגרת הבאה:



.נבדק מסוימות סטטית

מוטות $2\times3 = 3\times2$ פרקים

נפרק המוטות



מוט A-B

$\Sigma M_A = 0 \qquad -60\times4 + R_{Bx}\cdot3 = 0 \qquad R_{By} = 80\ KN$

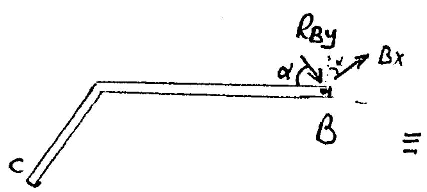
$\Sigma M_B = 0 \qquad -R_{Ay}\cdot3 - 60\cdot1 = 0 \qquad R_{Ay} = -20\ KN$

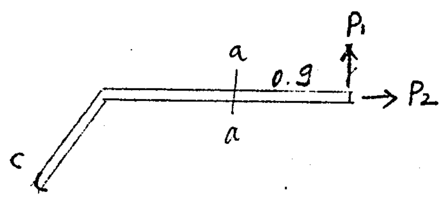
מוט BC

$\Sigma M_C = 0 \qquad R_{Bx}\cdot1.5 - R_{By}\cdot2 = 0 \qquad R_{Bx} = \dfrac{80\times2}{1.5} = 106.66$

$R_{Ax} = 106.66\ ;\ R_{cx} = 106.66\ ;\ R_{cy} = 80$

נשרטט את BC





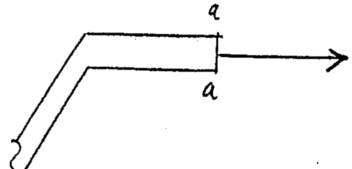
$P_1 = -R_{By}\cdot\sin\alpha + R_{Bx}\cos\alpha$

$P_2 = R_{By}\cos\alpha + R_{Bx}\sin\alpha$

$tg\,\alpha = \dfrac{1}{1.5} = 0.666 \qquad \alpha = 33.7^\circ$

$P_1 = -80\sin\alpha + 106.66\cos\alpha = 44.35\ KN$

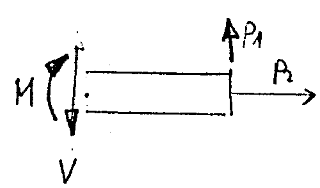
$P_2 = 80\cos\alpha + 106.66\sin\alpha = 125.74\ KN$



לכן בחתך a-a

$V = +P_1 = \oplus 44.35\ KN$

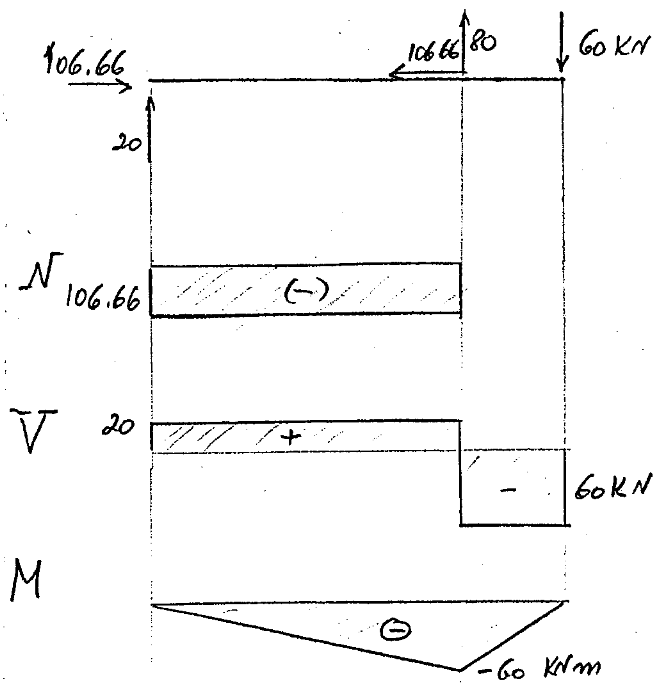
$M = P_1\times0.9 = 39.91\ KN$



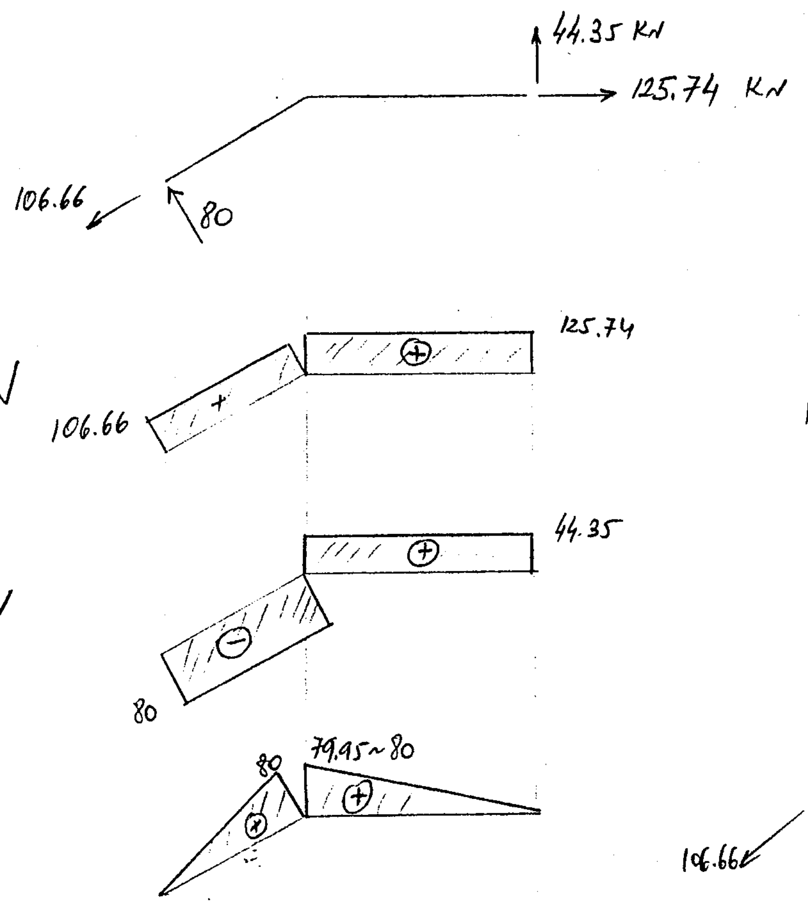
חלק ב'

יש לשרטט את פלוגי M,V,N בשתי הקורות

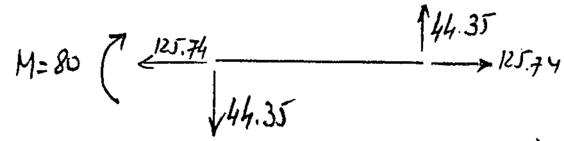
קורה א'

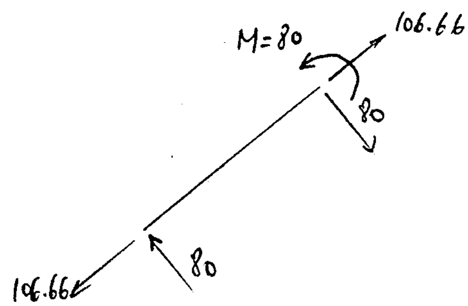


קורה ב'

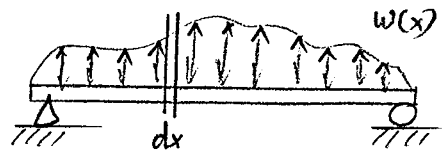


ניתן להסתכל על הבעיה ע"י
חתוך הקורה ב"ברך" וקבלת
שתי קורות:



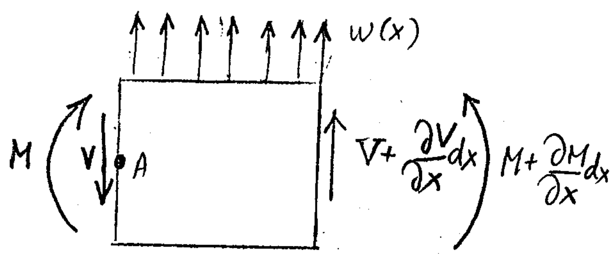


הקשר בין העומס המחולק כח הגזירה ומומנט הכפיפה



נסתכל בקורה עם עומס מחולק $w(x)$ ונחשב את שווי המשקל של אלמנט שלה.

א. שווי משקל כחות בכוון y



$$\Sigma F_y = +w\,dx - V + \left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right) = 0$$

$$\boxed{w = -\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad (6.1)$$

ב. שווי משקל מומנטים (סביב A)

$$M+\frac{\partial M}{\partial x}dx + (w\cdot dx)\frac{dx}{2} + \left(V+\frac{\partial V}{\partial x}dx\right)dx - M = 0$$

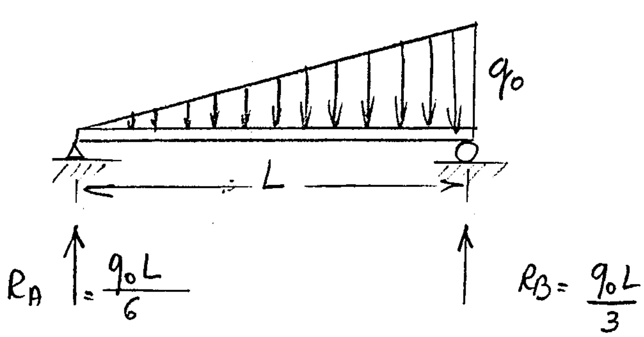
$$\frac{\partial M}{\partial x}dx + \cancel{w\frac{(dx)^2}{2}} + V dx + \cancel{\frac{\partial V}{\partial x}(dx)^2} = 0$$

$$\boxed{V = -\frac{\partial M}{\partial x}} \qquad (6.2)$$

בעזרת הקשרים (10.1-10.2) ובעיקר בעזרת הקשר (10.2) ניתן לבנות דיאגרמות מהלך מומנטים בשיטת האינטגרציה.

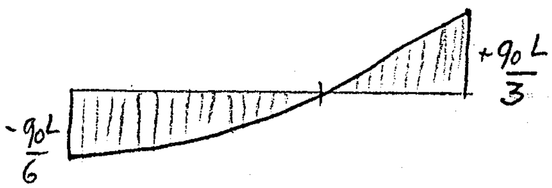
<u>דוגמא א'</u>

קבע בשיטת האינטגרציה את מהלך V ו- M בקורה.



$$w = -q_0\frac{x}{L}$$

$$V = -\int w\,dx = \int q_0\frac{x}{L}\,dx = q_0\frac{x^2}{2L} + C$$

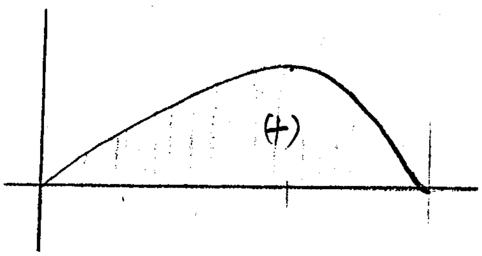


תנאי גבול ב $x=0$ $V = -R_A = -\frac{q_0L}{6}$

$$V = q_0\frac{x^2}{2L} - \frac{q_0L}{6} = \frac{q_0}{6L}\left(3x^2 - L^2\right)$$

$$M = -\int V\,dx = \int -\frac{q_0}{6L}\left(3x^2 - L^2\right)dx$$

$$M = -\frac{q_0}{6L}\left[x^3 - L^2x\right] + C$$



תנאי גבול ב $x=0$ $M = 0$

$$C = 0$$

$$M = -\frac{q_0}{6L}\left[x^3 - L^2x\right] = \frac{q_0}{6L}\left[L^2x - x^3\right]$$

כיון שערכים V הוא הנגזרת של M ואזי כשהנגזרת מתאפסת
M מקבל מקסימום או מינימום!

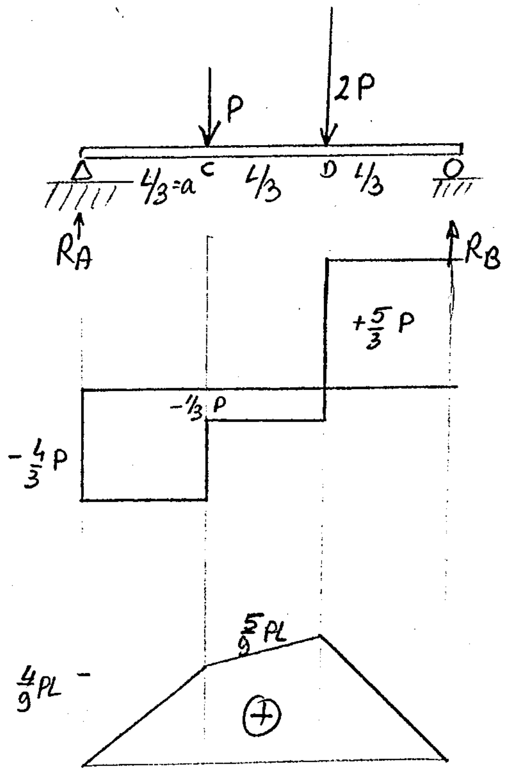
$$V=0 \Rightarrow \quad 3x^2 - L^2 = 0 \quad x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$M_{max} \Rightarrow \quad M\left(x = \frac{L}{\sqrt{3}}\right) = \frac{q_0L^2}{9\sqrt{3}}$$

<u>דוגמא ב</u>

קבעת מהלך מומנטים בשיטת האינטגרציה בקורה העמוסה בכוח
בקונוס

קבע את V ו- M בקורה שבשרטוט



$$R_B \cdot L - 2P \cdot \frac{2}{3}L - P\frac{L}{3} = 0$$

$$R_B = \frac{5}{3}P$$

$$R_A = 3P - \frac{5}{3}P = \frac{4}{3}P$$

$$M_{AC} = -\int_0^x V dx = -\int_0^x -\frac{4}{3}P dx = \frac{4}{3}Px + C$$

$$M_{AC}(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$M_{AC} = \frac{4}{3}Px$$

$$M_{CD} = -\int_{a}^{2a} V dx = \int_{a}^{2a} \frac{1}{3}P\, dx = \frac{Px}{3} + C$$

$$M_{CD}(x=\tfrac{L}{3}) = M_{AC}(x=\tfrac{L}{3}) = \frac{4}{3}P\cdot\frac{L}{3} = \frac{4}{9}PL$$

$$\frac{P\cdot L}{9} + C = \frac{4}{9}PL \Rightarrow C = \frac{3}{9}PL = \frac{PL}{3}$$

$$M_{CD} = \frac{P}{3}(x+L) \qquad M_D(x=\tfrac{2L}{3}) = \frac{5}{9}PL$$

$$M_{DB} = -\int \frac{5}{3}P dx = -\frac{5}{3}Px + C$$

$$M_D(x=L) = 0 \qquad -\frac{5}{3}PL + C = 0 \qquad C = +\frac{5}{3}PL$$

$$M_{DB} = \frac{5}{3}P(L-x)$$

בדיקה

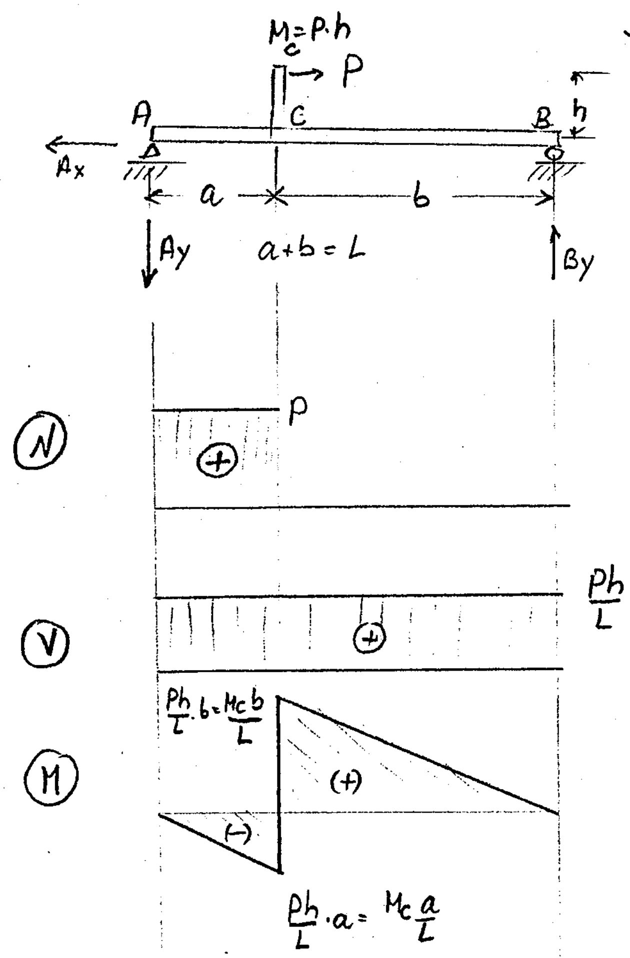
$$M_D = \frac{5}{3}P(L - \tfrac{2}{3}L) = \frac{5}{9}PL \checkmark$$

שמלב שבנקודה שיש שינוי בלתי רציף ב V יש שינוי בלתי רציף בנגזרת
עקום המומנט :

דוגמא ג'

מהלך מומנטים בקורה עם מומנט מרוכז

(I)



1. נחשב הריאקציות

$$\Sigma F_x = 0 \qquad A_x = P$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad B_y \cdot L - Ph = 0$$

$$B_y = \frac{Ph}{L}$$

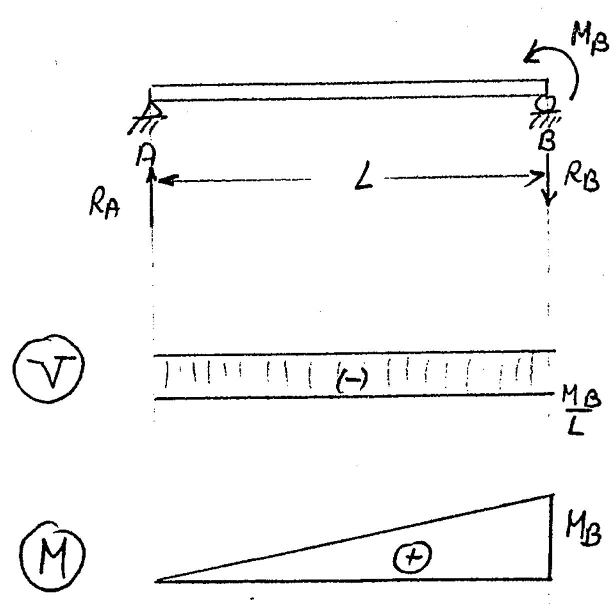
$$A_y = -B_y = -\frac{Ph}{L}$$

קיימת אי-רציפות במומנט בגודל M_c

ברם שיפועי הקטעים שווים שכן הגזירה

שווה $(V = const)$

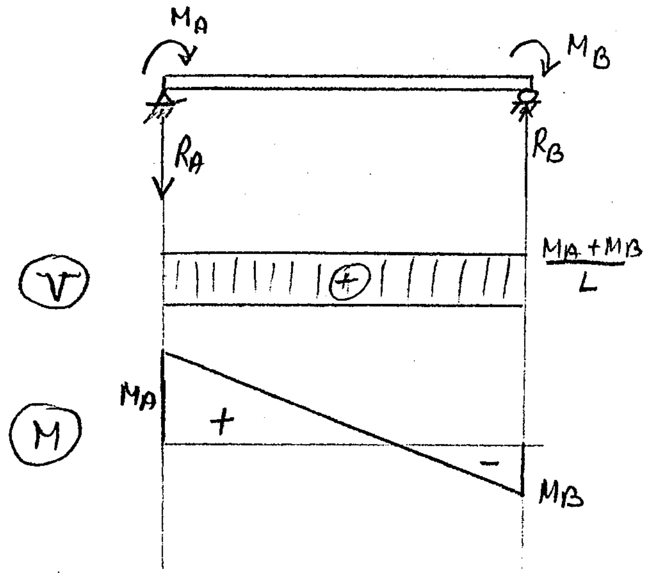
(II)



$$\Sigma F_y = 0 \qquad R_B = R_A$$

$$\Sigma M = 0 \qquad R_A \cdot L - M_B = 0 \qquad R_A = \frac{M_B}{L}$$

III



$\Sigma F_y = 0 \quad R_A = R_B$

$\Sigma M = 0 \quad R_A \cdot L - (M_A + M_B) = 0$

$$R_A = \frac{M_A + M_B}{L}$$

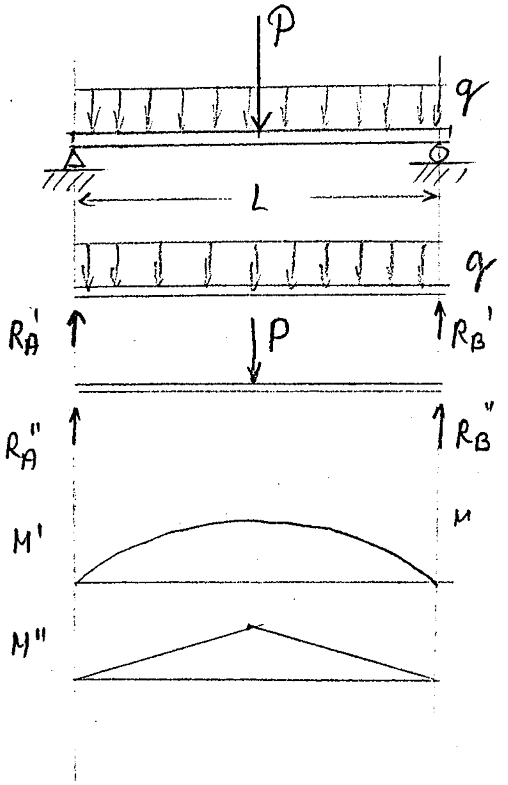
6.13 עקרון הסופרפוזיציה

כיון שאנו עוסקים בבעיות אלסטיות בהן יש יחס ישר וקבוע בין התוצאות הנדרשות לבין הכוחות הפועלים את כוחות הגזירה V ומומנטי הכפיפה M נוכל ליישם את עקרון הסופרפוזיציה. עקרון זה ניתן לנסח במקרה זה כך:

נניח כי אנו מעמיסים קורה במערכת כוחות ומומנטים (א) שכתוצאה ממנה תוצרנה תגובות (א) ופלוגי' N, V ו- M (א). כאשר נסיר מערכת (א) והקורה תחזור למצבה ההתחלתי. נעמיסה מחדש במערכת כוחות ומומנטים (ב) וכתוצאה ממנה שוב תוצרנה תגובות ופלוגי' N V ו- M (ב). נסיר את המערכת (ב) ושוב תחזור הקורה למצבה ההתחלתי. כאשר נעמיסה במערכת כוחות (ג) השווה לסכום האלגברי של מערכות (א) ו(ב). עקרון הסופרפוזיציה קובע כי התגובות ופלוגי' N, V ו- M במצב העמסה (ג) ישוו אז הם לסכום האלגברי של אותם הגדלים במצב ההעמסה (א) ו(ב).

לעקרון זה חשיבות מעשית מרובה שכן במצבים הנדסיים הבאים

ניתן להרכיב את מצב ההעמסה הוקטורי מסכום של מצבים בסיסיים שאת פתרונותיהם ניתן למצוא בטבלאות ובספרים. ע"י כך ניתן לחשב את המצב הוקטורי מבלי לפתור ישירה.



דוגמא א

חשב התגובות ומהלך המומנטים עבור הקורה שבשרטוט.

קל לראות כי ניתן לפרק את מצב ההעמסה הנתון לשני מצבים מוכרים

$$R_A'=R_B'=\frac{qL}{2}$$

$$R_A''=R_B''=\frac{P}{2}$$

$$R_A = R_A'+R_B' = R_B = R_B'+R_B'' = \frac{1}{2}(P+qL)$$

נשרטט מהלך מומנטים

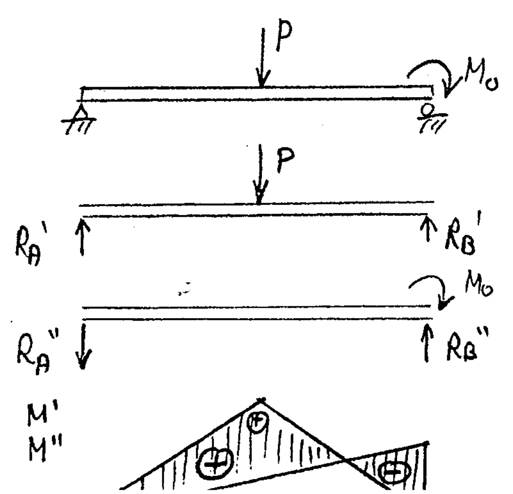
$$M'_{max}=\frac{PL}{4}$$

$$M''_{max}=\frac{qL^2}{8}$$

$$M_{max}=M'_{max}+M''_{max}=\frac{PL}{4}+\frac{qL^2}{8}$$

במקרה פרטי זה הן המקסימום של M_{max} והן מקומו לאורך הקורה בשתי ההעמסות זהה.

דוגמא ב

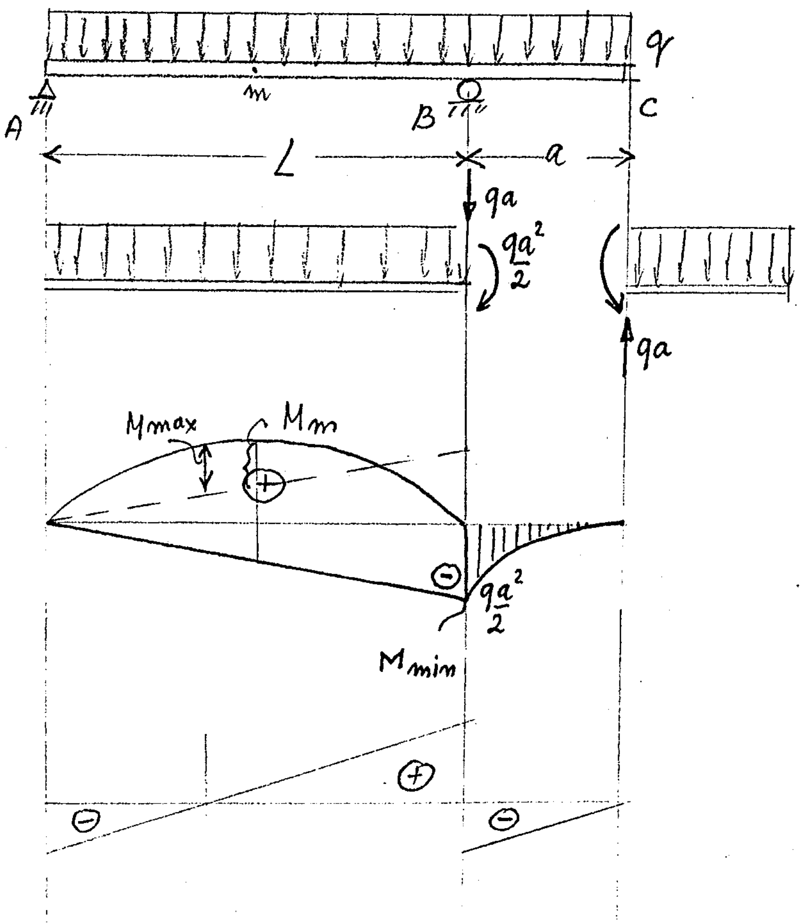


גם כאן הפירוק לשני מצבים הוא פשוט

$$R_A'=R_B'=\frac{P}{2} \qquad R_A''=R_B''=\frac{M_0}{L}$$

דוגמא 6

פתרון קורה תלויה בשיטת הסופרפוזיציה



דרוש R_A, R_B

M_{max}, M_{min}, M_m

m - אמצע המפתח L

א. נחתוך הקורה ונרשום את המומנט והכוח הגזירה הדומה מעבור החלק הימני על השמאלי.

ב. כעת נטפל בחלק השמאלי בסופרפוזיציה.

$$M_B = \frac{qa^2}{2}$$

$$R_A = \frac{qL}{2} - \frac{M_B}{L} = \frac{q}{2L}(L^2 - a^2)$$

$$R_B = \frac{qL}{2} + \frac{qa^2}{2L} + qa = \frac{q}{2L}(L^2 + a^2 + 2aL)$$

$$= \frac{q}{2L}(L+a)^2$$

$$M_m = M'_m + M''_m = \frac{qL^2}{8} - \frac{M_B}{2}$$

חשוב M_{max} אנליטית

$$V(x) = -R_A + qX = -\frac{dM}{dx} = 0$$

$$X_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{1}{2L}(L^2 - a^2)$$

המומנט ב X_0 ישווה ל-

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}$$

$$M_{max} = M(x_0) = \frac{R_A^2}{q} - \frac{R_A^2}{2q} = \frac{R_A^2}{2q}$$

דרך ב'

$$M(x) = \frac{q_0 L}{2}x - \frac{q_0 x^2}{2} - M_B\frac{x}{L}$$

$$\frac{\partial M}{dx} = 0 \qquad \frac{q_0 L}{2} - q_0 x - \frac{M_B}{L} = 0$$

$$x_0 = \frac{L}{2} - \frac{a^2}{2L}$$

$$M(x_0) = \frac{q_0 L}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{a^2}{2L}\right) - \frac{q_0}{2}\left(\frac{L}{2} - \frac{a^2}{2L}\right)^2 -$$

$$\frac{M_B}{L}\left(\frac{L}{2} - \frac{a^2}{2L}\right) = \frac{R_A^2}{2q} \quad ✓$$

דוגמא 3

בצע אופטימיזציה של הקורה בדוגמא ג' כך ש: $|M_{max}| = |M_{min}|$

ומצא מהו היחס a/L המקיים תנאי זה.

$$M_{min} = \frac{qa^2}{2}$$

$$M_{max} = \frac{R_A^2}{2q} = \frac{q}{8L^2}(L^2-a^2)^2$$

$$\frac{\cancel{q}a^2}{2} = \frac{\cancel{q}}{8L^2}(L^2-a^2)^2 \qquad /:L^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{L}\right)^2 = \frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{a}{L}\right)^2\right]^2 \qquad \frac{a}{L} = \eta$$

$$4\eta^2 = (1-\eta^2)^2 = 1-2\eta^2+\eta^4$$

$$\eta^4 - 6\eta^2 + 1 = 0$$

$$\eta^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2} = 3 \pm \sqrt{8} = 3 \pm 2\sqrt{2} = 3 \pm 2.828$$

$$\eta_1^2 = 0.172$$ * רק קטן מ-1

$$\eta = \sqrt{0.172} \cong 0.4147$$

* עבור $\eta_2 > 1$ נקבל פתרון שהמומנט בו בסימן אחד לכל האורך ואז למעשה אין משמעות למינימום ולמקסימום

פרק 7 חכוך

7.1 מבוא

במסגרת הפרקים הקודמים הנחנו כי הכחות הפועלים בין שני משטחים במגע פועלים בניצב למשטחים. תאור זה מתאים למצב בו משטחי המגע חלקים ולא יכול להתפתח ביניהם כח משיקי - חכוך. כחות חכוך מתפתחים למעשה ברמה זאת או אחרת. כאשר קיימת נטיה של משטח להחליק על פני משטח שני תמיד נתפתח כח החכוך בכוון המתנגד לנטיה הנ"ל.

במכונות מסוימות אנו מנסים להקטין ככל שניתן את החכוך למשל: במיסבים, גלגלי שיניים, ברגי הרמה, בזרימת נוזלים בצנרת ובכלי טיס הטסים באויר; וישנם מצבים בהם אנו מנסים להגדיל את החכוך למקסימום כגון: במעצורי הרכב, ברצועות של תמסורות בתנעות וכו'. מכונה בה החכוך זניח נקראת מכונה אידיאלית. מכונות בהן קיים חכוך נקראות מכונות מציאותיות (Real). כתוצאה מהחכוך במכונות המציאותיות ישנם הפסדי אנרגיה בצורת חום.

חלק א' תופעת החכוך

7.2 סוגי חכוך

קיימים שלושה סוגי חכוך עקריים בהם נדון:

חכוך יבש

זהו החכוך הנוצר בין שני משטחים בלא סיכה ביניהם הנוטים הנוטים להחליק או המחליקים זה על גבי זה. זהו סוג החכוך הנפוץ ביותר ובו נעסוק בהמשך.

חכוך זורמים

נוצר כתוצאה מתנועת שכבת זורם אחת ביחס לשכבה שניה. הוא יחסי למהירות. היחסית שבין שתי שכבות הנוזל ולצמיגות של הזורמים הנדונים.

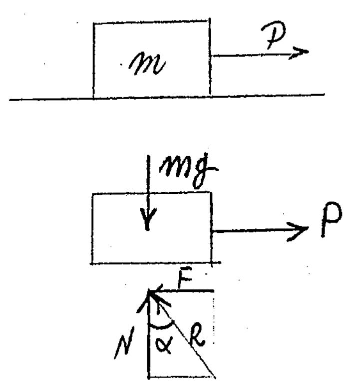
חכוך פנימי

זהו חכוך שקיים בתוך מוצקים הנתונים להעמסה מחזורית בחומרים. אלסטיים הוא לא קיים. קיים בחומרים שבשלב העמסה מסוים נעשים פלסטיים.

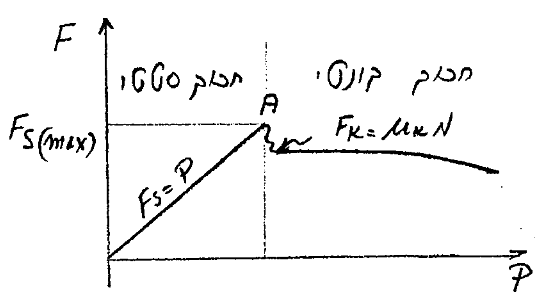
7.3 החכוך היבש

בפרק זה נעסוק בהרחבה בחכוך היבש:

א. מנגנון החכוך



נתבונן בבלוק המונח על משטח מחוספס. אנו מפעילים כח P מוגבר הולך וגדל ומסתכלים על כח החכוך המתפתח. בדיאגרמה מתואר התהליך. בתחילה כח החכוך F_s גדל יחד עם P ושווה לו. בנקודה A מגיע F_s לערכו המקסימלי השווה ל:



$$F_{s(max)} = \mu_s N$$

הנה ש-N - הכח הנורמלי למשטח

μ_s - מקדם החכוך הסטטי

$$F_{s\,max} = \mu_s N$$

בנקודה A נפרצת המערכת. כיון שלא יכול להתפתח כח חכוך גדול מ- $F_{s\,max}$ - N עבור P ומתחילה תזוזה של הגוף. עם תנועת הגוף קטן מקדם החכוך ויורד ל μ_k, ולכן בזמן תנועה

ישנה כח החכוך לו: $F_k=\mu_k N$ בכלל נוכל לרשום ש:

$$F = \mu N \qquad (7.1)$$

יש להציב לנוסחה זאת את ה-μ המתאים למצב. יש לזכור כי במצב סטטי יכול כח החכוך להיות קטן מהערך המקסימלי שלו. במצב כזה לא ניתן ליישם את משוואה (6.1)

נשוב להסתכל בדיאגרמת הגוף החפשי שבעמ' הקודם. אנו רואים שהשקול R יוצר זוית α עם הכח הנצב N כך ש:

$$tg\ \alpha = \frac{F}{N}$$

כאשר F מגיע לערכו המירבי תגיע גם α לערכה המירבי ϕ_s הידוע כזוית החכוך

$$tg\ \phi_s = \frac{F_{s\,max}}{N} = \frac{\mu_s N}{N} = \mu_s$$

ובמצב של תנועה

$$tg\ \phi_k = \mu_k$$

ובכלל:

$$tg\ \phi = \mu \qquad (7.2)$$

ϕ_k ו- ϕ_s נקראות זוית החכוך הקינטי וזוית החכוך הסטטית.

ב. <u>סוגי בעיות הקשורות בחכוך</u> -

מן הנאמר לעיל נוכל לסווג את בעיות החכוך לשלושה סוגים:

<u>סוג I</u>

בסוג זה קיים התנאי של מניעת תנועה. הגוף שבשווי משקל הוא על גבול ההחלקה. ולכן כח החכוך מקסימלי ומתקיים התנאי

$$F_{s\,max} = \mu_s N$$

סוג II

בסוג זה לא צריך למנוע החלקה ולכן כח החכוך יכול להיות קטן ממרבי. גודלו של כח החכוך בבעיות מסוג זה יקבע ע"י משוואות שווי המשקל בלבד. בסוג זה של שאלות נשאל הוא כח החכוך מספיק להבטחת שווי משקל. נניח כי ש.המשקל מתקיים נחשב את כח החכוך F ונשווהו למרבי $F_{s\,max}$.

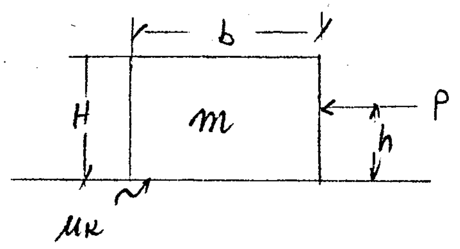
סוג III

בסוג זה קיימת תנועה ולכן כח החכוך נתון ע' משוואה 6.1

$$F_k = \mu_k N$$

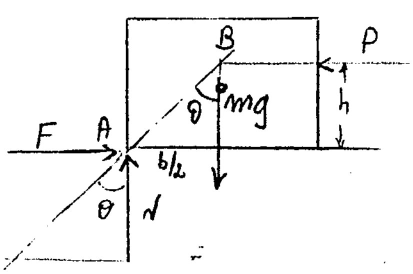
קיימים בספרות נתונים על מקדמי חכוך בצורת הצורך נתון בנסוי, מאד פשוט, לקבעו עבור מקרה ספציפי נדרש.

דוגמא א' (6.4 עמ' 275)



בלוק שמסתו m רחבו b וגבהו H
ע במהירות קבועה בהשפעת הכח P.
בהנחה ש μ_k נתון חשב:

א. גובהו המרבי של h שבו הגוף יחליק ולא ינסה להתגלגל



ב. את הנקודה C בה פועל שקול הכוחות על תחתית הבלוק בזמן נתון פי:

$$h = H/2$$

חלק א'

ברגע ההתגלגלות יהוה המגע בין הבלוק למשטח בנקודה A בלבד. כיון שהבלוק מחליק יהוה כח החכוך שווה ל:

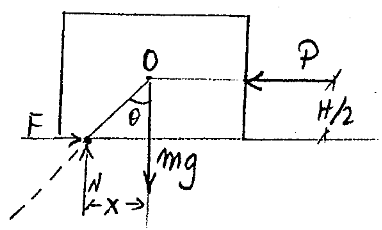
$$F_K = \mu_K N$$

ולכן $\theta = \phi_K = \tan^{-1}\mu_K$

השקול של F ו-N יתחתך עם קו mg בנקודה B. P חייב לעבור דרך B
כי הבלוק נפעל לשלושה כוחות משותפים שחייבים להחתך בנקודה. ולכן:

$$\tan\theta = \mu_K = \frac{b/2}{h}$$

$$\therefore \quad h = \frac{b}{2\mu}$$



כאשר $b/2\mu < h$ הבלוק מתגלגל.

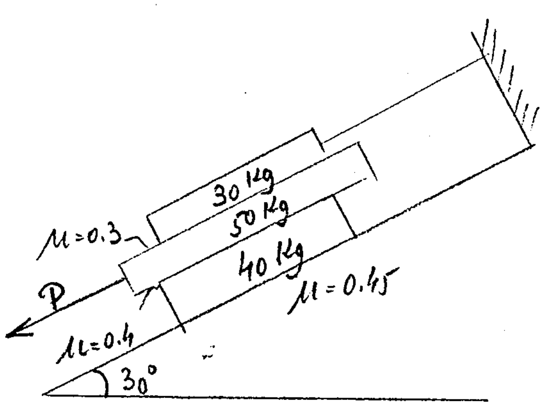
חלק ב

בדיוק כמו בחלק הקודם חייבים R, P ו-mg
להחתך בנקודה O. (P ו- mg נתון כי נחתכים שם)
לכן הזוית θ בין F ל-N תשווה לזוית שבין קו mg ו- x

$$\frac{F}{N} = \tan\theta = \mu_K = \frac{x}{H/2}$$

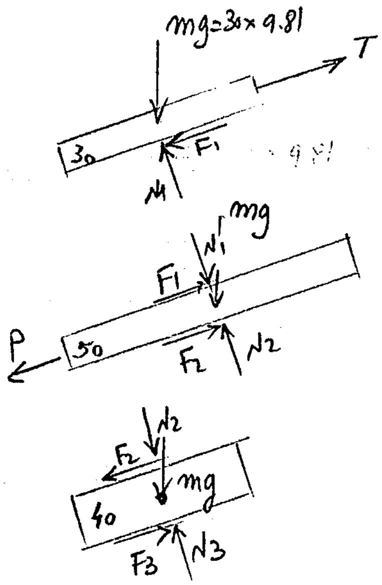
$$x = \mu_K \frac{H}{2}$$

כאשר μ יוצא ב 2μ מתוך הפתרון את תנאי גבול הגלגול וגבול התזוזה
ממצב מנוחה.



דוגמא ב (6.5 מ"מ 276)

נתונים שלושה גופים שבשרטוט
בין כל מקדמי החיכוך. קבע את
ערכו המרבי של P האפשרי
בטרם תתרחש החלקה כלשהי.



נשרטט דיאגרמת גוף חפשי לכל בלוק:
יתכנו שני מצבים:
א. רק בלוק ה-50 יחליק בין שני הבלוקים.
ב. רק בלוק ה-50 ובלוק ה-40 יחליקו. כגוף אחד על המשור

ראשית נחשב את N_3, N_2, N_1 משיקולי כוחות בכיוון y

$\Sigma F_y = 0 \qquad N_1 - 30 \times 9.81 \cos 30^\circ = 0 \qquad N_1 = 255\ N$

$N_2 - 50 \times 9.81 \cos 30^\circ - 255 = 0 \qquad N_2 = 680\ N$

$N_3 - 40 \times 9.81 \cos 30^\circ - 680 = 0 \qquad N_3 = 1019\ N$

נבדוק את האפשרות א'

במצב ההחלקה נתון לחשב את F_1 ו- F_2:

$F_1 = \mu N_1 = 0.3 \times 255 = 76.5 N$

$F_2 = \mu N_2 = 0.4 \times 680 = 272\ N$

ומכאן משיקולי שיווי משקל:

בלוק 50 $\Sigma F_x = 0 \qquad P - 76.5 - 272 + 50 \times 9.81 \sin 30^\circ = 0$

$P = 103.1\ N.$

כעת נבדוק את הנחת היסוד שהפתרון הוא מסוג א'. את בלוק - 40
נמצא את F_3

$\Sigma F_x = 0 \qquad 272 + 40 \times 9.81 \sin 30^\circ - F_3 = 0$

$F_3 = 468\ N$

ערכו המירבי של F_3 יכול להיות:

$(F_3)_{max} = \mu N_3 = 0.45 \times 1019 = 459$

ואין הוא יכול להיות 468 לכן ההנחה היתה שגויה.

מכיוון שההחלקה מתרחשת בין בלוק ה-40 למשור המשופע

בלוק 40 $\Sigma F_x=0$ $\qquad F_2 + 40\times 9.81\cdot\sin 30^\circ - 459 = 0 \qquad F_2 = 263\ N$

ולכן משווי משקל של בלוק 50

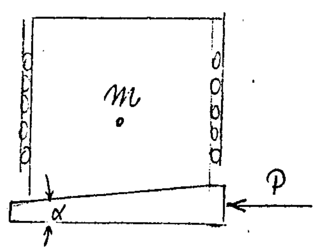
בלוק 50 $\Sigma F_x=0$ $\qquad P + 50\times 9.81\sin 30^\circ - 263 - 76.5 = 0$

$$\underline{P = 93.8\ N.}$$

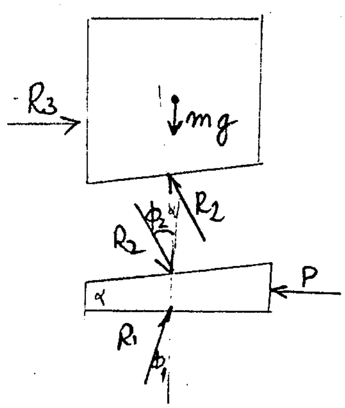
חלק ב' "יישום חיכוך במכונות"

7.4 יתדות

היתד הוא אחת המכונות הפשוטות המשמשת להצבת כלים כבדים
בעזרת כח קטן יחסית. נתחיל ביתד שבציור



ברגע התזוזה יהיה הכח על כל אחת ממשורי
היתד משופע ביחס לאנך בזווית החיכוך ϕ
ובכיוון המתנגד לתנועה



משווי משקל של הבלוק נקבל:

$$R_2\cos(\alpha+\phi_2) = mg$$

$$R_2 = \frac{mg}{\cos(\alpha+\phi_2)}$$

וכעת שיווי משקל של היתד:

$$R_1\cos\phi_1 = R_2\cos(\alpha+\phi_2)$$

$$R_1 = \frac{mg}{\cos\phi_1}$$

$$\frac{P}{mg} = \mu_1 + \tan(\phi_2+\alpha)$$

רווח המכני

mechanical gain

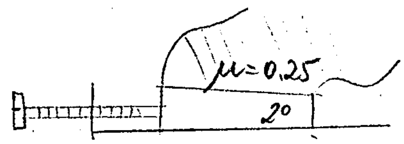
$$R_1\sin\phi_1 + R_2\sin(\phi_2+\alpha) = P$$

$$P = mg\,tg\,\phi_1 + mg\,tg(\phi_2+\alpha) = mg[\mu_1 + tg(\phi_2+\alpha)]$$

$Mg \equiv$ Mega-gram $\equiv$ ton

<u>דוגמא (6.44)</u>

מייצבים מנוע כבד בעזרת בורג ותד. כל רגלית נושאת ב-¼ משקל המנוע שמסתו 4.8 ton חשב את הכח P שיזיז הרגלית.



$\mu = 0.25$

$$P = mg\left[\mu_1 + tg\,(\phi_2 + \alpha)\right]$$

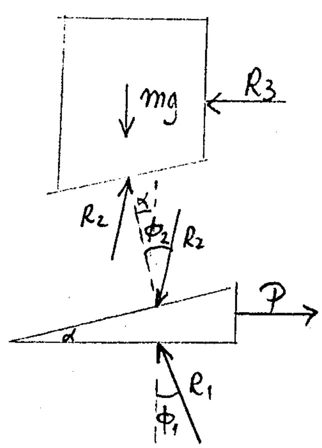
$$\phi_s = tg^{-1}0.25 = 14^\circ.04$$

$$= \frac{4.8}{4}\times 10^3 \times 9.81\left[0.25 + tg\left(tan^{-1}0.25 + 2^\circ\right)\right]$$

$$= 1.2\times 10^3 \times 9.81\,[0.25 + 0.28743] = 6.33\ KN$$

כשמשתמשים בויברציה ויש כוון 2.

באם נפסיק להפעיל את P היתד לא יזוז כל עוד $2\phi_s \geq \alpha$ ואנו קוראים לתד הזה יתד בעלת נעילה עצמית. כדי לשלוף תד שננעל עצמית שוב נצטרך להפעיל כח דיאגרמת הגוף החפשי הפעם נתונה בשרטוט



$$R_2\cos(\phi_2 - \alpha) = mg$$

$$R_2 = \frac{mg}{\cos(\phi_2 - \alpha)}$$

$$R_2\cos(\phi_2 - \alpha) = R_1\cos\phi_1 = mg$$

$$R_1 = \frac{mg}{\cos\phi_1}$$

כשמציבים $P=0$ נקבל:

$2\phi_s \geq \alpha$

כלומר עבור זוית כזאת המנוע יחזיק לבד.

$-tg\,\phi_1 \geq tg\,(\phi_2 - \alpha)$

$-\phi_1 \geq \phi_2 - \alpha$

$\alpha \geq \phi_1 + \phi_2$

$$-R_1\sin\phi_1 - R_2\sin(\phi_2 - \alpha) + P = 0$$

$$P = mg\left[\mu_1 + \frac{\mu_2 - tg\,\alpha}{1 - \mu_2\,tg\,\alpha}\right]$$

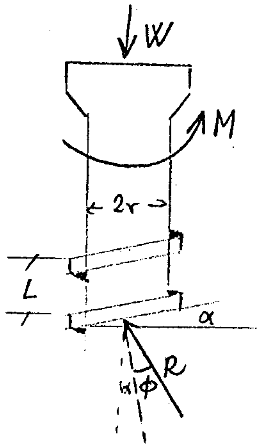
ובדוגמא שלעיל לשליפת היתד יידרשו:

$$P = \frac{4.8}{4}\times 10^3 \times 9.81\left[0.25 + \frac{0.25 - tg\,2^\circ}{1 - 0.25\,tg\,2^\circ}\right]$$

$$P = 5.45\ KN$$

7.5 ברגים

ברגים משמשים לחבור מצב וחפ ולהעברת כח מצד שני למשל במגבהה (ג'ק). בד"כ למטרה זאת משתמשים בהברגה רבועה בעוד שלחבור משתמשים בהברגות משולשות. נסתכל על A בורג של מגבהה. הבורג מועמס בכח W



ומפעיל עליו מומנט M. הכח R מתאר את הכח שמפעיל שן הבית על שן הבורג. כח דומה יופעל לאורך כל השינים שבמגע עם הבית. בזמן עצמת M מספקת יחלוק הבורג מעלה. הזוית ϕ_s תהיה זוית החכוך

המומנט שיוצר R סביב ציר האורך של הבורג הוא:

$$r \cdot R\sin(\phi_s+\alpha)$$

ועבור הרבה R נקבל $\quad r\sin(\phi_s+\alpha)\Sigma R$

כלומר משוואת המומנטים תהיה

$$M = r\sin(\phi_s+\alpha)\Sigma R$$

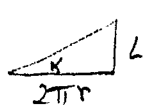
סכום הכוחות בכוון y יהיה:

$$\Sigma F_y=0 \qquad \Sigma R\cos(\phi_s+\alpha) - W = 0$$

$$\Sigma R = \frac{W}{\cos(\phi_s+\alpha)}$$

$$M = W\cdot r\, tg(\phi_s+\alpha) \qquad (7.3)$$

ואת α ניתן לקבל מפתוחת מעטפת ההברגה למשולש נקבל



$$\alpha = tg^{-1}\frac{L}{2\pi r} \qquad tg\,\alpha = \frac{L}{2\pi r}$$

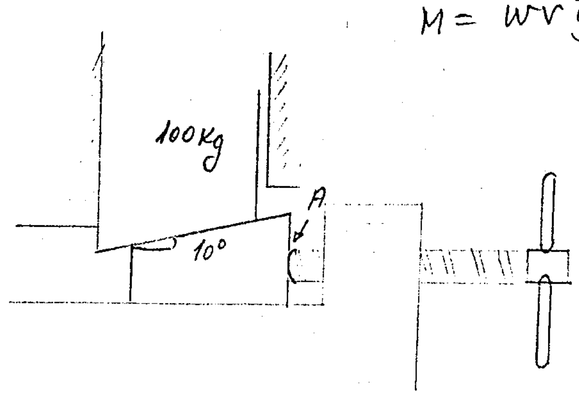
$$M = W\cdot r\,\frac{\mu + \frac{L}{2\pi r}}{1+\frac{\mu L}{2\pi r}} = W r\cdot\frac{2\pi r\mu + L}{2\pi r + \mu L}$$

כאשר נסיר את M יתהפך כוון החכוך. הבורג ישאר נעול כל עוד $\alpha < \phi_s$
כדי להניע את הבורג תחת אותו עומס

$$M = Wr\,tg\,(\phi_s-\alpha) \qquad (7.3a)$$

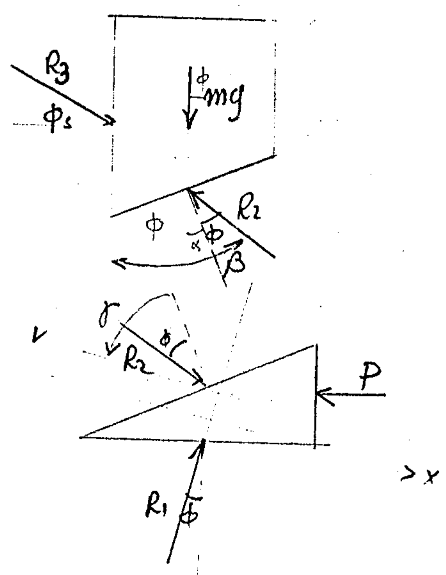
במקרה ש $\phi<\alpha$ והבורג נוטה להפתח מעצמו כדי לעצרו די במומנט

$$M = Wr\,tg\,(\phi-\alpha)$$



דוגמא 6/53

הגובה של בלוק שמשקלו 100kg נקבע בעזרת יתד המופעל ע"י בורג. חשב את המומנט שיש להפעיל על ידית הבורג כדי להגביה את הבלוק. נתון כי הבורג בעל קוטר ממוצע D=30mm וקידום של 10mm לסיבוב. מקדם החכוך בבורג $\mu=0.25$ ובכל יתר המשטחים $\mu=0.4$ הזנח החכוך ב-A



פתרון

שיטה א'.

פתרון הבלוק: $\phi_s = \tan^{-1}0.4 = 21.8°$

נבחר מערכת צירים כמשורטט

$\beta = 2\phi+10 = 53.6°$ $\qquad \Sigma F_y=0 \qquad mg\cos\phi - R_2\cos 53.6 = 0$

$$R_2 = 1535\ N$$

ש.מ. של היתד

$\gamma = 90-\phi-\alpha-\phi = 36.4°$

$$\Sigma F_x=0 \qquad R_2\cos\gamma - P\cos\phi = 0$$

$$P = 1331\ N$$

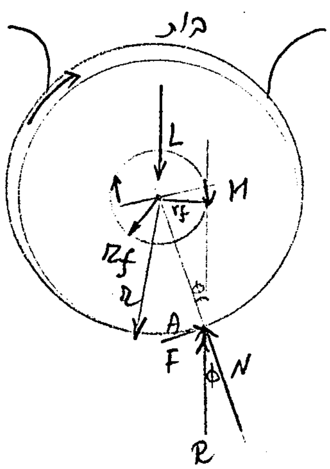
נוסף כעת הבורג

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{L}{2\pi r} = \tan^{-1}\frac{10}{2\pi\times 15} = 6.06^\circ$$

$$\phi = \tan^{-1}0.25 = 14.04^\circ$$

$$M = Pr\,tg(\phi+\alpha) = 1331\cdot 0.015\times tg\,20.09^\circ = 7.3\ Nxm$$

שבשלב זה הכח נגד הבורג נעולים עצמית



7.6 מסבים לכח רדיאלי

מסבב זה נושא רק בעומס רדיאלי נוכל לתאר כבשרטוט. כתוצאה ממומנט הסיבוב M והכח על הציר L נוצרת תגובה R בנקודת המגע A. משווי משקל בכיון y

$$R = L$$

אבל הכח לא נוהה קולינארי ולכן הוא ישיק למעגל שרדיוסו r_f הנקרא מעגל החכוך. כדי לקיים שיווי משקל מומנטים

$$M = R\cdot r_f = R r \sin\phi \qquad (7.4)$$

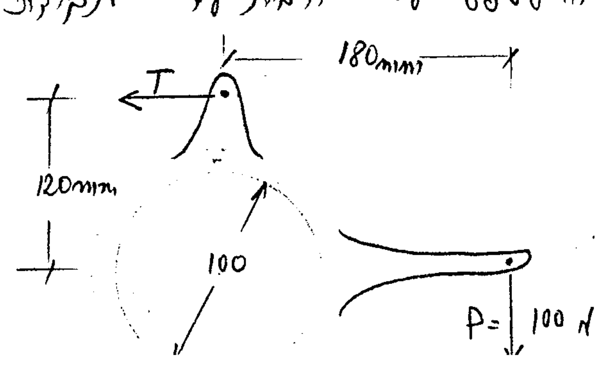
עבור: $\phi \ll$

$$\sin\phi \approx \phi \approx tg\,\phi \approx \mu$$

$$M = R r \mu = L r \mu \qquad (7.4a)$$

זהו המומנט הנדרש להתגבר על החכוך.

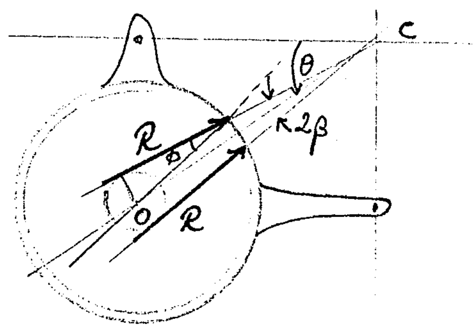
** כשהציר מתחיל להסתובב מנסה הוא לטפס על הבית עד לנקודת ההחלקה A.



דוגמא 6/8

המתקן שבשרטוט מולבש על ציר קוני בקוטר. T דרוש להזיז את P.

הנו 0.2 חשב את הערכים המינימלי והמקסימלי של T שמונע תנועת המתקן בשני הכוונים.



פתרון: ברגע התנועה יפעל R בזווית ϕ לכיוון הניצב. כלומר הוא ישיק למעגל החכוך r_f

באם T יהיה מינימלי יש חשש להסתובב במגמת השעון אזי יפעל R כש-T והיה מקסימלי יפעל R.

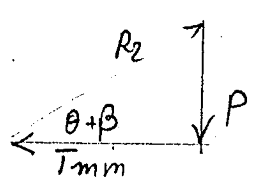
$$\phi = \tan^{-1} 0.2 = 11.31^\circ$$

$$r_f = r\sin\phi = 50\sin 11.31 = 9.81\ mm$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{120}{180} = 33.7^\circ$$

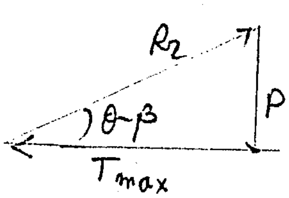
$$\beta = \sin^{-1}\frac{r_f}{OC} = \frac{9.81}{\sqrt{120^2+180^2}} = 2.6^\circ$$

שלושת הכוחות P, T ו- R חייבים להפגש ב-C על פי משפט שלושת הכוחות במישור.



T מינימלי - מסתובב עם השעון:

$$T_{min} = P\,ctg(\theta+\beta) = 100\,ctg(33.7^\circ+2.6^\circ) = 136.2N$$

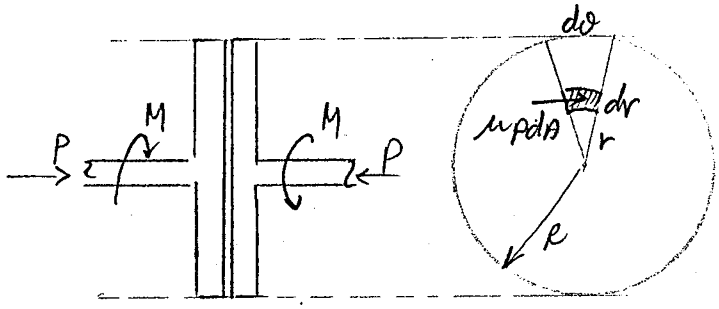


T מקסימלי - מניעת סבב נגד השעון

$$T_{max} = P\,ctg(\theta-\beta) = 165.8\ N$$

7.7 מיסבים לכח צירי וחכוך דיסקים

חכוך בין משטחים מעגליים נפוץ במיסבים לכח צירי, המצמדים ובמצמדי דיסק לעתים משטחי המגע הם טבעתיים. נחשב את המומנט המינימלי הדרוש M להחלקת שני משטחים כאלה הלחוצים זה לזה בכח צירי P



נניח כי הלחץ הקבוע בין הדיסקיות
הוא p ומקדם החיכוך μ ואז
על אלמנט שטח יפעל כח

$$dF = \mu p\, dA$$

עכשיו נקבל מומנט מתנגד:

$$dM = \mu p r\, dA$$

ועל כל הדיסק

$$M = \int_A \mu p r\, dA$$

כאשר הדיסק חדש מניחים כי p קבוע ו-μ נתון כמו כן

$$p = \frac{P}{\pi R^2}$$

$$M = \frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} r^2\, dr\, d\theta = \frac{2}{3}\mu P R \qquad (7.5)$$

וכאשר מדובר בטבעת ישתנו גבולות האינטגרציה ונקבל

$$M = \frac{2}{3}\mu P\,\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \qquad (7.5a)$$

הלחץ כאן $p = \frac{P}{\pi(R_o^2 - R_i^2)}$

עם חלוף הזמן נשחק יותר הדיסק בחלקיו החיצוניים שם הם עושים דרך גדולה יותר ומקובל להניח שהלחץ p מפולג כך

$$p \cdot r = K$$

$$P = \int p\, dA = K\int_0^{2\pi}\int_0^{R} dr\, d\theta = 2\pi K R$$

$$p = \frac{P}{2\pi R}\cdot\frac{1}{r}$$

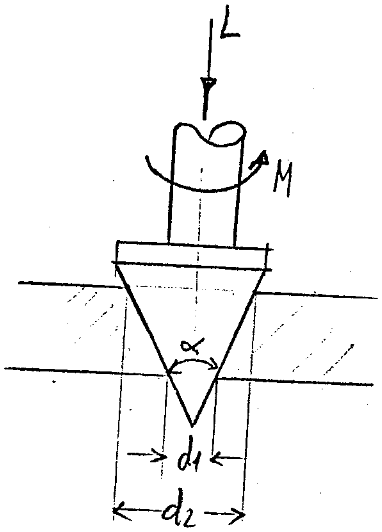
והמומנט

$$M = \int \mu p r\, dA = \frac{1}{2}\mu P R$$

כלומר יש ירידה ממקדם $2/3$ ל $1/2$ זאת ירידה של 25% בכושר הנשיאה של הדיסק או המוסב.

במקרה שמדובר בטבעת מגע נקבל:

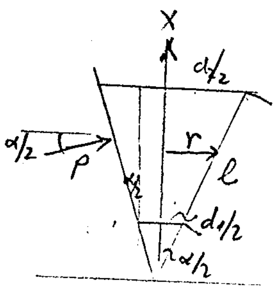
$$M=\frac{1}{2}\mu P\,(R_o+R_i)$$



דוגמא

ציר מסתיים במושב קוני כמשורטט.
חשב את המומנט הנדרש להתגבר על החכוך כאשר
הלחץ הצירי L ומקדם החכוך μ

נניח ש שורר לחץ p אחיד בין הציר
לבין המושב. ראשית נחשב את p משווי משקל
עם L



$$P_x = p\sin\frac{\alpha}{2}$$

הטלה על טבעת בכיוון x $\uparrow x$

$$dT = p\cdot 2\pi r \sin\frac{\alpha}{2}\,ds$$

$$ds=\frac{dx}{\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad r = x\,tg\,\alpha/2$$

$$dT = 2\pi p\,tg^2\frac{\alpha}{2}\,x\,dx$$

$$T = L = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi p\,tg^2\frac{\alpha}{2}\,x\,dx = 2\pi p\,tg^2\frac{\alpha}{2}\int_{x_1}^{x_2} x\,dx$$

$$x_1=\frac{d_1/2}{\tan\alpha/2} \qquad x_2=\frac{d_2/2}{tg\,\alpha/2}$$

$$L=\frac{\pi p}{4}(d_2^2-d_1^2) \Rightarrow p=\frac{4L}{\pi(d_2^2-d_1^2)}$$

המומנט

$$M=\int p\mu r\,dA = \mu p\int_{x_1}^{x_2}\underbrace{\left(x\,tg\frac{\alpha}{2}\right)}_{r}\underbrace{\left(2\pi x\,tg\frac{\alpha}{2}\right)}_{2\pi r}\underbrace{\frac{dx}{\cos\alpha/2}}_{ds} =$$

$$= 2\pi\mu p\,\frac{tg^2\alpha/2}{\cos\alpha/2}\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx = 2\pi\mu p\,\frac{1}{24\sin\alpha/2}(d_2^3-d_1^3)$$

$$=\frac{\mu L}{3\sin\frac{\alpha}{2}}\;\frac{d_2^3-d_1^3}{d_2^2-d_1^2}$$

פרק 8 - עבודה וירטואלית

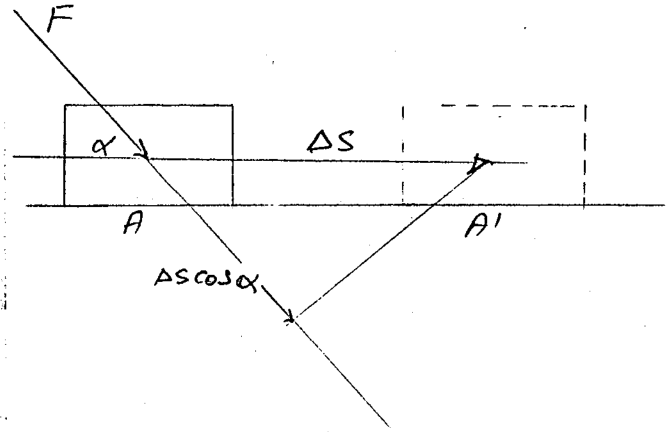
8.1 מבוא

בפרקים הקודמים נתחנו את מצב שווי המשקל של גופים במערכות בודדים, הכנת דג"ח ופתרון משוואות שווי המשקל. במערכים שנידונו ידוע היה מיקום הגוף בעת שווי המשקל ומטרתנו היתה לקבוע את ערכם של הכוחות החיצוניים הבלתי ידועים (התגובות בסמכים).

קיימת קבוצת בעיות שונה מאלו שטופלו עד כה. לקבוצה זאת שייכים גופים המורכבים ממספר איברים המאפשרים תנועה יחסית ביניהם לבין עצמם. רק שתצורת הגוף בשווי משקל איננה ידועה מראש. עבור קבוצת הבעיות מסוג זה השיטה בה השתמשנו לפתרון עד כה עלולה להיות מורכבת ומסורבלת. לקבוצת בעיות זאת קיימת דרך חלופית לפתרון דרך ישרה ופשוטה יותר. שיטה זאת ידועה כ- "שיטת העבודה הווירטואלית".

8.2 עבודה

טרם שניגש להגדיר את מושג "העבודה הווירטואלית" עלינו להבין את מושג העבודה בכלל - במובנו המיכני.



א. <u>עבודת כח</u>

נסתכל בכח F הקבוע הנתון בשרטוט. בתחילה נמצא הגוף ב-A והוא נע לA'. ההזזה אותה הוא עבר הוא ΔS

העבודה מוגדרת כמכפלת רכיב הכח בכוון ההזזה בגודל ההזזה:

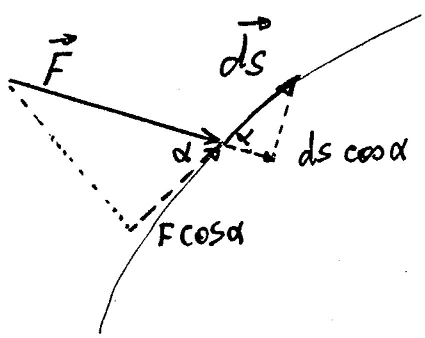
$$U=(F\cos\alpha)\,\Delta S$$

ניתן לקבל בהתאם כמכפלה של הכח ברכיב ההזזה בכוון הכח

$$U=F\cdot(\Delta s\cdot\cos\alpha)$$

מכאן נובע ש-U הוא גודל סקלרי והוא נקרא "עבודה"

* עבודה מכנית חיובית כאשר ההזזה היא בכוון הכח ושלילית כאשר מגמת ההזזה הפוכה מכוון פעולתו של הכח.



כעת נוכל להכליל ההגדרה:

$$dU=\vec{F}\cdot d\vec{s} \qquad (8.1)$$

או ברכיבים

$$dU=(\vec{i}F_x+\vec{j}F_y+\vec{k}F_z)\cdot(\vec{i}dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz)=$$

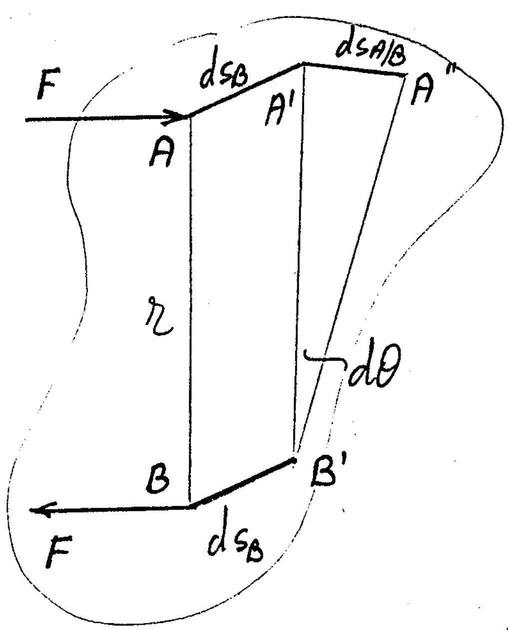
$$=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz$$

כדי לחשב את כל העבודה המתבצעת ע"י הכח F לאורך דרך סופית עלינו לבצע אינטגרציה של משוואה (8.1):

$$U = \int \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

* עבור כוחות הנחתכים בנקודה אחת עבודת שקולם שווה לסכום העבודות שמתבצעות ע"י כל הכוחות יחד.

ב. <u>עבודת צמד</u>



כדי לחשב את עבודתו של צמד נפרק אותו לזוג כוחות $\vec{F}$ ו $-\vec{F}$ שמרחקם r כך ש: $M=Fr$ תוך תנועה אינפיניטיסימלית של הקו AB ל- A"B'. נפרק את תנועת הנקודה A לשני צעדים. ראשית תנועת הנקודה A ל-A' מרחק ds_B הזהה לתנועת הנקודה B ל- B'.

בשלב השני תנועה A' ל- A" מרחק $ds_{A/B}$ שהוא סביב הנקודה B. נחשב כעת את העבודה בכל אחד מהשלבים:

בשלב א' כיון שהדרכים ש $\vec{F}$ ו- $-\vec{F}$ עושים שוות (ds_B) וכיון שמגמותיהם הפוכות סה"כ העבודה שווה ל-0.

בשלב השני מבצע רק $\vec{F}$ עבודה לאורך דרך שאורכה ds_{AB} ולכן:

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{s}_{A/B}$$

ואבל:

$$d\vec{s}_{AB} = \vec{r}\, d\theta$$

ואז:

$$dU = \vec{F} \cdot \vec{r}\, d\theta$$

ולכן (8.2)

$$dU = M\, d\theta$$

העבודה חיובית באם מגמת M ו-$d\theta$ שוות אחרת היא נחשבת שלילית. סה"כ העבודה תהיה כמקודם

$$U = \int M\, d\theta$$

ג. <u>עבודה וירטואלית</u>

נניח כי נתון לנו חלקיק שמיקומו במצב של שווי משקל נקבע ע"י סה"כ הכוחות הפועלים עליו. נניח כעת, <u>באופן מחשבתי</u>, כי אנו מזיזים חלקיק זה ממצבו הטבעי מרחק δr. להזזה שמזיזים אנו קוראים הזזה וירטואלית. וירטואלי בה להדגיש שהזזה זאת איננה קיימת במציאות והיא פרי דמיוננו בלבד. אנו חושבים על תזוזות וירטואליות רק לצורך בחינתם של מצבי שווי משקל ופתרונם.

העבודה שכוח $\vec{F}$, הפועל על החלקיק הנידון, מבצע

לכוח בהזזה הוירטואלית δs מוגדרת העבודה הוירטואלית:

$$\delta U = \vec{F}\cdot\delta\vec{s}$$

שים לב! ההבדל בין δs לדיפרנציאל ds הוא בעובדה ש-ds הוא הזזה "אמיתית" וניתן לאינטגרציה.

עבור מומנט נקבל

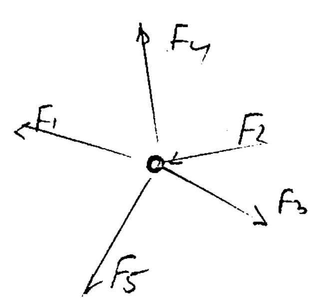
$$\delta U = \underline{M\cdot\delta\theta}$$

* בזמן העבודה הוירטואלית מניחים ש-F ו-M קבועים. בגלל הנחה זאת "יצרו" איברים מסדרים גבוהים מראשון ונזניחם.

8.3 <u>שווי משקל</u>

מטרת הפרק שלפנינו להביע את תנאי שווי המשקל באמצעות עבודה וירטואלית עבור: א. חלקיק ב. גוף קשיח ג. מערכת של גופים קשיחים.

א. <u>חלקיק</u>



נניח כי נתון חלקיק הנמצא בשווי משקל תחת פעולתם של n כוחות. נניח כי אנו מבצעים הזזה וירטואלית δs ממצב שווי המשקל. אזי העבודה הוירטואלית תשווה ל:

$$\delta U = \vec{F}_1\cdot\delta\vec{s} + \vec{F}_2\cdot\delta\vec{s} + \vec{F}_3\cdot\delta\vec{s} + \dots \; \vec{F}_n\cdot\delta\vec{s} =$$

$$= (\Sigma\vec{F}_i)\cdot\delta\vec{s} \equiv 0$$

ומסקנה

$$\Sigma\vec{F}_i = 0$$

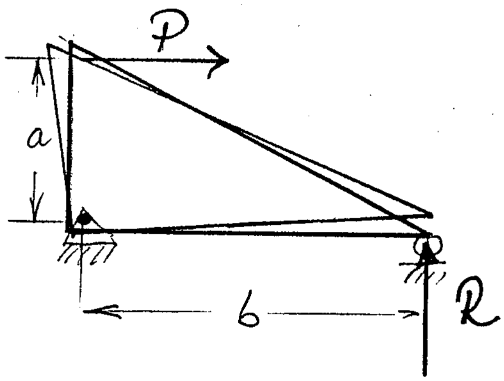
ואלו הן משוואות שווי המשקל הרגילות. ברכיבים היינו מקבלים:

$$R_x\delta x + R_y\delta y + R_z\delta z \equiv 0$$

ובגלל אי התלות בין $\delta x, \delta y, \delta z$ נקבל:

$$R_x = 0\ ;\ R_y = 0\ ;\ R_z = 0$$

כלומר חזרנו למשוואות שווי המשקל הרגילות והשימוש בעבודה וירטואלית לא הביא לכל יתרון. <u>$\delta U=0$ הוא נוסח אלטרנטיבי למש.מ.</u>



ב. <u>גוף קשיח</u>

ננסה להרחיב בקלות את עקרון העבודה הוירטואלית לגוף קשיח שכן גוף זה בנוי מאינספור נקודות מסה המחוברות באופן קשיח זו לזו. כל הכוחות הפנימיים בין החלקיקים אינם תורמים לעבודה הוירטואלית שכן הם מופיעים בזוגות כוחות השווים בעצמתם אך המנוגדים בכיוונם (החוק ה-III של ניוטון)

לכן <u>רק</u> הכוחות החיצוניים יכולים לתרום לעבודה הוירטואלית.

גם במקרה של גוף קשיח השמוש בעבודה וירטואלית לא תתרום דבר מעבר למ. שיוו. הרגילות. נסתכל בדוגמא שבשרטוט עליונו לקבוע את Q. ניתן הזזה וירטואלית $\delta\theta$ ונקבל

$$\delta U = -Pa\delta\theta - Rb\delta\theta = 0$$

שימו לב: $\delta\theta$ עבור חלקיק ולכן גם עבור <u>כל</u> החלקיקים.

$$Pa - Rb = 0$$

ולכן

שהוא מ.ש.ו. הרגילה.

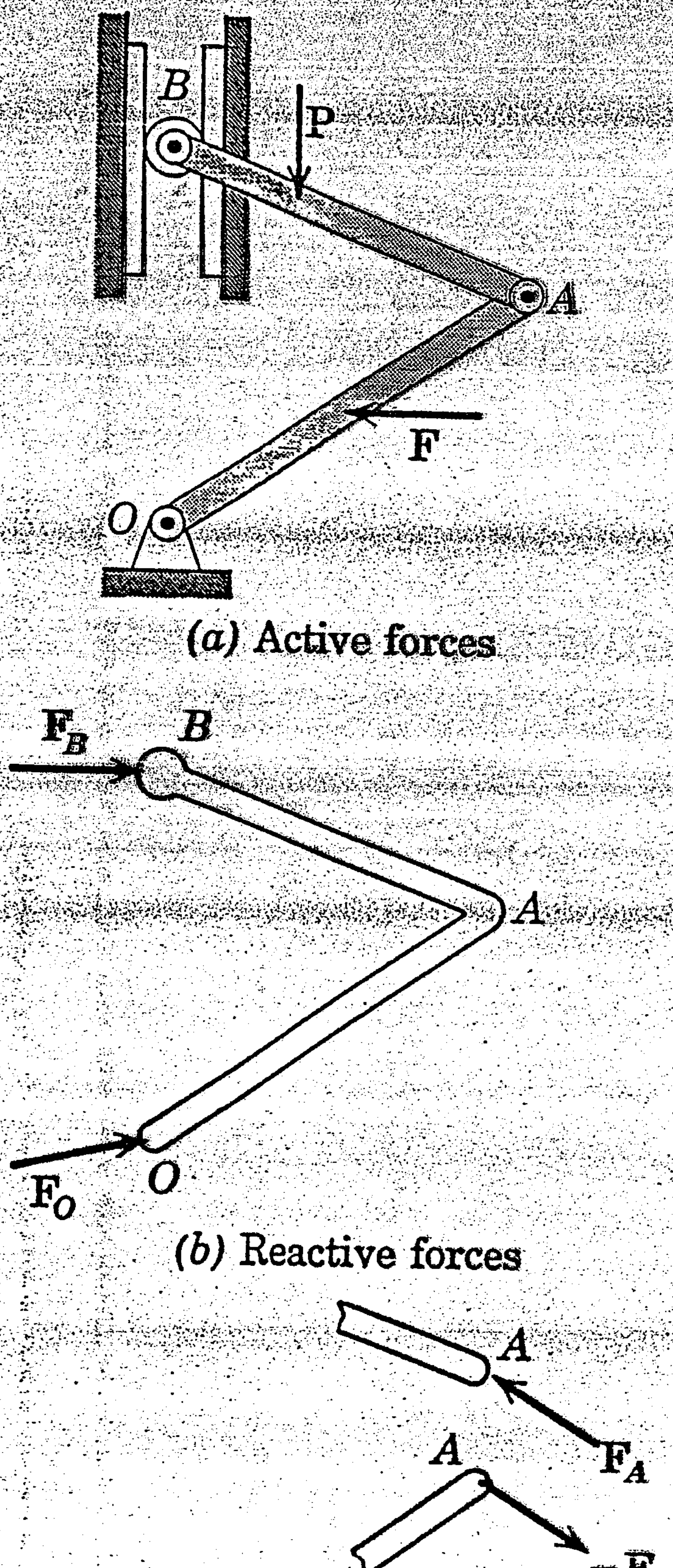
ג. <u>מערכת של גופים קשיחים</u>

כעת נרחיב את השמוש בעקרון העבודה הוירטואלית למערכת של גופים קשיחים המחוברים זה לזה. אנו נגביל את הדיון למערכות אידיאליות להן שתי תכונות:

1. אין חיכוך במערכת.
2. אין אגירת אנרגיה במערכת עקב התארכות או התכווצות אלמנטים.

נדגים את השמוש בעקרון באמצעות הדוגמא שבסעיף 8.1. במערכת שלפנינו 2 אלמנטים ומטרתנו לקבוע את באיזה מצב (θ) תהיה המערכת בשווי משקל תחת פעולתם של $\vec{Q}$ ו- $\vec{F}$.

8.1 f3e



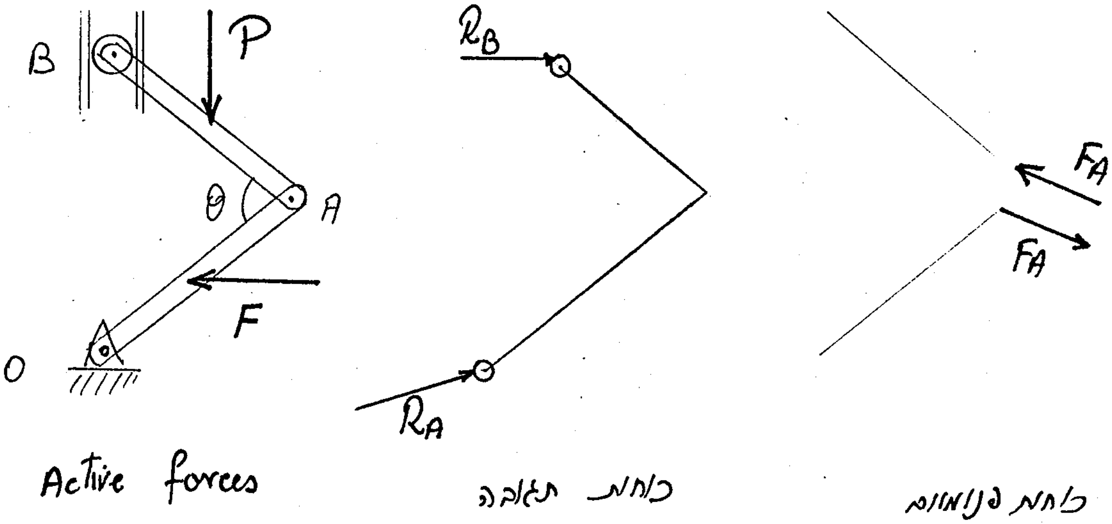
(a) Active forces

(b) Reactive forces

(c) Internal forces

Figure 7/7

עבור גוף מורכב שכזה ניתן להגדיר שלושה סוגי כוחות:



כוחות אקטיביים:

הינם כוחות חיצוניים המסוגלים לבצע עבודה וירטואלית כאשר מבוצעת הזזה וירטואלית מותרת. לדוגמא הכוחות F ו- P.

כוחות תגובה:

כוחות הפועלים בסמכים בהם לא תתכן הזזה וירטואלית בכיוון הכח שכן בכיוון זה קיימת מגבלת תנועה.

לדוגמא: בכוח - R_B לא תתכן הזזה וירטואלית בנקודה B אלא בכיוון אנכי ואזי R_B לא יבצע כל עבודה!
בכיוון האופקי <u>אסורה</u> הזזה וירטואלית!!!

כוחות פנימיים:

כוחות פנימיים יבצעו עבודה וירטואלית נטו השווה ל-0. עקב הופעתם בזוגות שווים בעוצמתם והפוכים בכיוונם.

מתוך כל האמור לעיל ניתן לנסח את עקרון העבודה הווירטואלית כדלהלן:

"העבודה הווירטואלית המתבצעת על ידי הכוחות האקטיביים החיצוניים על מערכת מכנית אידאלית הנמצאת בשווי משקל הינה 0 עבור כל הצגה וירטואלית מותרת העקבית עם מגבלות התנועה של הגוף."

משמעות "המגבלות" הוא המגבלות שבסמכים.

מבחינה מתמטית ינוסח העקרון כ:

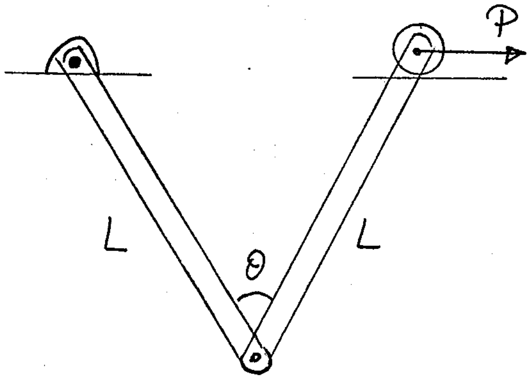
$$\delta W = 0 \qquad (8.3)$$

כעת משניסחנו את העקרון אנו יכולים לעמוד על יתרונותיו:

א. אין צורך "לפרק" את המבנה כדי לקבוע את הקשרים בין הכוחות האקטיביים, כפי שנדרש בדרך כלל בשיטה הרגילה.

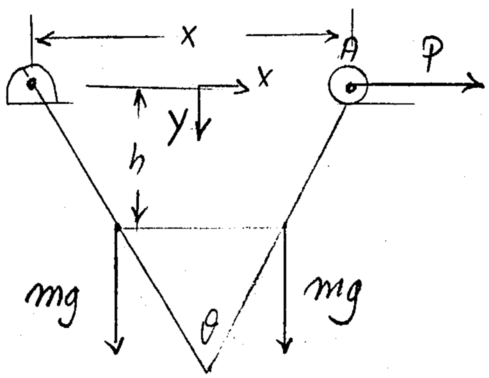
ב. ניתן לקבוע את הקשר בין הכוחות האקטיביים מבלי להתייחס לתגובות. יתרון זה מאפשר לנו לקבוע את מיקום מצב שווי המשקל בניגוד לשיטה הקודמת בה המיקום הוא נתון ועלינו היה לקבוע את הכוחות.

בתהליך הפתרון של בעיה באמצעות עקרון העבודה הוירטואלית
אנו נשתמש בדיאגרמה שונה מהדג"ח. על-פני דיאגרמה
צורה ישורטטו רק הכוחות האקטיביים והיא תכונה דיאגרמת
הכוחות האקטיביים" ד"כא.



<u>דוגמא א'</u> (7.1 עמ' 322)

שני מוטות להם שאורכם L
ומסתם מזה ויוצרים את
המבנה שבשרטוט. עבור P נתון
קבע את θ של שווי המשקל.



א. נשרטט דכ"א:

ב. ניתן הזזה וירטואלית δx ימינה בנקודה A ונרשום
את עקרון העבודה הוירטואלית:

$$\delta U=0 \Rightarrow P\delta x + 2mg\,\delta y = 0 \qquad (1)$$

כעת עלינו לקשור בין δx ו-δy לזווית θ שבאמצעותה
נגדיר בסוף את מצב ש.מ

$$X = 2L\sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow \delta x = L\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta \qquad (2)$$

$$y = \frac{L}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad \delta y = -\frac{L}{4}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta \qquad (3)$$

הצבת (2) ו- (3) ל- (1) תתן:

$$PL\cos\frac{\theta}{2}\,\delta\theta - 2mg\frac{L}{4}\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta = 0 \qquad (4)$$

$$\left(PL\cos\frac{\theta}{2} - \frac{mgL}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\delta\theta = 0$$

כיון ש-$\delta\theta$ שרירותי חייב להתאפס הביטוי שבסוגריים ומכאן:

$$tg\frac{\theta}{2} = \frac{2P}{mg}$$

$$\theta = 2tg^{-1}\frac{2P}{mg}$$

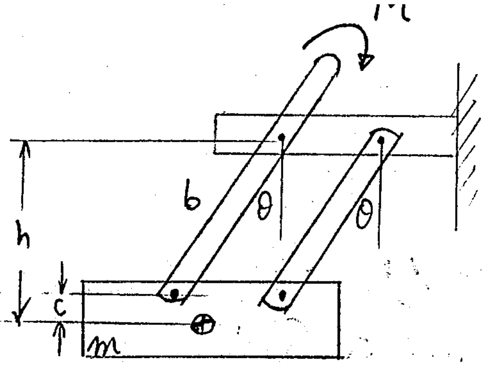
בדיקה עבור $P=0$ $\quad \theta=0$

$P\to\infty \quad \theta\Rightarrow\pi$

<u>הערות:</u>

א. שים לב שעבור δx חיובי אכן δy צריך להיות שלילי!!! כפי שהחשבון אכן מוכיח.

ב. הטיפול המתמטי ב δx ו- δy הוא כבנגזרות רגילות כלומר כל כללי התפוא"ח חלים על גדלים אלו. הנוגעים בנגזרות.



דוגמה ב' (לפי עמ' 323)

המסה m מובלת למצב ש.מ.
באמצעות המתקן שבשרטוט. המומנט
M פועל על קצה אחד המוטות המקבילים
מוטות אלו חסרי מסה! יש לחשב את
θ כתלות ב-M.

א. השרטוט ישמש כד"ג

ב. עבור $\delta\theta$ חיובי (במגמת השעון) ישתנה מרכז הכובד של המסה ב δh ולכן עקרון העבודה הווירטואלית יהיה:

$$M\delta\theta + mg\delta h = 0$$

כעת עלינו להביע את δh באמצעות $\delta\theta$. נרשום את h כתלות ב b, θ ו- c

$$h = b\cos\theta + c$$

$$\delta h = -b\sin\theta\,\delta\theta + 0$$

ומכאן

$$M\delta\theta - mg\,b\sin\theta\,\delta\theta = 0$$

$$(M - mg\,b\sin\theta)\,\delta\theta = 0$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{M}{mgb}$$